

**ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ**

ANNA WALASZEK-BABISZEWSKA

**MODELE STOCHASTYCZNE
OPRÓBOWANIA WĘGLA**



P. 3351 / 92

GÓRNICtwo

**Z. 203
GLIWICE
1992**

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1164

ANNA WALASZEK-BABISZEWSKA

**MODELE STOCHASTYCZNE
OPRÓBOWANIA WĘGLA**

GLIWICE

1992

OPINIODAWCA

Prof. zw. dr hab. inż. Kazimierz Sztaba

Doc. dr hab. inż. Krystian Kalinowski

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY

— Prof. dr hab. inż. Jan Bandrowski

REDAKTOR DZIAŁU

— Prof. dr hab. inż. Walery Szuścik

SEKRETARZ REDAKCJI

— Mgr Elżbieta Leško

REDAKCJA

Mgr Anna Błażkiewicz

REDAKCJA TECHNICZNA

Alicja Nowacka

Wydano za zgodą

Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0372-9508

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej

ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 150+83	Ark. wyd. 6,5	Ark. druk. 7,5	Papier offsetowy kl.III, 70x100, 70g
Oddano do druku 4.06.92	Podpis. do druku 4.06.92	Druk ukończ. w lipcu 1992	
Zam. 233/92			Cena zł 9.100,—

Fotokopie, druk i oprawę

wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

P200 | 92

OD WYDAWCY

Praca autorki została przeczytana i poprawiona przez Prof. dra hab. Eugeniusza Szczepankiewicza. Śmierć Recenzenta przerwała pracę nad opiniowaniem, w związku z czym brak recenzji w formie pisemnej. Niemniej jednak istotne jest, że taki Autorytet jak Prof. Szczepankiewicz wyraził o pracy dr Walaszek-Babiszewskiej pozytywną opinię.

SPIS TREŚCI

	Str.
WYKAZ OZNACZEŃ.....	9
1. WSTĘP.....	11
2. CEL I ZAKRES PRACY.....	13
3. ZAWARTOŚCI FRAKCJI ZIARN O RÓŻNYCH WŁASNOŚCIACH FIZYCZ- NYCH W POJEDYNCZEJ PRÓBCE WĘGLA.....	16
3.1. Bilans masy ziarn w próbce węgla.....	16
3.2. Wychody klas ziarnowych i frakcji gęstościowych	20
3.3. Zawartość popiołu w próbce węgla.....	22
3.4. Postać ogólna zawartości wybranego składnika w próbce węgla.....	24
3.5. Przykład.....	27
4. INTERPRETACJA PROBABILISTYCZNA PODSTAWOWYCH CHARAKTE- RYSTYK W PROBCE WĘGLA.....	33
4.1. Uwagi ogólne.....	33
4.2. Próbkki jednoelementowe. Interpretacja w katego- riach zdarzeń elementarnych.....	33
4.3. Próbkki wieloelementowe. Cechy ziarn węgla w pró- bce jako zmienne losowe.....	37
4.4. Zawartości frakcji ziarn jako zmienne losowe....	41
5. SCHEMATY LOSOWE OPRÓBOWANIA.....	44
5.1. Uwagi ogólne.....	44
5.2. Rozkłady prawdopodobieństwa pojedynczej frakcji ziarn w próbce węgla.....	44
5.2.1. Założenia o warunkach pobierania próbek..	44
5.2.2. Rozkład prawdopodobieństwa liczby ziarn danego typu w próbce węgla.....	45
5.2.3. Rozkład prawdopodobieństwa częstości wy- stępowania ziarn danego typu w próbce węgla.....	48
5.2.4. Rozkład prawdopodobieństwa wychodu poje- dynczej frakcji ziarn w próbce węgla.....	48

5.3. Rozkład prawdopodobieństwa sumy dwóch frakcji...	53
5.3.1. Rozkład prawdopodobieństwa liczby ziarn we frakcji sumarycznej.....	53
5.3.2. Rozkład prawdopodobieństwa sumarycznego wychodu dwóch frakcji.....	54
5.4. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej wielowymiarowej.....	58
5.5. Rozkłady złożone.....	64
5.6. Aproksymacja rozkładów binomialnych.....	65
5.6.1. Zastosowanie zbieżności do rozkładu normalnego.....	65
5.6.2. Zastosowanie zbieżności do rozkładu Poissona.....	69
5.7. Rozkłady prawdopodobieństwa frakcji w próbce pomniejszonej.....	73
6. MODELE OPRÓBOWANIA DYNAMICZNEGO.....	75
6.1. Uwagi ogólne	75
6.2. Model opróbowania z wykorzystaniem procesów Poissona.....	79
6.2.1. Rozmieszczenie ziarn węgla w czasie jako poissonowski potok zdarzeń.....	79
6.2.2. Próbkowanie procesów Poissona.....	84
6.2.2.1. Opis opróbowania, gdy strumień ziarn jest jednorodnym procesem Poissona.....	84
6.2.2.2. Opis opróbowania, gdy strumień ziarn jest niejednorodnym procesem Poissona.....	88
6.3. Model opróbowania z zastosowaniem procesów sygnałowych.....	92
6.4. Przykład.....	97
7. ZAKOŃCZENIE.....	103
LITERATURA.....	107
STRESZCZENIA.....	112

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ПЕРЕЧЕНЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	9
1. ВВЕДЕНИЕ.....	11
2. ЦЕЛЬ И ОБЪЕМ РАБОТЫ.....	13
3. СОДЕРЖАНИЕ ФРАКЦИЙ ЗЕРЕН С РАЗЛИЧНЫМИ ФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ В ОДИНАРНОЙ ПРОБЕ УГЛЯ.....	16
3.1. Баланс массы зерен в пробе угля.....	16
3.2. Выходы зерновых классов и плотных фракций.....	20
3.3. Содержание золы в пробе угля.....	22
3.4. Общая форма содержания избранного компонента в пробе угля.....	24
3.5. Пример.....	27
4. ПРОБАБИЛИСТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕ- РИСТИК В ПРОБЕ УГЛЯ.....	33
4.1. Общие замечания.....	33
4.2. Одноэлементные пробы. Интерпретация в категориях элементарных случайностей.....	33
4.3. Многоэлементные пробы. Свойства зерен угля как случайные переменные.....	37
4.4. Содержания фракций зерен как случайные переменные.....	41
5. ВЫБОРОЧНЫЕ СХЕМЫ ОТБОРА ПРОБ.....	44
5.1. Общие замечания.....	44
5.2. Вероятностные распределения олигарной фракций зерен в пробе угля.....	44
5.2.1. Положения по условиям отбора проб.....	44
5.2.2. Вероятностные распределения числа зерен данного типа в пробе угля.....	45
5.2.3. Вероятностные распределения частоты поя- вления зерен данного типа в пробе угля.....	48
5.2.4. Вероятностные распределения выхода олигар- ной фракций зерен в пробе угля.....	48

5.3. Вероятностные распределения суммы двух фракций...	53
5.3.1. Вероятностные распределения числа зерен в суммарной фракции.....	53
5.3.2. Вероятностное распределение суммарного выхода двух фракций.....	54
5.4. Вероятностное распределение случайной многомерной переменной.....	58
5.5. Сложные распределения.....	64
5.6. Аппроксимация биномиальных распределений.....	65
5.6.1. Применение сходимости в нормальном распределений.....	65
5.6.2. Применение сходимости в распределений Пуассона.....	69
5.7. Вероятностные распределения фракций в сокращенной пробе.....	73
6. МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ОТБОРА ПРОБ.....	75
6.1. Общие замечания.....	75
6.2. Модель отбора проб с использованием процессов Пуассона.....	79
6.2.1. Размещение зерен угля во времени как пуассоновски случайный поток.....	79
6.2.2. Пробоотбор процессов Пуассона.....	84
6.2.2.1. Описание отбора проб в случае когда поток зерен является однородным процессом Пуассона.....	84
6.2.2.2. Описание отбора проб в случае когда поток зерен является неоднородным процессом Пуассона.....	88
6.3. Модели отбора проб с применением сигнальных процессов.....	92
6.4. Пример.....	97
7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	103
ЛИТЕРАТУРА.....	107
РЕЗЮМЕ.....	112

CONTENTS

	Page
LIST OF DESIGNATIONS.....	9
1. INTRODUCTION.....	11
2. PURPOSE AND SCOPE OF WORK.....	13
3. MASS FRACTION OF GRAINS WITH VARIOUS PHYSICAL PROPERTIES IN A SINGLE SAMPLE OF COAL.....	16
3.1. Mass balance of grains in a coal sample.....	16
3.2. Yields of size grades and density fractions.....	20
3.3. Ash content in a coal sample.....	22
3.4. General form of content of a selected constituent of a coal sample.....	24
3.5. Example.....	27
4. PROBABILISTIC INTERPRETATION OF BASIC CHARACTERISTICS IN A COAL SAMPLE.....	33
4.1. General.....	33
4.2. Unielement samples. Interpretation in categories of elementary events.....	33
4.3. Multielement samples. Characteristics of coal grains as a random variables.....	37
4.4. Mass fractions of size grade as random variables..	41
5. RANDOM SCHEMES OF SAMPLING.....	44
5.1. General.....	44
5.2. Probability distributions of a single fraction in a coal sample.....	44
5.2.1. Assumptions regarding the sampling conditions.....	44
5.2.2. Probability distribution of the number of grains of a given type in a coal sample...	45
5.2.3. Probability distribution of frequency of occurrence of grains of a given type in a coal sample.....	48

5.2.4. Probability distribution of the yield of a single fraction in a coal sample.....	48
5.3. Probability distribution of a sum of two fractions.....	53
5.3.1. Probability distribution of the number of grains in the summary fraction.....	53
5.3.2. Probability distribution of the summary yield of two fractions.....	54
5.4. Probability distribution of a multidimensional random variable.....	58
5.5. Compound distributions.....	64
5.6. Approximation of binomial distributions.....	65
5.6.1. Application of convergence to normal distribution	65
5.6.2. Application of convergence to Poisson distribution.....	69
5.7. Probability distributions of fractions in a redu- ced sample.....	73
6. MODELS OF DYNAMIC SAMPLING	75
6.1. General.....	75
6.2. Model of sampling under application of Poisson's processes.....	79
6.2.1. Arrangement of coal grains in time as Poisson's stream of events.....	79
6.2.2. Sampling of Poisson's processes.....	84
6.2.2.1. Description of sampling when grains stream is a homogeneous Poisson's process.....	84
6.2.2.2. Description of sampling when grains stream is a non-homogeneous Poisson's process.....	88
6.3. Models of sampling under application of signal processes.....	92
6.4. Example.....	97
7. ENDING.....	103
BIBLIOGRAPHY.....	107
SUMMARY.....	112

WYKAZ OZNACZEŃ

- i - numer klasy ziarnowej; $i=1,2,\dots,l$,
- j - numer frakcji gęstościowej; $j=1,2,\dots,r$,
- m - masa próbki,
- m_{ij} - masa ziarn należących jednocześnie do i -tej klasy ziarnowej i j -tej frakcji gęstościowej w próbce,
- $m_{i.}$ - masa ziarn stanowiących i -tą klasę w próbce,
- $m_{.j}$ - masa ziarn stanowiących j -tą frakcję gęstościową w próbce,
- m_{α} - masa ziarn substancji niepalnej w próbce,
- $m_{\alpha,ij}$ - masa ziarn substancji niepalnej wśród ziarn i -tej klasy, j -tej frakcji gęstościowej,
- $m_{\alpha,i.}$ - masa ziarn substancji niepalnej w i -tej klasie ziarnowej,
- n - liczba ziarn w próbce,
- n_{ij} - liczba ziarn należących jednocześnie do i -tej klasy ziarnowej i j -tej frakcji gęstościowej w próbce,
- $n_{i.}$ - liczba ziarn stanowiących i -tą klasę w próbce,
- $n_{.j}$ - liczba ziarn stanowiących j -tą frakcję gęstościową w próbce,
- p_{ij} - prawdopodobieństwo (estymator prawdopodobieństwa) wylosowania ziarna należącego jednocześnie do i -tej klasy ziarnowej i j -tej frakcji gęstościowej,
- $p_{i.}$ - prawdopodobieństwo wylosowania ziarna należącego do i -tej klasy ziarnowej,
- $p_{.j}$ - prawdopodobieństwo wylosowania ziarna należącego do j -tej frakcji gęstościowej,
- $p_{j/i}$ - prawdopodobieństwo warunkowe wylosowania ziarna z j -tej frakcji gęstościowej, spośród ziarn i -tej klasy,
- p_{α} - prawdopodobieństwo wylosowania ziarna skały płonnej,
- $p_{\alpha,ij}$ - prawdopodobieństwo wylosowania ziarna skały spośród ziarn należących do i -tej klasy i j -tej frakcji gęstościowej,

- $P_{\alpha, i}$ - prawdopodobieństwo wylosowania ziarna skały spośród ziarn należących do i-tej klasy,
- $\bar{V}$ - średnia objętość ziarn w próbce,
- V_i - średnia objętość ziarn w i-tej klasie,
- $\bar{V}_j$ - średnia objętość ziarn w j-tej frakcji gęstościowej,
- $\bar{\delta}$ - średnia gęstość ziarn w próbce,
- $\bar{\delta}_j$ - średnia gęstość ziarn w j-tej frakcji,
- $\bar{\delta}_i$ - średnia gęstość ziarn w i-tej klasie,
- α - zawartość popiołu w próbce,
- α_{ij} - zawartość popiołu w j-tej frakcji gęstościowej, i-tej klasy ziarnowej,
- α_i - zawartość popiołu w i-tej klasie ziarnowej,
- γ_{ij} - zawartość (wychód masowy) ziarn należących do i-tej klasy ziarnowej i j-tej frakcji gęstościowej w próbce,
- γ_i - zawartość (wychód masowy) ziarn i-tej klasy w próbce,
- γ_j - zawartość (wychód masowy) ziarn j-tej frakcji gęstościowej w próbce,
- $\gamma_{j/i}$ - zawartość (wychód masowy) ziarn j-tej frakcji gęstościowej w i-tej klasie ziarnowej,
- ν - zawartość (wychód masowy) wybranego składnika w próbce węgla.

1. WSTĘP

Opróbowanie jako metoda uzyskiwania informacji o charakterystycznych własnościach węgla była dotychczas i pozostanie niezastąpiona, chociażby dlatego, że szczegółowa analiza całego materiału jest niemożliwa. Pobieranie próbek materiału i ich analizę stosuje się np.:

- do oceny wzbogacalności surowca,
- przy wstępnym poszukiwaniu optymalnych warunków prowadzenia procesów wzbogacania w zakładach przeróbczych,
- w celu bieżącej oceny jakości produktów wzbogacania,
- w sterowaniu procesami przeróbczymi,
- w zakładach energetycznych i stacjach przeładunku dużych mas węgla, np. w portach.

Obecnie zakłady wzbogacania węgla i rud, zakłady przeładunku materiałów sypkich na świecie dysponują bardzo różnorodną aparaturą do pobierania, przygotowania i analizy próbek [47], [39], [40], [2], [5], [10]. Należą do nich: sprzęt ręcznie obsługiwany, próbobiorniki mechaniczne, wiertła próbobiornicze współpracujące ze stacjami przygotowania próbek, stanowiącymi oddzielną część właściwego zakładu.

Zarówno w kraju, jak i na świecie poszukuje się nowych, skutecznych metod szybkiego oznaczania parametrów jakościowych [8], [20], [30], [16], w szczególności charakterystyki densymetrycznej i granulometrycznej materiałów uziarnionych [48], [3].

Można wyróżnić dwa rodzaje struktur systemów kontrolno-pomiarowych dla materiałów uziarnionych:

- struktura obejmująca urządzenia próbobiornicze, zaplecze laboratoryjne lub szybkie analizatory pracujące "near stream"; system pomiarowy pozwala określić żądane parametry materiału zawartego w próbkach lub w wydzielonej strudze pomiarowej;

- struktura zawierająca urządzenia pomiarowe umieszczone w odpowiednich punktach właściwego ciągu technologicznego, pracujące "on stream" (na głównej strudze materiału); systemy takie stosuje się w zakładach o mniejszej wydajności materiałów sypkich oraz dla mialów i wodnych zawieszin drobnych ziarn materiału.

W strukturach tych pobranie części materiału jako próbki, przygotowanie próbki i pomiar kontrolowanych własności to zbiór operacji, które należy uważać za tzw. pomiar złożony. Całkowity zbiór środków pomiarowych, konieczny i wystarczający dla przeprowadzenia tak rozumianego pomiaru, to system pomiarowy. Określenie błędu pomiaru systemu wymaga tworzenia modeli poszczególnych operacji, składających się na pomiar złożony.

Tak więc "informacyjność" przeprowadzanych pomiarów w tych systemach jest uwarunkowana stanem teorii, pozwalającej określić źródła powstawania błędów, charakter błędów oraz ich wielkość. Opierając się na wyznaczonych modelach systemu pomiarowego można dążyć do minimalizacji błędów, jeśli struktura systemu na to pozwala.

"Ważną rolę w rozwoju teorii błędów systemów pomiarowych odegrała świadomość organicznego związku tej teorii z teorią systemów optymalnych (tzn. systemów gwarantujących osiągnięcie ekstremum danego kryterium jakości - np. minimum błędu - przy uwzględnieniu ograniczeń) zarówno w sensie ogólnym, jak również w odniesieniu do pewnych szczególnych aspektów (np. tak zwane systemy adaptacyjne i uczące się, systemy rozpoznawania obrazów) lub zastosowań (takich jak teoria telekomunikacji, teoria informacji, radiolokacja, identyfikacja, planowanie eksperymentu, teoria masowej obsługi." W.J.Rozenberg [42].

Podobnie można powiedzieć, że istnieje ścisły związek pomiędzy systemami sterowania i systemami pomiarowymi, zarówno w sensie struktury, jak i w zagadnieniach analizy oraz ich syntezy.

2. CEL I ZAKRES PRACY

Prace w zakresie identyfikacji procesów wzbogacania węgla przeprowadzane dla celów sterowania i kontroli tych procesów stawiają przed badaczem problem opisu węgla, jako materiału złożonego z ziarn o zróżnicowanych właściwościach fizycznych i chemicznych. Dotyczy to zarówno opisu węgla surowego, którego zmienny skład jest zakłóceniem dla prowadzenia procesów wzbogacania w sposób optymalny, jak również produktów wzbogacania, których kryteria jakości są zależne od ich parametrów chwilowych.

Traktowanie więc zakładów wzbogacania węgla jako systemów sterowanych optymalnie wymaga także traktowania bloku pomiarów jakościowo - ilościowych węgla jako systemu pomiarowego. Określanie błędu systemu pomiarowego wiąże się z tworzeniem modeli operacji cząstkowych systemu pomiarowego i określaniem błędów składowych.

Podstawowym celem pracy jest utworzenie probabilistycznego opisu opróbowania węgla, jako procesu stanowiącego nieodłączną część identyfikacji i sterowania procesów wzbogacania węgla. Jest to równoznaczne z ustaleniem na drodze analitycznej ogólnych formuł, określających charakter wybranych cech węgla z uwzględnieniem aspektów opróbowania. Tworzony opis musi być odpowiedni dla stochastycznych algorytmów sterowania procesów wzbogacania węgla.

Praca ma charakter poznawczy w tym sensie, że rozszerza dotychczasowy stan wiedzy teoretycznej z zakresu opróbowania o stochastyczne opisy strukturalne tego zjawiska. Jednocześnie spełnia cele użyteczne, ponieważ utworzony opis służyć ma dalszym badaniom wykorzystującym stochastyczne algorytmy w

zakresie modelowania, identyfikacji i sterowania procesów wzbogacania węgla.

Dotychczas, w wielu pracach teoretycznych na temat sterowania lub identyfikacji procesów wzbogacania węgla zakładano na ogół w sposób formalny, określony, stochastyczny charakter zmian własności węgla. W niektórych pracach (np. [8], [14], [26], [38]) rozkłady prawdopodobieństwa wybranych cech węgla traktowano jako identyczne z eksperymentalnie wyznaczanymi rozkładami tych cech w próbkach. Podobnie przyjmowano stochastyczne charakterystyki czasowe cech węgla na podstawie wyznaczonych eksperymentalnie charakterystyk próbek ([26], [56]). W pracach [55] i [28] poświęconych teorii opróbowania przyjmowano arbitralnie rozkłady prawdopodobieństwa wychodów frakcji jako normalne. W pracach [55] i [20] autorzy stwierdzają ogólną prawidłowość wiążącą funkcję rozkładu prawdopodobieństwa wybranych cech materiału w próbce z wielkością próbki i średnią charakterystyką materiału.

Tworzenie opisu procesu opróbowania węgla w niniejszej pracy rozpoczyna w rozdziale 3 wyprowadzenie deterministycznych zależności dla wychodów frakcji gęstościowych i ziarnowych oraz zawartości popiołu w pojedynczej próbce węgla. Te elementarne formuły wyprowadzono opierając się na bilansie masy ziarn w próbce i przyjętych średnich wartościach gęstości i objętości ziarn. Uzyskano zależności wiążące wychody poszczególnych frakcji, klas ziarnowych i zawartości w nich popiołu - a więc wielkości tradycyjnie stosowanych w opisach procesów wzbogacania - ze względną liczbą ziarn badanej frakcji i populacji odniesienia. Względna liczba ziarn stanowi, jako estymator prawdopodobieństwa wylosowania pojedynczego ziarna o określonych własnościach, ważny parametr przy rozważaniach dotyczących formuł rozkładów prawdopodobieństwa w dalszych rozdziałach.

W rozdziale 4 zdefiniowano pojęcie prawdopodobieństwa, gdy losowanie ziarn tworzy przestrzeń zdarzeń elementarnych lub gdy cechy ziarna uznajemy za zmienne losowe oraz gdy wychody frakcji ziarn wyznaczone z próbki są zmiennymi losowymi.

W rozdziale 5 przedstawiono opis opróbowania statycznego w postaci rozkładów prawdopodobieństwa liczby ziarn danego typu oraz rozkładów prawdopodobieństwa wychodów frakcji ziarn. Stosując odpowiednie schematy losowań, uzyskano ogólne formuły rozkładów, a parametry rozkładów wyznaczono odpowiednio dla poszczególnych frakcji ziarn. Podano kryteria aproksymacji rozkładów binomialnych i wielomianowych rozkładami Poissona i normalnym, wynikające z odpowiednich twierdzeń granicznych.

Rozdział 6 zawiera opis opróbowania w postaci kilku modeli procesów stochastycznych: procesów Poissona i pewnego procesu sygnałowego. Opis zawiera rozkłady prawdopodobieństwa procesów stochastycznych związanych z procesem opróbowania oraz ich momenty rzędu drugiego.

Utworzone modele dają odpowiedź na pytanie, jak są związane ze sobą charakterystyki średnie materiału i odpowiadające im wielkości w próbkach o określonej liczebności.

3. ZAWARTOŚCI FRAKCJI ZIARN O RÓŻNYCH WŁASNOŚCIACH FIZYCZNYCH W POJEDYNCZEJ PRÓBCE WĘGLA

3.1. BILANS MASY ZIARN W PRÓBCE WĘGLA

Ze względu na podstawowe charakterystyki węgla, którymi posługują się technolodzy i automatycy podczas sterowania procesem wzbogacania węgla ([47], a także [6], [24], [31]), wybranymi cechami fizycznymi węgla w dalszych rozważaniach będą objętość i gęstość ziarn.

Przedmiotem rozważań będzie pojedyncza próbka węgla o masie m i skończonej liczbie n ziarn oraz masa ziarn w poszczególnych klasach ziarnowych i frakcjach gęstościowych.

Założmy, że w wyniku analizy sitowej materiał zawarty w próbce zostaje podzielony na l klas ziarnowych, w których średnie objętości ziarn wynoszą odpowiednio: $V_1, V_2, \dots, V_l$. Następnie ziarna węgla należące do poszczególnych klas zostają rozdzielone w cieczach o różnych gęstościach na r frakcji. Średnie gęstości ziarn w poszczególnych frakcjach wynoszą odpowiednio: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j, \dots, \delta_r$.

Uzyskana w wyniku analizy masa m_{ij} ziarn, które należą jednocześnie do i -tej klasy ziarnowej oraz j -tej frakcji gęstościowej, może być obliczona ze wzoru:

$$m_{ij} = V_i \delta_j n_{ij}, \quad (3.1)$$

gdzie:

n_{ij} - liczba ziarn należących jednocześnie do i -tej klasy ziarnowej oraz j -tej frakcji gęstościowej,

$i=1, 2, \dots, l; \quad j=1, 2, \dots, r$.

Wyniki doświadczenia można zapisać w formie macierzy M o l wierszach i r kolumnach:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} \dots m_{1j} \dots m_{1r} \\ \hline m_{i1} \dots m_{ij} \dots m_{ir} \\ \hline m_{l1} \dots m_{lj} \dots m_{lr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \delta_1 n_{11} \dots v_1 \delta_j n_{1j} \dots v_1 \delta_r n_{1r} \\ \hline v_i \delta_1 n_{i1} \dots v_i \delta_j n_{ij} \dots v_i \delta_r n_{ir} \\ \hline v_l \delta_1 n_{l1} \dots v_l \delta_j n_{lj} \dots v_l \delta_r n_{lr} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Masę $m_{i.}$ ziarn stanowiących i -tą klasę można wyznaczyć przez sumowanie po wszystkich j (frakcjach gęstościowych) elementarnych mas m_{ij} . Masy ziarn w poszczególnych klasach tworzą wektor kolumnowy, którego składowe $m_{i.}$ są sumą wyrazów w i -tym wierszu macierzy M :

$$[m_{i.}] = \left[\sum_{j=1}^r m_{ij} \right] = \left[v_i \sum_{j=1}^r \delta_j n_{ij} \right], \quad i=1, 2, \dots, l \quad (3.3)$$

Masa $m_{.j}$ ziarn stanowiących j -tą frakcję gęstościową w danej próbie jest sumą wyrazów w j -tej kolumnie macierzy M i dla wszystkich frakcji stanowi następujący wektor wierszowy:

$$[m_{.j}] = \left[\sum_{i=1}^l m_{ij} \right] = \left[\delta_j \sum_{i=1}^l v_i n_{ij} \right], \quad j=1, 2, \dots, r \quad (3.4)$$

Ponadto, masa ziarn w danej klasie może być wyrażona zależnością ogólną:

$$[m_{i.}] = \left[v_i \bar{\delta}_i n_{i.} \right], \quad i=1, 2, \dots, l \quad (3.5)$$

gdzie:

$n_{i.}$ - liczba ziarn w danej klasie, sumowana po wszystkich frakcjach:

$$[n_{i.}] = \left[\sum_{j=1}^r n_{ij} \right], \quad i=1, 2, \dots, l \quad (3.6)$$

$\bar{\delta}_i$ - pewna średnia gęstość ziarn w i-tej klasie, którą można wyznaczyć z porównania wyrażeń (3.5) i (3.3):

$$[\bar{\delta}_i] = \left[\frac{\sum_{j=1}^r \delta_j n_{ij}}{n_{i.}} \right], \quad i=1,2,\dots,1 \quad (3.7)$$

Podobnie można zapisać zależność na masę ziarn j-tej frakcji gęstościowej:

$$[m_{.j}] = [\bar{v}_j \delta_j n_{.j}], \quad j=1,2,\dots,r \quad (3.8)$$

w której $n_{.j}$ jest liczbą ziarn o gęstości średniej δ_j , we wszystkich klasach ziarnowych:

$$[n_{.j}] = \left[\sum_{i=1}^1 n_{ij} \right], \quad j=1,2,\dots,r \quad (3.9)$$

a $\bar{v}_j$ jest pewną średnią objętością ziarn w j-tej frakcji gęstościowej. Porównując wyrażenia (3.8) i (3.4), otrzymujemy zależność definiującą średnią objętość ziarn w j-tej frakcji gęstościowej:

$$[\bar{v}_j] = \left[\frac{\sum_{i=1}^1 v_i n_{ij}}{n_{.j}} \right], \quad j=1,2,\dots,r \quad (3.10)$$

Masę wszystkich ziarn w próbce można obliczyć na kilka równoważnych sposobów:

- jako sumę mas wszystkich frakcji:

$$m = \sum_{j=1}^r m_{.j} = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^1 m_{ij}, \quad (3.11)$$

- jako sumę mas wszystkich klas ziarnowych:

$$m = \sum_{i=1}^l m_i = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^r m_{ij}, \quad (3.12)$$

- jako masę liczby n ziarn o pewnej średniej gęstości $\bar{\delta}$ i objętości średniej $\bar{V}$:

$$m = \bar{V} \bar{\delta} n \quad (3.13)$$

Jeśli średnie gęstości ziarn w poszczególnych klasach ziarnowych są jednakowe i równe średniej gęstości ziarn w próbce:

$$\bar{\delta}_i = \bar{\delta}, \text{ dla } i=1, 2, \dots, l, \quad (3.14)$$

to średnią objętość ziarn w próbce można wyznaczyć przez porównanie wyrażeń (3.12) i (3.13) i uwzględnienie (3.5):

$$\bar{V} = \frac{\sum_{i=1}^l V_i n_i}{n} \quad (3.15)$$

Natomiast, jeśli objętości średnie ziarn w poszczególnych frakcjach gęstościowych są takie same i równe średniej objętości ziarn w próbce:

$$\bar{V}_j = \bar{V}, \text{ dla } j=1, 2, \dots, r, \quad (3.16)$$

to przez porównanie wyrażeń (3.11) i (3.13) i po uwzględnieniu wzoru (3.8) otrzymuje się zależność na średnią gęstość ziarn w próbce:

$$\bar{\delta} = \frac{\sum_{j=1}^r \bar{\delta}_j n_{.j}}{n}, \quad (3.17)$$

przy czym $n_{.j}$ oznacza liczbę ziarn należących do j -tej frakcji i dowolnej klasy ziarnowej:

$$[n_{.j}] = \left[\sum_{i=1}^l n_{ij} \right], \quad j=1, 2, \dots, r \quad (3.18)$$

3.2. WYCHODY KLAS ZIARNOWYCH I FRAKCJI GĘSTOŚCIOWYCH

Wychód (udział wagowy) ziarn należących jednocześnie do j -tej frakcji gęstościowej oraz i -tej klasy ziarnowej, wyrażony ilorazem masy tych ziarn przez masę całej próbki:

$$[\gamma_{ij}] = \left[\frac{m_{ij}}{m} \right], \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,l \\ j=1,2,\dots,r \end{matrix} \quad (3.19)$$

po uwzględnieniu wzorów (3.1), (3.11)-(3.13) wynosi:

$$[\gamma_{ij}] = \left[\frac{\frac{v_i \delta_j n_{ij}}{\sum_{i=1}^l v_i \sum_{j=1}^r \delta_j n_{ij}}}{\frac{v_i \delta_j n_{ij}}{\bar{v} \bar{\delta} \bar{n}}} \right], \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,l; \\ j=1,2,\dots,r. \end{matrix} \quad (3.20)$$

Tak określone wychody elementarnych frakcji tworzą macierz $[\gamma_{ij}]$ o l wierszach i r kolumnach. Z bilansu masy ziarn w próbce wynika zależność:

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^r \gamma_{ij} = 1 \quad (3.21)$$

Charakterystyka granulometryczna danego materiału określa udziały masowe lub procentowe ziarn o różnych wymiarach.

W pobranej próbce o masie m wychody poszczególnych klas ziarnowych wynoszą:

$$[\gamma_{i.}] = \left[\frac{m_{i.}}{m} \right], \quad i=1,2,\dots,l \quad (3.22)$$

przy czym

$$\sum_{i=1}^l \gamma_{i.} = 1.$$

Po podstawieniu do wzoru (3.22) zależności: (3.3), (3.5), (3.12), (3.13) otrzymujemy:

$$[\gamma_{i.}] = \left[\frac{\frac{v_i \sum_{j=1}^r \delta_{ij} n_{ij}}{1}{r}}{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r v_i \delta_{ij} n_{ij}} \right] = \left[\frac{v_i \bar{\delta}_{i.} n_{i.}}{\bar{v} \bar{\delta} n} \right], i=1,2,\dots,1 \quad (3.23)$$

Jeśli zachodzi przypadek (3.14), to wzór (3.23) upraszcza się do postaci:

$$[\gamma_{i.}] = \left[\frac{v_i n_{i.}}{\bar{v} n} \right], i=1,2,\dots,1 \quad (3.24)$$

Charakterystyka densymetryczna określa udziały masowe lub procentowe poszczególnych frakcji gęstościowych.

Wychód j-tej frakcji odniesiony do masy całej próbki

$$[\gamma_{.j}] = \left[\frac{m_{.j}}{m} \right], j=1,2,\dots,r \quad (3.25)$$

obliczymy, podstawiając do wzoru (3.25) zależności (3.4), (3.8) i (3.13):

$$[\gamma_{.j}] = \left[\frac{\frac{\sum_{i=1}^r v_i \delta_{ij} n_{ij}}{1}{r}}{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r v_i \delta_{ij} n_{ij}} \right] = \left[\frac{\bar{v}_{.j} \delta_{.j} n_{.j}}{\bar{v} \bar{\delta} n} \right], j=1,2,\dots,r. \quad (3.26)$$

Jeśli ma miejsce przypadek (3.16), to wzór (3.26) przyjmuje postać:

$$[\gamma_{.j}] = \left[\frac{\delta_{.j} n_{.j}}{\bar{\delta} n} \right], j=1,2,\dots,r. \quad (3.27)$$

Wychód j-tej frakcji odniesiony do masy ziarn i-tej klasy

$$[\gamma_{j/i}] = \left[\frac{m_{ij}}{m_i} \right], i=1,2,\dots,l; j=1,2,\dots,r \quad (3.28)$$

można wyznaczyć, podstawiając do wzoru (3.28) wyrażenia (3.1) i (3.3):

$$[\gamma_{j/i}] = \left[\frac{\frac{v_i \delta_{ijn_{ij}}}{r}}{\sum_{j=1}^r v_i \delta_{ijn_{ij}}} \right] = \left[\frac{\frac{\delta_{ijn_{ij}}}{r}}{\sum_{j=1}^r \delta_{ijn_{ij}}} \right], i=1,2,\dots,l; j=1,2,\dots,r \quad (3.29)$$

Po uwzględnieniu wzoru (3.7) mamy:

$$[\gamma_{j/i}] = \left[\frac{\delta_{ijn_{ij}}}{\delta_i n_{i1}} \right], i=1,2,\dots,l; j=1,2,\dots,r \quad (3.30)$$

Dla określonych powyżej wychodów frakcji gęstościowych, opisujących charakterystykę densymetryczną materiału spełnione są, na podstawie bilansu masy ziarn, zależności:

$$\sum_{j=1}^r \gamma_{.j} = 1$$

oraz

$$\sum_{j=1}^r \gamma_{j/i} = 1, \quad \text{dla } i=1,2,\dots,l.$$

3.3. ZAWARTOŚĆ POPIOŁU W PRÓBCE WĘGLA

Zawartość popiołu jest wynikiem istnienia substancji niepalnej w danej masie węgla. Załóżmy, że zawartość substancji niepalnej w elementarnej frakcji ziarn o średniej gęstości δ_j i objętości średniej v_1 jest spowodowana obecnością pewnej liczby k_{ij} ziarn skały płonnej o gęstości δ_p i objętości v_1 . Gęstość skały jest znacznie większa niż gęstość substancji

węglowej. Podobnie jak dla ziarn substancji węglowej (ustęp 3.1) możemy wyrazić masę ziarn substancji niepalnej:

- w elementarnej frakcji

$$[m_{\alpha,ij}] = \left[v_i \delta_p k_{ij} \right], \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,1 \\ j=1,2,\dots,r \end{matrix} \quad (3.31)$$

- w i-tej klasie ziarnowej

$$[m_{\alpha,i.}] = \left[\sum_{j=1}^r m_{\alpha,ij} \right] = \left[v_i \delta_p k_{i.} \right], \quad i=1,2,\dots,1 \quad (3.32)$$

- w całej próbce

$$m_{\alpha} = \sum_{i=1}^1 m_{\alpha,i.} = \delta_p \sum_{i=1}^1 v_i k_{i.} = \delta_p \bar{v}_p k \quad (3.33)$$

gdzie:

k_{ij} , $k_{i.}$, k -odpowiednio: liczby ziarn skały płonnej, które znalazły się wśród ziarn j-tej frakcji gęstościowej i-tej klasy ziarnowej; w i-tej klasie ziarnowej; w próbce.

Liczby ziarn skały spełniają zależności:

$$[k_{i.}] = \left[\sum_{j=1}^r k_{ij} \right], \quad i=1,2,\dots,1 \quad k = \sum_{i=1}^1 k_{i.} \quad (3.34)$$

$\bar{v}_p$ - średnia objętość ziarn skały w próbce:

$$\bar{v}_p = \frac{\sum_{i=1}^1 v_i k_{i.}}{\sum_{i=1}^1 k_{i.}} \quad (3.35)$$

Zawartości popiołu w elementarnej frakcji ziarn, w klasie ziarnowej lub w próbce wyznacza się jako następujące ilorazy mas:

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{m_{\alpha_{ij}}}{m_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_i \delta p_{k_{ij}}}{v_i \delta_j n_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta p_{k_{ij}}}{\delta_j n_{ij}} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,l \\ j=1,2,\dots,r \end{matrix} \quad (3.36)$$

$$[\alpha_{i.}] = \begin{bmatrix} \frac{m_{\alpha_{i.}}}{m_{i.}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_i \delta p_{k_{i.}}}{v_i \bar{\delta}_i n_{i.}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta p_{k_{i.}}}{\bar{\delta}_i n_{i.}} \end{bmatrix} \quad i=1,2,\dots,l \quad (3.37)$$

$$\alpha = \frac{m_{\alpha}}{m} = \frac{\bar{v} \delta p_k}{\bar{v} \bar{\delta} n} \quad (3.38)$$

3.4. POSTAĆ OGÓLNA ZAWARTOŚCI WYBRANEGO SKŁADNIKA W PRÓBCE WĘGLA

Przedstawione w punktach 3.2 i 3.3 wzory na wychody frakcji gęstościowych, klas ziarnowych i zawartość popiołu, stanowiące ilorazy masy wybranych ziarn przez masę ziarn populacji odniesienia, można przedstawić w postaci ogólnej jako udział masowy wybranego składnika:

$$\nu = a \frac{K}{N} \quad (3.39)$$

gdzie:

- ν - udział masowy wybranego składnika,
- K - liczba ziarn wybranego składnika,
- N - liczba ziarn populacji odniesienia,
- a - współczynnik zależny od wymiarów i gęstości ziarn.

Zależność (3.39) wiąże wychód masowy badanej frakcji z liczbą zawartych w niej ziarn i liczebnością populacji odniesienia. W literaturze [47] iloraz liczby ziarn K/N nosi nazwę "wychodu ilościowego" lub "zawartości ilościowej".

Dla macierzy wychodów elementarnych frakcji $[\nu_{ij}]$, określonej wzorem (3.20), współczynniki a tworzą macierz:

$$[a_{ij}] = \left[\frac{v_i \delta_j}{\bar{v} \bar{\delta}} \right], \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,1 \\ j=1,2,\dots,r \end{matrix} \quad (3.40)$$

Dla wektora kolumnowego wychodów klas ziarnowych $[v_i]$, na podstawie wzoru (3.23), wektor współczynników a jest równy:

$$[a_i] = \left[\frac{v_i \bar{\delta}_i}{\bar{v} \bar{\delta}} \right], \quad i=1,2,\dots,1 \quad (3.41)$$

lub w przypadku szczególnym, gdy $\bar{\delta} = \bar{\delta}_i$, w myśl (3.24):

$$[a_i] = \left[\frac{v_i}{\bar{v}} \right], \quad i=1,2,\dots,1 \quad (3.42)$$

Dla wektora wychodów frakcji gęstościowych $[v_j]$, liczonych względem masy całej próbki (wzór 3.26), współczynniki a_j wynoszą:

$$[a_j] = \left[\frac{\bar{v}_j \delta_j}{\bar{v} \bar{\delta}} \right], \quad j=1,2,\dots,r \quad (3.43)$$

a gdy $\bar{v}_j = \bar{v}$, to:

$$[a_j] = \left[\frac{\delta_j}{\bar{\delta}} \right], \quad j=1,2,\dots,r \quad (3.44)$$

Jeśli wychody frakcji gęstościowych liczy się względem masy ziarn danej klasy, to w myśl wzoru (3.30) współczynniki a oblicza się następująco:

$$[a_{j/i}] = \left[\frac{\delta_j}{\bar{\delta}_i} \right], \quad \begin{matrix} j=1,2,\dots,r \\ i=1,2,\dots,1 \end{matrix} \quad (3.45)$$

Podobnie, zależności przedstawiające ilorazy masy substancji niepalnej przez masę ziarn populacji odniesienia można wyrazić poprzez ilorazy odpowiednich ilości ziarn i pewnych

współczynników proporcjonalności, zależnych od gęstości i objętości ziarn:

$$\left[\alpha_{ij} \right] = \left[b_{ij} \frac{k_{ij}}{n_{ij}} \right], \quad (3.46)$$

gdzie:

$$\left[b_{ij} \right] = \left[\frac{\delta_{ij}}{\delta_j} \right], \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,l \\ j=1,2,\dots,r \end{matrix} \quad (3.46a)$$

$$\left[\alpha_{i.} \right] = \left[b_{i.} \frac{k_{i.}}{n_{i.}} \right], \quad (3.47)$$

gdzie:

$$\left[b_{i.} \right] = \left[\frac{\delta_{i.}}{\delta_1} \right], \quad i=1,2,\dots,l \quad (3.47a)$$

$$\alpha = b \frac{k}{n}, \quad (3.48)$$

gdzie:

$$b = \frac{\bar{v} \delta_{i.}}{\bar{v} \delta} \quad (3.48a)$$

Występujące w powyższych wzorach ilorazy liczby ziarn określają częstość występowania określonego typu ziarna w pewnej populacji próbnej (w próbce) i stanowią estymatory prawdopodobieństwa wylosowania pojedynczego ziarna danego typu z populacji generalnej podlegającej opróbowaniu:

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n} \quad - \text{estymator prawdopodobieństwa wylosowania ziarna należącego jednocześnie do } i\text{-tej klasy i } j\text{-tej frakcji gęstościowej,}$$

$p_{i.} = \frac{n_{i.}}{n}$ - estymator prawdopodobieństwa wylosowania ziarna należącego do i-tej klasy,

$p_{.j} = \frac{n_{.j}}{n}$ - estymator prawdopodobieństwa wylosowania ziarna należącego do j-tej frakcji,

$p_{j/i} = \frac{n_{ij}}{n_{i.}}$ - estymator prawdopodobieństwa wylosowania ziarna należącego do j-tej frakcji spośród ziarn i-tej klasy,

$p_{\alpha ij} = \frac{k_{ij}}{n_{ij}}$ - estymator prawdopodobieństwa wylosowania ziarna skały płonnej spośród ziarn należących do i-tej klasy i j-tej frakcji,

$p_{\alpha i.} = \frac{k_{i.}}{n_{i.}}$ - estymator prawdopodobieństwa wylosowania ziarna skały płonnej spośród ziarn należących do i-tej klasy ziarnowej,

$p_{\alpha} = \frac{k}{n}$ - estymator prawdopodobieństwa wylosowania ziarna skały.

Na mocy twierdzenia Bernoulliego estymatory próbkowe są zbieżne do odpowiednich prawdopodobieństw sukcesu w doświadczeniach niezależnych [12], [33], [57], jeśli tylko liczba doświadczeń jest odpowiednio duża, a więc gdy liczba ziarn występująca w mianowniku każdego z estymatorów jest odpowiednio duża.

3.5. PRZYKŁAD

Próbka węgla surowego o masie $m = 581\text{kg}$ posłużyła do określenia charakterystyki densymetrycznej i ziarnowej materiału. Analizy sitową i densymetryczną wykonano w laboratorium zakładu przerobczego. Wyniki analiz przedstawiono w tablicach 3.1 i 3.2.

Przyjmując, że jest to średnia charakterystyka materiału, na podstawie bilansu masy ziarn w próbce obliczono wartości prawdopodobieństw p_{ij} , jako ilorazy ilości ziarn n_{ij}/n . Stanowią one estymatory prawdopodobieństwa wylosowania pojedynczego ziarna o średnicy d_i i gęstości δ_j z populacji węgla, z której pobrano próbki.

W klasie ziarnowej powyżej 200 mm przyjęto jako wartość średnią średnicę ziarn $d_1 = 220 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, a pozostałe średnice w połowie przedziału każdej klasy. Objętość ziarn w poszczególnych klasach obliczano ze wzoru:

$$V_i = 0,5 d_i^3 \quad (3.49)$$

co oznacza, że wyliczona średnia objętość ziarn w danej klasie jest nieco mniejsza od objętości kuli o takiej samej średnicy.

Dla frakcji gęstościowej poniżej 1300 kg/m^3 przyjęto średnią gęstość równą $\delta_1 = 1250 \text{ kg/m}^3$, a dla frakcji najcięższej przyjęto $\delta_9 = 2200 \text{ kg/m}^3$.

Wyniki obliczeń przedstawiają tablice 3.3 - 3.7 i rys.3.1.

Tablica 3.1

Wychody klas ziarnowych

Nr klasy	Średnica ziarn	Objętość ziarn	Masa frakcji	Wychód frakcji
i	d_i ; m	V_i ; m^3	m_i ; kg	γ_i ; %
1	$> 200 \cdot 10^{-3}$	$5,324 \cdot 10^{-3}$	58,1	10,00
2	$(200-80) \cdot 10^{-3}$	$1,372 \cdot 10^{-3}$	52,3	9,00
3	$(80-50) \cdot 10^{-3}$	$1,373 \cdot 10^{-4}$	69,1	11,89
4	$(50-30) \cdot 10^{-3}$	$0,320 \cdot 10^{-4}$	68,0	11,70
5	$(30-20) \cdot 10^{-3}$	$7,812 \cdot 10^{-6}$	68,0	11,70
6	$(20-10) \cdot 10^{-3}$	$1,687 \cdot 10^{-6}$	265,5	45,69

Tablica 3.2

Wychody frakcji gęstościowych w poszczególnych
klasach ziarnowych

Nr frakcji	Gęstość ziarn	Wychody γ_j /i ; %					
j	δ_j ; kg/m ³	$\gamma_{j/1}$	$\gamma_{j/2}$	$\gamma_{j/3}$	$\gamma_{j/4}$	$\gamma_{j/5}$	$\gamma_{j/6}$
1	< 1,3 10 ³	49,9	52,6	54,3	51,3	52,4	59,3
2	(1,3-1,4) 10 ³	4,7	4,9	5,7	4,9	5,2	4,9
3	(1,4-1,5) 10 ³	5,0	5,2	4,9	3,6	3,3	9,3
4	(1,5-1,6) 10 ³	4,5	4,6	3,8	5,2	4,4	2,9
5	(1,6-1,7) 10 ³	1,3	3,0	2,7	1,9	2,9	1,8
6	(1,7-1,8) 10 ³	0,7	2,7	2,6	2,7	3,9	1,9
7	(1,8-1,9) 10 ³	1,2	0,9	2,7	3,3	2,0	0,5
8	(1,9-2,0) 10 ³	7,6	2,1	2,0	2,4	2,7	2,5
9	> 2,0 10 ³	25,1	24,0	21,3	24,7	23,2	16,9

Tablica 3.3

Obliczone ilości ziarn w poszczególnych frakcjach

$j \backslash i$	n_{ij}					
	1	2	3	4	5	6
1	4,35	16,04	218,60	872	3654,56	75351
2	< 1	1,38	21,2	76,85	335,80	5736
3	< 1	1,36	16,97	52,80	198,40	10136
4	< 1	1,28	12,3	71,16	247,48	2956
5	< 1	0,69	8,21	24,43	153,22	1724
6	< 1	< 1	7,45	32,68	194,28	1716
7	< 1	< 1	7,32	37,84	94,25	427
8	< 1	< 1	5,15	26,12	120,71	2026
9	1,24	4,1	48,69	238,49	919,35	12140

$n = 119941$

Tablica 3.4

Wartości prawdopodobieństw p_{ij} .

$j \backslash i$	P_{ij}					
	1	2	3	4	5	6
1	$3,60 \cdot 10^{-5}$	$1,34 \cdot 10^{-4}$	$1,82 \cdot 10^{-3}$	$7,27 \cdot 10^{-3}$	0,03	0,62830
2		$1,15 \cdot 10^{-5}$	$1,76 \cdot 10^{-4}$	$6,40 \cdot 10^{-4}$	$2,80 \cdot 10^{-3}$	0,04780
3		$1,13 \cdot 10^{-5}$	$1,40 \cdot 10^{-4}$	$4,40 \cdot 10^{-4}$	$1,65 \cdot 10^{-3}$	0,08450
4		$1,00 \cdot 10^{-5}$	$1,02 \cdot 10^{-4}$	$5,90 \cdot 10^{-4}$	$2,06 \cdot 10^{-3}$	0,02460
5		$5,75 \cdot 10^{-5}$	$6,84 \cdot 10^{-5}$	$2,00 \cdot 10^{-4}$	$1,27 \cdot 10^{-3}$	0,01437
6			$6,20 \cdot 10^{-5}$	$2,70 \cdot 10^{-4}$	$0,16 \cdot 10^{-2}$	0,01431
7			$6,10 \cdot 10^{-5}$	$3,10 \cdot 10^{-4}$	$0,78 \cdot 10^{-3}$	0,00360
8			$4,29 \cdot 10^{-5}$	$2,17 \cdot 10^{-4}$	$1,00 \cdot 10^{-3}$	0,01690
9	$1,00 \cdot 10^{-5}$	$3,40 \cdot 10^{-5}$	$4,05 \cdot 10^{-4}$	$1,98 \cdot 10^{-3}$	$7,66 \cdot 10^{-3}$	0,10120

Tablica 3.5

Wartości prawdopodobieństw warunkowych $p_{j/1}$

j	$P_{j/1}$	$P_{j/2}$	$P_{j/3}$	$P_{j/4}$	$P_{j/5}$	$P_{j/6}$
1	0,6322	0,6533	0,6319	0,6088	0,617	0,671
2		0,0562	0,0613	0,0536	0,057	0,051
3		0,0554	0,0491	0,0368	0,033	0,090
4		0,0521	0,0355	0,0497	0,042	0,026
5		0,0281	0,0237	0,0170	0,026	0,015
6			0,0215	0,0228	0,033	0,015
7			0,0212	0,0264	0,016	0,004
8			0,0149	0,0182	0,020	0,018
9	0,1802	0,1670	0,1408	0,1665	0,155	0,108

Tablica 3.6

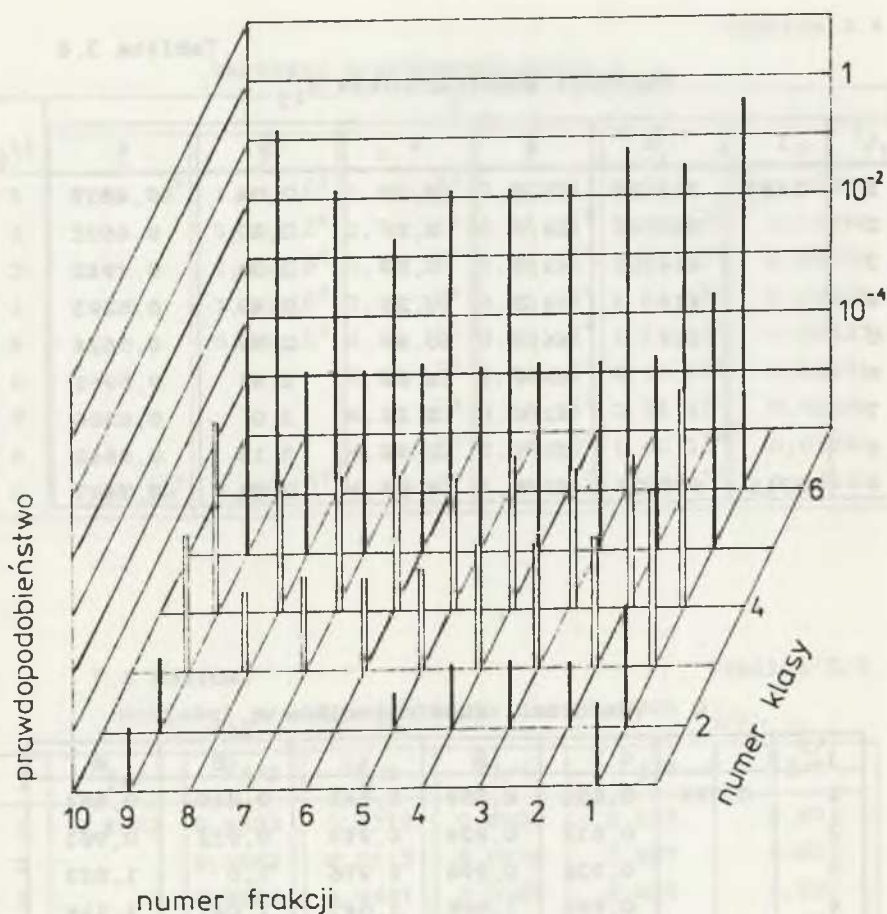
Wartości współczynników a_{ij}

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	1497	353,28	35,5	8,25	2,04	0,4237
2		383,48	38,5	8,96	2,17	0,4602
3		414,16	41,6	9,57	2,34	0,4942
4		414	44,3	10,26	2,49	0,5293
5		469	46,9	10,95	2,67	0,5624
6			49,9	11,61	2,81	0,5961
7			52,6	12,26	3,0	0,6306
8			55,5	12,94	3,16	0,6642
9	2711	635,29	62,6	14,59	3,54	0,7497

Tablica 3.7

Wartości współczynników $a_{j/i}$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	0,789	0,805	0,859	0,842	0,849	0,884
2		0,872	0,929	0,913	0,912	0,961
3		0,938	0,998	0,976	1,0	1,033
4		0,882	1,068	1,047	1,047	1,115
5		1,06	1,139	1,114	1,115	1,200
6			1,209	1,183	1,182	1,266
7			1,276	1,249	1,250	1,250
8			1,343	1,316	1,350	1,388
9	1,393	1,437	1,705	1,483	1,496	1,565



Rys.3.1. Wartości p_{ij} prawdopodobieństw wylosowania pojedyn-
czego ziarna o objętości V_1 i gęstości δ_j spośród
ziarn węgla pobranych do próbki (tab.3.4)

Fig.3.1. Probabilities p_{ij} of drawing a single grain of the
volume V_1 and the density δ_j from a coal sample
(tab.3.4)

4. INTERPRETACJA PROBABILISTYCZNA PODSTAWOWYCH CHARAKTERYSTYK W PRÓBCE WĘGLA

4.1. UWAGI OGÓLNE

W pracy niniejszej często będzie używane pojęcie "prawdopodobieństwa" w odniesieniu do częstości występowania pewnych cech węgla. W zależności od typu doświadczenia, występujące cechy węgla będą traktowane jako zdarzenia losowe, zmienne losowe lub procesy stochastyczne. Zatem niezbędne jest dla ścisłości rozważań ustalenie, jakimi kategoriami pojęć operujemy przy analizie określonego typu doświadczenia, a nawet zdefiniowanie pewnych pojęć podstawowych.

4.2. PRÓBKI JEDNOELEMENTOWE. INTERPRETACJA W KATEGORIACH ZDARZEŃ ELEMENTARNYCH

Z procesem opróbowania nieodłącznie wiąże się pojęcie losowości. Dowolna zbiorowość ziarn węgla jest materiałem różnorodnym pod względem swoich cech fizycznych. Pobranie pojedynczego ziarna w celu określenia jego właściwości fizycznych będzie nazywane doświadczeniem losowym. Każdy wynik doświadczenia losowego stanowi zdarzenie elementarne ω . Zgodnie z przyjętym w punkcie 3.1 założeniem, wynik doświadczenia losowego jest określony parą liczb rzeczywistych: objętością ziarna V_i oraz jego gęstością δ_j :

$$\{ \omega : (V_i, \delta_j) , V_i \in A_i , \delta_j \in B_j \} \quad (4.1)$$

gdzie:

A_i - zbiór wartości V_i , właściwy dla danej klasy ziarnowej;

zbiory A_i , $i=1,2,\dots,l$ dla różnych wskaźników i są parami rozłączne oraz

$$\bigcup_{i=1}^l A_i = I_A \quad (4.2)$$

B_j - zbiór wartości δ_j , właściwy dla przyjętej frakcji gęstościowej; zbiory B_j , $j=1,2,\dots,r$ są dla różnych j parami rozłączne oraz

$$\bigcup_{j=1}^r B_j = I_B \quad (4.3)$$

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych ω tworzy przestrzeń Ω , która jest iloczynem kartezjańskim określonym na przestrzeniach I_A oraz I_B :

$$\Omega = I_A \times I_B \quad (4.4)$$

W przestrzeni Ω zawierają się wszystkie podzbiory o postaci $A_i \times B_j$ oraz ich sumy i iloczyny, a także zbiór pusty $\emptyset$.

Przy wielokrotnym losowaniu pojedynczych ziarn wyniki doświadczeń można zapisać w postaci macierzy $[n_{ij}]$, $i=1,2,\dots,l$; $j=1,2,\dots,r$. Element n_{ij} oznacza liczbę wylosowanych ziarn o objętości $V_i \in A_i$ oraz gęstości $\delta_j \in B_j$, podaje więc, ile razy wystąpiło zdarzenie elementarne ω :

$n_{11} \quad \dots \quad n_{1j} \quad \dots \quad n_{1r}$	$n_{1.} = \sum_j n_{1j}$	(4.5)
$-----$	$-----$	
$n_{i1} \quad \dots \quad n_{ij} \quad \dots \quad n_{ir}$	$n_{i.} = \sum_j n_{ij}$	
$-----$	$-----$	
$n_{l1} \quad \dots \quad n_{lj} \quad \dots \quad n_{lr}$	$n_{l.} = \sum_j n_{lj}$	
$n_{.1} = \sum_i n_{i1} \quad \dots \quad n_{.j} = \sum_i n_{ij} \quad \dots \quad n_{.r} = \sum_i n_{ir}$		

$$n = \sum_{i=1}^l n_{i.} = \sum_{j=1}^r n_{.j} \quad (4.6)$$

Wektor kolumnowy $[n_{i.}]$, $i=1,2,\dots,l$ przedstawia liczbę zdarzeń typu:

$$\begin{aligned} \{ \omega : (v_i, \delta_j) , v_i \in A_i , \delta_j \in \bigcup_{j=1}^r B_j \} = \\ = \{ \omega : (v_i, \delta_j) , v_i \in A_i , \delta_j \in I_B \} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Wektor wierszowy $[n_{.j}]$, $j=1,2,\dots,r$ przedstawia liczbę zdarzeń typu:

$$\begin{aligned} \{ \omega : (v_i, \delta_j) , v_i \in \bigcup_{i=1}^l A_i , \delta_j \in B_j \} = \\ = \{ \omega : (v_i, \delta_j) , v_i \in I_A , \delta_j \in B_j \} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Miarą częstości powtarzających się wyników zdarzeń elementarnych jest iloraz n_{ij}/n , gdzie n oznacza liczbę losowań po jednym ziarnie. Iloraz ten wyraża prawdopodobieństwo p_{ij} zdarzenia elementarnego (4.1), określone na iloczynie kartezjańskim zbiorów A_i oraz B_j :

$$[p_{ij}] = \left[\frac{n_{ij}}{n} \right] = [P(A_i \times B_j)], \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,l \\ j=1,2,\dots,r \end{matrix} \quad (4.9)$$

Tak określone prawdopodobieństwo spełnia postulaty miary μ :

- 1) $\mu(Z) \geq 0$; $\mu(Z)=0$, jeśli Z jest zbiorem pustym,
- 2) $\mu(Z_1 \cup Z_2) = \mu(Z_1) + \mu(Z_2)$, jeśli Z_1 i Z_2 są zdarzeniami rozłącznymi,
- 3) $\mu(\Omega) = 1$.

Wyrażenie (4.9) określa prawdopodobieństwo wylosowania w n próbach ziarna o własnościach $v_i \in A_i$, $\delta_j \in B_j$ i jest estymatorem prawdopodobieństwa wylosowania ziarna o takich własnościach spośród ziarn populacji ogólnej podlegającej opróbowaniu.

Aby wyznaczyć prawdopodobieństwo $p_{i.}$ wylosowania ziarna o objętości V_i i dowolnej gęstości $\delta_j \in I_B$, czyli:

$$\left[p_{i.} \right] = \left[P(A_i \times I_B) \right] = \left[\sum_{j=1}^r P(A_i \times B_j) \right], \quad i=1,2,\dots,l \quad (4.10)$$

korzystamy z wyników doświadczenia:

$$\left[p_{i.} \right] = \left[\frac{n_{i.}}{n} \right] = \left[\frac{\sum_{j=1}^r n_{ij}}{n} \right] = \left[\sum_{j=1}^r p_{ij} \right], \quad i=1,2,\dots,l \quad (4.11)$$

Prawdopodobieństwo $p_{.j}$ zdarzenia (4.8), wylosowania spośród ziarn populacji ogólnej ziarna o gęstości $\delta_j \in B_j$ i dowolnej objętości $V_i \in I_A$, czyli:

$$\left[p_{.j} \right] = \left[P(I_A \times B_j) \right] = \left[\sum_{i=1}^l P(A_i \times B_j) \right], \quad j=1,2,\dots,r \quad (4.12)$$

wyznamy z wyników doświadczenia:

$$\left[p_{.j} \right] = \left[\frac{n_{.j}}{n} \right] = \left[\frac{\sum_{i=1}^l n_{ij}}{n} \right] = \left[\sum_{i=1}^l p_{ij} \right], \quad j=1,2,\dots,r \quad (4.13)$$

Prawdopodobieństwo warunkowe $p_{j/i}$ zdarzenia polegającego na tym, że spośród ziarn o objętości $V_i \in A_i$ wylosowane ziarno ma gęstość $\delta_j \in B_j$, wynosi:

$$\left[p_{j/i} \right] = \left[P(B_j/A_i) \right] = \left[\frac{P(A_i \times B_j)}{P(A_i)} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c} p_{ij} \\ p_{.i} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \frac{n_{ij}}{n_{i.}} \end{array} \right], \quad \begin{array}{l} i=\text{const} \\ j=1,2,\dots,r \end{array} \quad (4.14)$$

4.3. PRÓBKI WIELOELEMENTOWE. CECHY ZIARN WĘGLA W PRÓBCE JAKO ZMIENNE LOSOWE

W badaniach przeróbczych rzadko pobiera się próbki jednoelementowe. Na ogół pobierane są próbki o ściśle określonej masie [36], [37], [47], [55], [24], [6], zawierające wiele ziarn. Cechy ziarn, takie jak objętość (średnica) i gęstość nie są bezpośrednio mierzone dla każdego ziarna w próbce. Wynikiem pojedynczego doświadczenia są udziały wagowe (wychody) określonych frakcji gęstościowych i ziarnowych w próbce węgla.

Można łatwo wykazać, że wychód badanego składnika, wyrażony ilorazem masy ziarn badanego składnika przez masę ziarn populacji odniesienia może być interpretowany jako prawdopodobieństwo występowania określonej cechy w badanej populacji ziarn węgla.

Biorąc pod uwagę wyprowadzone w rozdziale 3 zależności wiążące udziały masowe frakcji gęstościowych i ziarnowych, spełniające bilans masy ziarn w próbce oraz własności funkcji rozkładu prawdopodobieństwa, można twierdzić, że charakterystyka granulometryczna, określająca wychody poszczególnych klas ziarnowych w próbce (3.22)-(3.24) może być uważana za empiryczny rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej D (średnicy ziarn) w próbce. Jeśli bowiem wyrażenie:

$$P(d_{i\min} \leq D < d_{i\max}) = \frac{m_{i.}}{m} = \gamma_i. \quad (4.15)$$

określa prawdopodobieństwo, że średnice ziarn zawartych w próbce przyjmą wartości z i -tego przedziału $[d_{i\min}, d_{i\max})$, to dystrybuenta $F_D(d_s)$ jest określona za pomocą tzw. sumarycznego wychodu klas ziarnowych:

$$F_D(d_s) = P(D < d_s) = \sum_{d_{imax} \leq d_s} P(d_{imin} \leq D < d_{imax}) =$$

$$= \sum_{i=1}^s \frac{m_i}{m} \quad (4.16)$$

Funkcja $F_D()$ określona wzorem (4.16) jest niemalejąca, a dla całego zakresu zmienności D jest spełniona równość:

$$\sum_{i=1}^1 P(d_{imin} \leq D < d_{imax}) = 1 \quad (4.17)$$

ponieważ:

$$\sum_{i=1}^1 \gamma_i = 1.$$

Podobnie, charakterystyka densymetryczna przedstawiona zależnościami (3.25)-(3.27), określająca udziały poszczególnych frakcji ziarn o różnych gęstościach, może być uważana za empiryczny rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Δ (gęstości ziarn) w próbce.

Jeśli przyjmiemy, że wychody frakcji gęstościowych γ_j , $j=1,2,\dots,r$ liczone względem masy całej próbki określają prawdopodobieństwo, że zmienna losowa Δ przyjmuje wartości z przedziału $(\delta_{jmin}, \delta_{jmax})$, $j=1,2,\dots,r$, co można zapisać następująco:

$$P(\delta_{jmin} \leq \Delta < \delta_{jmax}) = \frac{m_j}{m} = \gamma_j \quad (4.18)$$

to dystrybuantę rozkładu zmiennej losowej Δ określa suma:

$$F_\Delta(\delta_z) = P(\Delta < \delta_z) = \sum_{\delta_{jmax} < \delta_z} P(\delta_{jmin} \leq \Delta < \delta_{jmax}) =$$

$$= \sum_{j=1}^z \frac{m_j}{m} \quad (4.19)$$

Dla całego zakresu zmian gęstości ziarn zachodzi równość:

$$\sum_{j=1}^r P(\delta_{j \min} \leq \Delta < \delta_{j \max}) = 1 \quad (4.20)$$

ponieważ:

$$\sum_{j=1}^r \gamma_{.j} = 1.$$

Rozszerzając powyższe rozważania na przypadek zmiennej losowej dwuwymiarowej (D, Δ) , można przyjąć, że wychód γ_{ij} j-tej frakcji gęstościowej w i-tej klasie ziarnowej jest prawdopodobieństwem następującego zdarzenia jednoczesnego:

$$P(d_{i \min} \leq D < d_{i \max}, \delta_{j \min} \leq \Delta < \delta_{j \max}) = \frac{m_{ij}}{m} = \gamma_{ij} \quad (4.21)$$

oraz dla $i=1, 2, \dots, l$, $j=1, 2, \dots, r$ jest empirycznym rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej dwuwymiarowej (D, Δ) , której dystrybuenta wynosi:

$$F_{D\Delta}(d_s, \delta_z) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^r \frac{m_{ij}}{m} \quad (4.22)$$

przy czym, w myśl (3.11) i (3.12):

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^r \frac{m_{ij}}{m} = 1.$$

W świetle wprowadzonej zmiennej losowej dwuwymiarowej rozkład (4.16) średnicy ziarn i rozkład (4.19) gęstości ziarn są rozkładami brzegowymi. Spełnione są następujące zależności dla rozkładów brzegowych, na mocy relacji pomiędzy wychodami elementarnymi γ_{ij} a wychodami sumarycznymi $\gamma_{i.}$ oraz $\gamma_{.j}$:

$$P(d_{i \min} \leq D < d_{i \max}) = \sum_{j=1}^r P(d_{i \min} \leq D < d_{i \max}, \delta_{j \min} \leq \Delta < \delta_{j \max}) = \sum_{j=1}^r \gamma_{ij} = \gamma_{i.} \quad (4.23)$$

$$P(\delta_{jmin} \leq \Delta < \delta_{jmax}) = \sum_{i=1}^1 P(d_{imin} \leq D < d_{imax}, \delta_{jmin} \leq \Delta < \delta_{jmax}) =$$

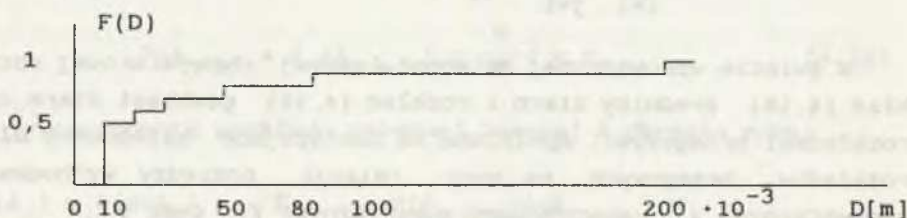
$$\sum_{i=1}^1 \gamma_{ij} = \gamma_{.j} \quad (4.24)$$

Wychody frakcji gęstościowych liczone względem masy ziarn ustalonej klasy ziarnowej $\gamma_{j/i}$, $j=1,2,\dots,r$, $i=\text{const}$, określone za pomocą wzorów (3.28) - (3.30), stanowią rozkład warunkowy:

$$P(\delta_{jmin} \leq \Delta < \delta_{jmax} / d_{imin} \leq D < d_{imax}) = \frac{\gamma_{ij}}{\gamma_{i.}} = \gamma_{j/i} \quad (4.25)$$

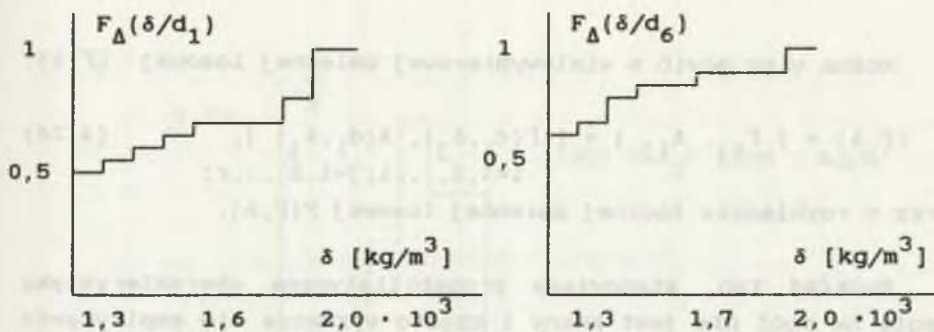
zmiennej losowej Δ , przy ustaleniu, że wartości średnicy ziarn znajdują się w i -tym przedziale.

Przykładowe, empiryczne funkcje rozkładów, wyznaczone na podstawie analiz densymetrycznej i ziarnowej materiału zawartego w próbce uśrednionej o dużej masie, pokazano na rysunkach 4.1 i 4.2.



Rys.4.1. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa średnicy ziarn w próbce węgla

Fig.4.1. Empirical probability distribution of grain diameters in a coal sample



Rys.4.2. Empiryczne warunkowe rozkłady prawdopodobieństwa gęstości ziarn w próbce, w klasach ziarnowych $d_1 > 0,2 \text{ m}$ i $0,01 \text{ m} < d_6 < 0,02 \text{ m}$

Fig.4.2. Empirical conditional probability distributions of grains densities in two size grades of sample: $d_1 > 0,2 \text{ m}$ and $0,01 \text{ m} < d_6 < 0,02 \text{ m}$

4.4. ZAWARTOŚCI FRAKCJI ZIARN JAKO ZMIENNE LOSOWE

Zawartość badanego składnika w próbce materiału - określona ilorazem masy badanego składnika do masy próbki, a interpretowana w rozdziale 4.1 jako estymator prawdopodobieństwa wylosowania pojedynczego ziarna o żądanych własnościach, a w rozdziale 4.2 jako prawdopodobieństwo pewnej cechy ziarn w próbce - jest także zmienną losową. Oznacza to, że jeśli wielokrotnie zostaną pobrane próbki z danej populacji ziarn węgla i dla każdej próbki zostaną wyznaczone wychody poszczególnych klas ziarnowych, frakcji gęstościowych i zawartości popiołu, to wartości te dla danej frakcji gęstościowej i ziarnowej będą na ogół różne w poszczególnych próbkach. Jest to fakt powszechnie obserwowany w laboratoriach zakładów przeróbki mechanicznej węgla.

Można więc mówić o wielowymiarowej zmiennej losowej (Γ, A) :

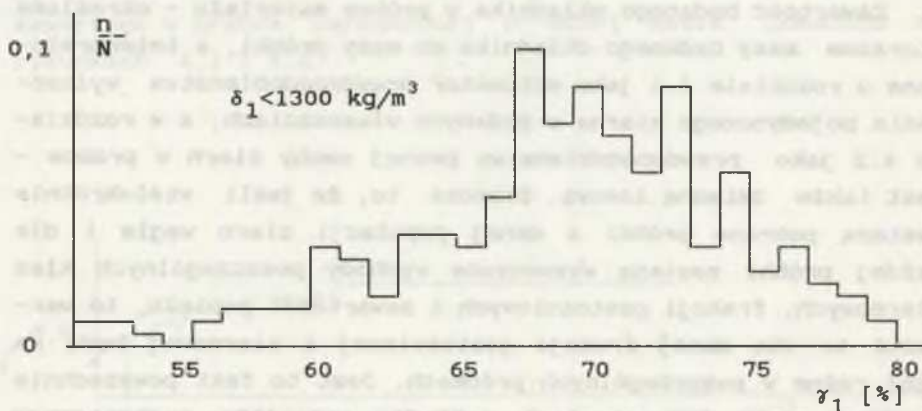
$$(\Gamma, A) = (\Gamma_{ij}, A_{ij}) = [\Gamma(d_i, \delta_j), A(d_i, \delta_j)], \quad (4.26)$$

$$i=1, 2, \dots, l; j=1, 2, \dots, r;$$

oraz o rozkładzie łącznej zmiennej losowej $F(\Gamma, A)$.

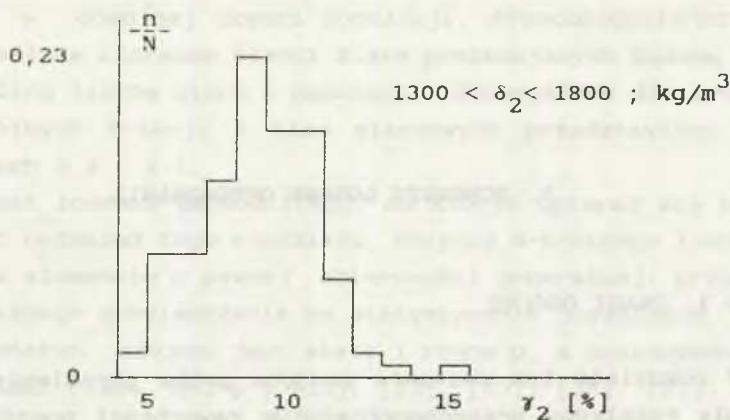
Rozkład ten, stanowiący probabilistyczną charakterystykę węgla na ogół nie jest znany i często wyznacza się empirycznie rozkłady prawdopodobieństwa wychodów poszczególnych frakcji lub pewnych par zmiennych [26], [38], [14], [15], [50], [51], [56]. W badaniach tych miarą prawdopodobieństwa jest częstość pojawiania się wyników pomiarów w pewnym przedziale $[a, b)$ danej wielkości lub w pewnym prostokącie o zadanych wierzchołkach.

Przykładowe histogramy wychodów trzech głównych frakcji gęstościowych, wyznaczone na podstawie 300 obserwacji węgla surowego (w ciągu 45 dni), przedstawiają rysunki 4.3 - 4.5.



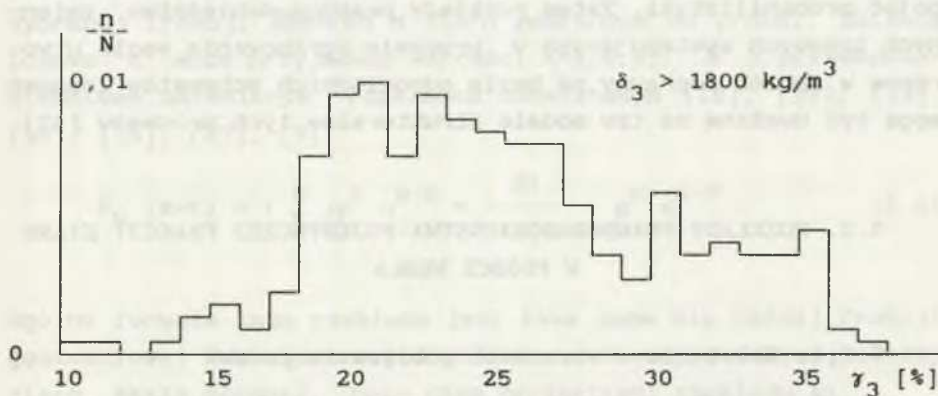
Rys.4.3. Histogram wychodów frakcji lekkiej w nadawie wyznaczony na podstawie $N = 300$ próbek

Fig.4.3. Histogram of contents of the light fraction in raw coal, calculated on the basis $N = 300$ samples



Rys.4.4. Histogram wychodów frakcji pośredniej w nadawie wyznaczony na podstawie N = 300 próbek

Fig.4.4. Histogram of contents of the intermediate fraction in raw coal, calculated on the basis N = 300 samples.



Rys.4.5. Histogram wychodów frakcji ciężkiej w nadawie wyznaczony na podstawie N = 300 próbek

Fig.4.5. Histogram of contents of the heavy fraction in raw coal, calculated on the basis N = 300 samples

5. SCHEMATY LOSOWE OPRÓBOWANIA

5.1. UWAGI OGÓLNE

W rozdziale tym zostanie podjęta próba określenia ogólnej formuły rozkładów prawdopodobieństwa zawartości poszczególnych frakcji ziarn w próbce węgla. Postać ogólna rozkładów zostanie określona na podstawie odpowiednich schematów losowań opisanych w rachunku prawdopodobieństwa, uwzględniających warunki, w jakich przebiega proces pobierania próbek. Rozkłady prawdopodobieństwa dla poszczególnych schematów losowań mają moc praw matematycznych, ujmujących wyniki doświadczeń w kategoriach pojęć probabilistyki. Zatem rozkłady prawdopodobieństwa zmiennej losowej występujących w procesie opróbowania węgla utworzone w sposób poprawny na bazie odpowiednich schematów losowań mogą być uważane za tzw. modele strukturalne tych procesów [42].

5.2. ROZKŁADY PRAWDOPODOBIENSTWA POJEDYNCZEJ FRAKCJI ZIARN W PRÓBCE WĘGLA

5.2.1. Założenia o warunkach pobierania próbek

Założmy, podobnie jak w punkcie 3.1, że populacja ogólna ziarn węgla składa się z l klas ziarnowych i r frakcji gęstościowych. Będziemy też abstrahować od tego, że populacja może się wyczerpać lub że na skutek jej uszczuplenia zmieni się rozkład rozpatrywanej cechy w populacji. Ponadto przyjmujemy, że materiał podlegający opróbowaniu jest starannie wymieszany, więc prawdopodobieństwo wylosowania pojedynczego ziarna o żądanych własnościach jest stałe podczas pobierania

próbek i w dowolnej części populacji. Prawdopodobieństwo to jest określone ilorazem ilości ziarn posiadających żadaną cechę przez ogólną liczbę ziarn w populacji. Szczegółowo dla wychodów poszczególnych frakcji i klas ziarnowych przedstawiono to w rozdziałach 3.4 i 4.1.

Schemat losowań Bernoulliego, na którym opierać się będzie większość rozważań tego rozdziału, dotyczy N-krotnego losowania po jednym elemencie z pewnej zbiorowości generalnej, przy czym wyniki każdego doświadczenia są statystycznie niezależne, prawdopodobieństwo sukcesu jest stałe i równe p , a prawdopodobieństwo porażki równe $q=1-p$ ([12], [13], [33], [35], [57], [7]).

5.2.2. Rozkład prawdopodobieństwa liczby ziarn danego typu w próbce węgla

Stosując powyższe założenia do procesu pobierania próbek przyjmiemy zmienną losową X , określającą liczbę ziarn wybranej frakcji spośród N ziarn pobranych do próbki. Zmienna losowa X może przyjmować wartości $X=0,1,2,\dots,N$ z prawdopodobieństwem określonym rozkładem dwumianowym [12], [13], [33], [35], [35], [57], [7]:

$$P_N(X=K) = \binom{N}{K} p^K q^{N-K} = \frac{N!}{K!(N-K)!} p^K q^{N-K} \quad (5.1)$$

Ogólna formuła tego rozkładu jest taka sama dla każdej frakcji gęstościowej lub ziarnowej oraz dla umownie wprowadzonej liczby ziarn skały płonnej, przy czym parametrami rozkładu są:

N - ilość ziarn w próbce,

p - prawdopodobieństwo wylosowania ziarna o odpowiednich cechach, np. p_{ij} , $p_{i.}$, $p_{.j}$, $p_{j/i}$, $p_{\alpha,1j}$, $p_{\alpha,i.}$, p_{α} (rozdział 3.4),

$q = 1-p$.

Dystrybuantę rozkładu określa wzór:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{K \leq x} \binom{N}{K} p^K q^{N-K} \quad (5.2)$$

Średnia ilość ziarn o żądanych własnościach w próbce N-elementowej wynosi:

$$E(X) = Np \quad (5.3)$$

a wariancja:

$$\mu_2 = D^2(X) = Npq \quad (5.4)$$

Wariancja rozkładu dwumianowego rośnie ze wzrostem N, a ze względu na p osiąga maksimum przy $p=1/2$.

Najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów k_0 w rozkładzie dwumianowym wynosi:

$$k_0 = \text{entier}(N+1)p \quad (5.5)$$

jeśli $(N+1)p$ nie jest liczbą całkowitą lub też istnieją dwie najbardziej prawdopodobne liczby sukcesów:

$$k_0' = (N+1)p-1 \quad \text{ i } \quad k_0'' = (N+1)p \quad (5.6)$$

jeśli są to liczby całkowite.

Jak widać, wartość oczekiwana i wartość najbardziej prawdopodobna nie zawsze są równe, np. w rozkładzie dwumianowym z parametrami: $p = 0,1$ i $N = 55$ wartość oczekiwana wynosi:

$$E(X) = 5,5$$

a wartość najbardziej prawdopodobna:

$$k_0 = 5.$$

W rozkładzie o parametrach $p = 0,8$ i $N = 9$ istnieją dwie najbardziej prawdopodobne liczby sukcesów:

$$k_0' = 7 \quad \text{ i } \quad k_0'' = 8,$$

a wartość oczekiwana wynosi:

$$E(X) = 7,2.$$

Nietrudno znaleźć szereg podobnych ilustracji.

Dla rozkładów symetrycznych momenty centralne rzędu nieparzystego są równe zeru. Ponieważ dla rozkładu dwumianowego moment trzeciego rzędu wynosi:

$$\mu_3 = Np(1-p)(1-2p), \quad N>0, \quad 0<p<1, \quad (5.7)$$

zatem rozkład jest symetryczny dla $p=0,5$.

Jako miarę asymetrii przyjmuje się wyrażenie:

$$\kappa = -\frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{1-2p}{[Np(1-p)]^{1/2}} \quad (5.8)$$

które dla $p < 0,5$ ma wartość dodatnią (asymetria rozkładu dodatnia), a dla $p > 0,5$ ma wartość ujemną (asymetria rozkładu ujemna). Asymetria jest tym większa, im mniejsze jest N .

W tablicy 5.1 przedstawiono przykładowe parametry rozkładów dwumianowych, wyznaczone dla liczby ziarn węgla w kolejnych frakcjach gęstościowych wybranej klasy ziarnowej. Przyjęto wartości prawdopodobieństwa $p_{j/i=5}$ wylosowania ziarna o gęstości δ_j z klasy ziarnowej $d_5 = (30-20)10^{-3}m$ (przykład 3.5). Dla trzech wartości $n_{i.}$ (liczba ziarn z danej klasy ziarnowej), obliczono wartości oczekiwane liczby ziarn E_x , wariancję D_x^2 oraz współczynnik asymetrii κ każdej frakcji gęstościowej.

Tablica 5.1

Parametry rozkładu dwumianowego

Nr fra- kcji	$p_{j/5}$	$n_{i.} = 100$			$n_{i.} = 1000$			$n_{i.} = 5918$		
		E_x	D_x^2	κ	E_x	D_x^2	κ	E_x	D_x^2	κ
1	0,617	61,7	23,6	-0,006	617	236	$-6 \cdot 10^{-4}$	3654	1398	0,000
2	0,057	5,7	5,4	0,16	57	54	0,02	336	318,1	0,003
3	0,033	3,3	3,2	0,29	33	32	0,03	198	188,8	0,005
4	0,042	4,2	4,0	0,22	42	40	0,02	247	238,1	0,004
5	0,026	2,6	2,5	0,37	26	25	0,04	153	149,9	0,006
6	0,033	3,3	3,2	0,29	33	32	0,03	194	188,8	0,005
7	0,016	1,6	1,6	0,61	16	16	0,06	94	93,2	0,01
8	0,020	2,0	1,9	0,48	20	19	0,05	121	115,9	0,008
9	0,155	15,5	13,1	0,048	155	131	0,005	919	775,1	0,001

5.2.3. Rozkład prawdopodobieństwa częstości występowania ziarn danego typu w próbce węgla

Zmienna losowa $Y=X/N$, określona jako iloraz ilości ziarn o badanych własnościach przez ogólną liczbę ziarn w próbce, przyjmująca dla stałej liczby ziarn N wartości:

$$Y = \frac{K}{N} = 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1 \quad (5.9)$$

ma również rozkład dwumianowy, ponieważ przy stałym N :

$$P(Y = \frac{K}{N}) = P(X=K) = \binom{N}{K} p^K q^{N-K} \quad (5.10)$$

Wartość oczekiwana i wariancja dla stałej wartości N wynoszą:

$$E(Y) = \frac{1}{N} E(X) = p \quad (5.11)$$

$$D^2(Y) = \frac{1}{N^2} D^2(X) = \frac{p(1-p)}{N} \quad (5.12)$$

Powyższe wzory mają następujące znaczenie praktyczne. W próbkach o stałej liczbie N ziarn, względna liczba ziarn K/N danej frakcji ma wartość średnią równą p (odpowiednio p_{1j} , p_{1j} , $p_{j/1}$, $p_{j/1}$, $p_{\alpha,ij}$, $p_{\alpha,i.}$, p_{α}). Ze wzrostem liczby N ziarn pobranych do próbki maleje wariancja każdej ze zmiennych Y , tzn. coraz dokładniej przybliżają one nie znane prawdopodobieństwo wylosowania ziarna o pożądanym cechach z populacji generalnej.

5.2.4. Rozkład prawdopodobieństwa wychodu pojedynczej frakcji ziarn w próbce węgla

Wyprowadzone w rozdziałach 3.2 i 3.3 wzory na wychody klas ziarnowych, frakcji gęstościowych i zawartości w nich popiołu zostały sprowadzone w rozdziale 3.4 do ogólnej postaci:

$$v = cY \quad (5.13)$$

Parametr c jest zależny od gęstości i wymiarów ziarn.

Szczegółowo postać zależności $c(v, \delta)$ dla wychodów (a_{ij}) poszczególnych frakcji i zawartości w nich popiołu (b_{ij}) przedstawiono w rozdziale 3.4, a w tablicach 3.6 i 3.7 podano obliczone przykładowe wartości.

Jeśli dla uproszczenia rozważań przyjąć, że dla danego typu ziarn (dla danej zmiennej losowej) parametr c jest stały podczas pobierania próbek, to zmienna losowa v , reprezentująca zawartość wybranego składnika w próbce węgla, ma również, tak jak zmienne losowe X i Y , rozkład dwumianowy, ponieważ przy stałych N i c :

$$P\left(v=c-\frac{K}{N}\right) = P(Y=K/N) = P(X=K) = \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K} \quad (5.14)$$

Wartość średnią $E(v)$ i wariancję $D^2(v)$ można wyznaczyć, korzystając z ogólnych własności momentów:

$$E(v) = cE(Y) = cp \quad (5.15)$$

$$D^2(v) = c^2 D^2(Y) = \frac{c^2 p(1-p)}{N} \quad (5.16)$$

lub z własności funkcji charakterystycznej. W tym celu zauważmy, że zmienna losowa X , określająca liczbę ziarn badanego składnika w próbce N -elementowej, jest sumą N zmiennych losowych o rozkładzie zero-jedynkowym. Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X ma więc postać [12], [33]:

$$\varphi_X(t) = \left[1 + p (e^{it} - 1) \right]^N \quad (5.17)$$

gdzie:

- i - jednostka urojona,
- t - zmienna rzeczywista.

Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej v , po uwzględnieniu (5.13), (5.14), (5.17), będzie miała postać:

$$\varphi_v(t) = \varphi_X\left(-\frac{c}{N}t\right) = \left[1 + p \left(e^{i c t / N} - 1 \right) \right]^N \quad (5.18)$$

Kolejne momenty zwykłe rzędu n wyznacza się przez różnicz-

kowanie funkcji charakterystycznej [12], [33], [57], zgodnie z formułą:

$$m_n = -\frac{1}{i^n} \varphi_{\nu}^{(n)}(0) \quad (5.19)$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej ν jest zatem równa:

$$\begin{aligned} E(\nu) = m_1 &= -\frac{1}{i} \varphi_{\nu}'(0) = \\ &= cp e^{ict/N} \left[1 + p \left(e^{ict/N} - 1 \right) \right]^{N-1} \Big|_{t=0} = cp \end{aligned} \quad (5.20)$$

Moment zwykły drugiego rzędu otrzymamy jako drugą pochodną wyrażenia (5.18), dla $t=0$:

$$m_2 = -\frac{1}{i^2} \varphi_{\nu}''(0) = \frac{c^2 p [1 + (N-1)p]}{N} \quad (5.21)$$

Wariancja wynosi:

$$D^2(\nu) = m_2 - m_1^2 = \frac{c^2 p(1-p)}{N} \quad (5.22)$$

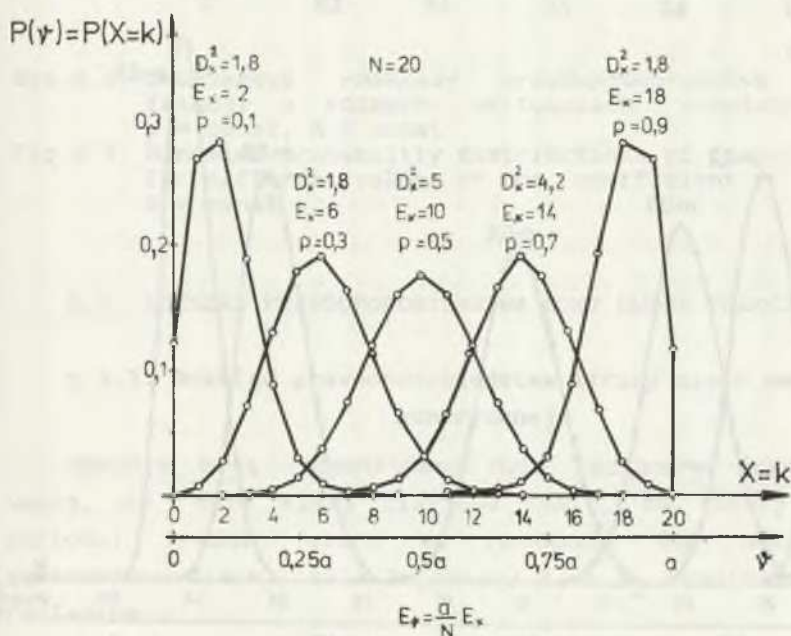
co jest zgodne z (5.16).

Można sformułować następujące uwagi, dotyczące rozkładów prawdopodobieństwa wychodów frakcji gęstościowych i klas ziarnowych oraz zawartości popiołu w próbkach węgla pobieranych zgodnie z przyjętymi wyżej założeniami:

- każda z tych wielkości, traktowana jako zmienna losowa, posiada binomialny rozkład prawdopodobieństwa,
- kształt rozkładu zależy od ilości ziarn pobranych do próbki oraz prawdopodobieństwa wylosowania pojedynczego ziarna o danych cechach z populacji podlegającej oprobowaniu,
- wariancja rozkładu danej zmiennej losowej jest odwrotnie proporcjonalna do liczby ziarn w próbce i zależy od

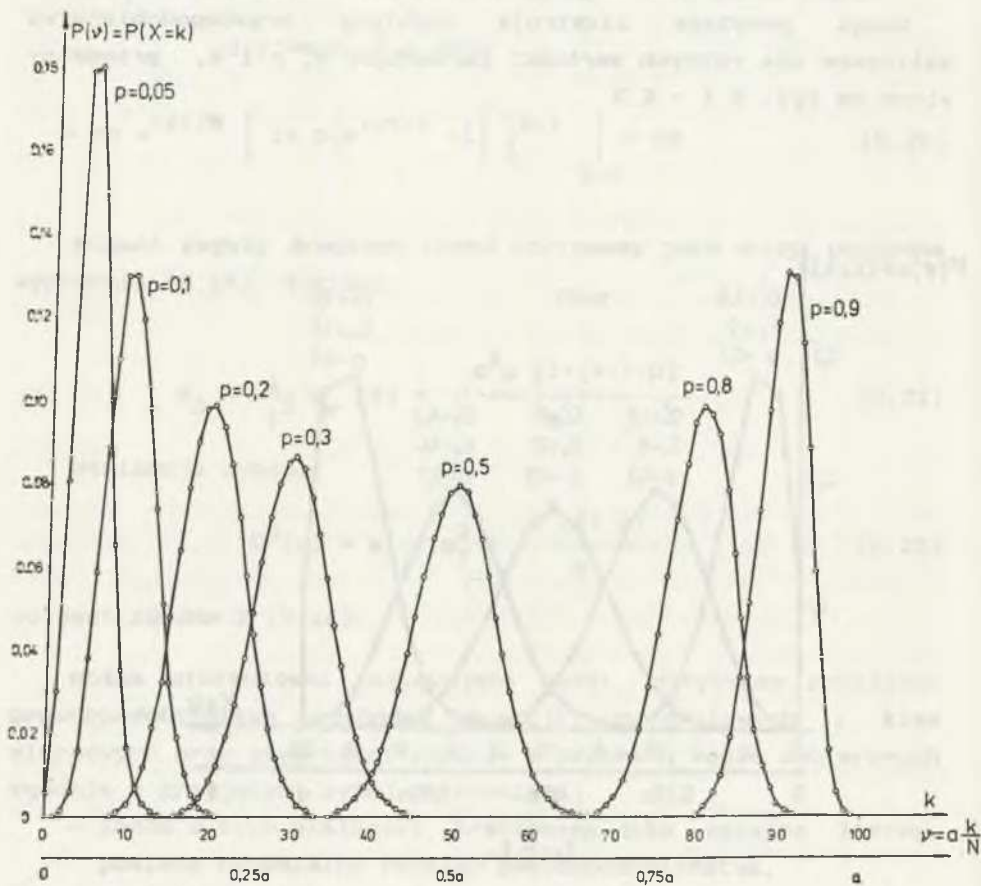
parametru c reprezentującego wymiary i gęstość ziarna (parametr a dla wychodów frakcji, parametr b dla zawartości popiołu - rozdziały 3.4 i 3.5 oraz tabl. 3.6 i 3.7).

Uwagi powyższe ilustrują rozkłady prawdopodobieństwa obliczone dla różnych wartości parametrów N , p i a , przedstawione na rys. 5.1 - 5.3.



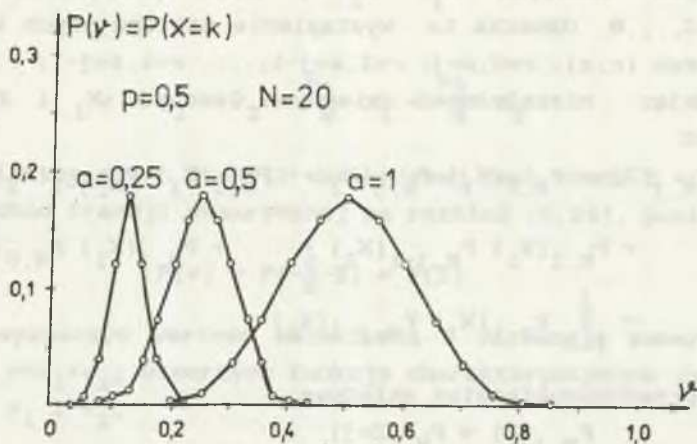
Rys.5.1. Rozkłady dwumianowe obliczone dla różnych wartości prawdopodobieństwa p wylosowania pojedynczego ziarna i dla stałej liczby N ziarn w próbce

Fig.5.1. Binomial probability distributions calculated for different values of the probability p of drawing a single grain and the constant number of grains in a sample



Rys.5.2. Rozkłady dwumianowe obliczone dla różnych wartości prawdopodobieństwa p i dla stałej liczby N ziarn w próbce

Fig.5.2. Binomial distributions calculated for different values of the probability p and the constant number N of grains in a sample



Rys.5.3. Dwumianowe rozkłady prawdopodobieństwa wychodów frakcji o różnych wartościach współczynnika a ; $p = \text{const}$, $N = \text{const}$

Fig.5.3. Binomial probability distributions of fractions yields for different values of the coefficient a ; $p = \text{const}$, $N = \text{const}$

5.3. ROZKŁAD PRAWDOPODOBIENSTWA SUMY DWÓCH FRAKCJI

5.3.1. Rozkład prawdopodobieństwa liczby ziarn we frakcji sumarycznej

Obecnie będą rozpatrywane dwie rozłączne frakcje ziarn węgla, np. dwie klasy ziarnowe takie, że zbiory A_1 i A_2 wartości średnic ziarn są rozłączne lub dwie frakcje gęstościowe ziarn, takie że zbiory B_1 i B_2 gęstości ziarn są rozłączne.

Niech zmienna losowa X_1 oznacza liczbę r ziarn pierwszego typu, a zmienna losowa X_2 oznacza liczbę s ziarn drugiego typu w próbie N -elementowej. Prawdopodobieństwa wylosowania pojedynczego ziarna wynoszą odpowiednio p_1 i p_2 . Zmienna losowa Z , określająca liczbę ziarn, które należą do frakcji pierwszej lub drugiej spośród N ziarn pobranych do próbki, jest sumą

zmiennych losowych X_1 , X_2 i może przyjmować wartości $j=0,1,2,\dots,N$. Oznacza to wystąpienie następujących kombinacji par liczb (r,s) : $r=0,s=j$; $r=1,s=j-1$; ... $r=i,s=j-i$; ... $r=j,s=0$. Zakładając niezależność zmiennych losowych X_1 i X_2 , możemy zapisać:

$$\begin{aligned} P_{N,j}(Z) &= P_{N,0}(X_1) P_{N,j}(X_2) + P_{N,1}(X_1) P_{N,j-1}(X_2) + \dots \\ &+ P_{N,i}(X_1) P_{N,j-i}(X_2) + \dots + P_{N,j}(X_1) P_{N,0}(X_2) = \\ &= \sum_{i=0}^j P_{N,i}(X_1) P_{N,j-i}(X_2) \end{aligned} \quad (5.23)$$

gdzie prawdopodobieństwa składowe:

$$P_{N,j}(Z) = P_N(Z=j)$$

$$P_{N,i}(X_1) = P_N(X_1=i)$$

$$P_{N,j-i}(X_2) = P_N(X_2=j-i)$$

określa wzór (5.1).

Zatem uwzględniając formułę rozkładów dwumianowych we wzorze (5.23), otrzymujemy:

$$P_N(X_1+X_2=j) = \sum_{i=0}^j \binom{N}{i} p_1^i q_1^{N-i} \binom{N}{j-i} p_2^{j-i} q_2^{N-(j-i)} \quad (5.24)$$

gdzie:

$$q_1 = 1-p_1, \quad q_2 = 1-p_2, \quad j = 0,1,2,\dots,N.$$

Wyrażenie (5.24) jest kompozycją rozkładów zmiennych losowych X_1 i X_2 .

5.3.2. Rozkład prawdopodobieństwa sumarycznego wychodu dwóch frakcji

Przy stałej liczbie N ziarn w próbce i stałym dla danej frakcji współczynniku c zmienna losowa ν , określająca sumaryczny wychód dwóch frakcji, jest następującą kombinacją liniową zmiennych losowych X_1 i X_2 :

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 = \frac{c_1}{N} X_1 + \frac{c_2}{N} X_2$$

Ponadto liczba ziarn frakcji sumarycznej jest równa $Z = X_1 + X_2$.
Zatem wychód frakcji sumarycznej ma rozkład (5.24), ponieważ:

$$P(\nu) = P\left(-\frac{c}{N}Z\right) = P(Z)$$

Aby wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję sumarycznego wychodu $\nu = \nu_1 + \nu_2$, utworzymy funkcje charakterystyczne zmiennych losowych ν_1 i ν_2 :

$$\varphi_{\nu_1}(t) = \left[1 + p_1 \left(e^{ic_1 t/N} - 1 \right) \right]^N \quad (5.25)$$

$$\varphi_{\nu_2}(t) = \left[1 + p_2 \left(e^{ic_2 t/N} - 1 \right) \right]^N \quad (5.26)$$

Wobec przyjętej niezależności zmiennych ν_1 i ν_2 , funkcja charakterystyczna $\varphi_\nu(t)$ wychodu sumarycznego jest iloczynem wyrażeń (5.25) i (5.26):

$$\varphi_\nu(t) = \left\{ \left[1 + p_1 \left(e^{ic_1 t/N} - 1 \right) \right] \left[1 + p_2 \left(e^{ic_2 t/N} - 1 \right) \right] \right\}^N \quad (5.27)$$

Po zrózniczkowaniu wyrażenia (5.27) otrzymujemy wzór na wartość oczekiwaną sumarycznego wychodu dwóch frakcji:

$$E(\nu) = m_1 = -\frac{1}{i} \varphi'_\nu(0) = c_1 p_1 + c_2 p_2 \quad (5.28)$$

Obliczając drugą pochodną wyrażenia (5.27), otrzymujemy drugi moment zwykły:

$$\begin{aligned} m_2 = -\frac{1}{i^2} \varphi''_\nu(0) &= \frac{(N-1)}{N} (c_1 p_1 + c_2 p_2) + \\ &+ \frac{1}{N} (c_1^2 p_1 + 2c_1 c_2 p_1 p_2 + c_2^2 p_2) \end{aligned} \quad (5.29)$$

oraz wariancję:

$$D^2(\nu) = m_2 - m_1^2 = -\frac{1}{N} [c_1^2 p_1(1-p_1) + c_2^2 p_2(1-p_2)] \quad (5.30)$$

Otrzymany wzór pokrywa się z ogólnym wzorem na wariancję sumy dwóch zmiennych nieskorelowanych:

$$D^2(\nu_1 + \nu_2) = D^2(\nu_1) + D^2(\nu_2)$$

Rozważania dotyczące wartości oczekiwanej i wariancji sumy wychodów dwóch frakcji można rozszerzyć na sumę większej liczby frakcji rozłącznych:

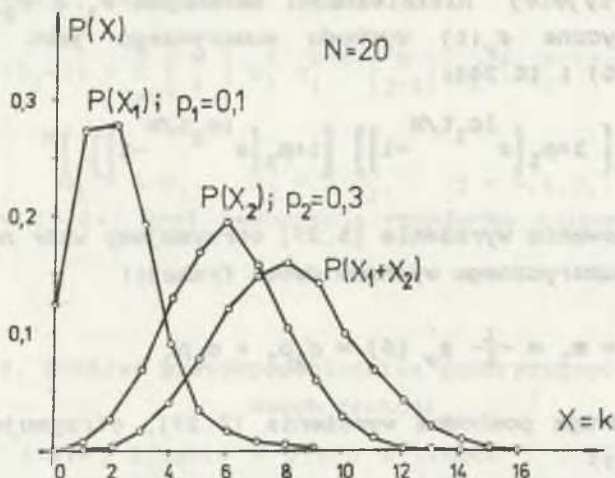
$$E(\nu) = \sum_k c_k p_k \quad (5.31)$$

przy czym jeśli zmienne losowe ν_k są nieskorelowane, wówczas także wariancja jest sumą wariancji poszczególnych zmiennych:

$$D^2(\nu) = \sum_k D^2(\nu_k) \quad (5.32)$$

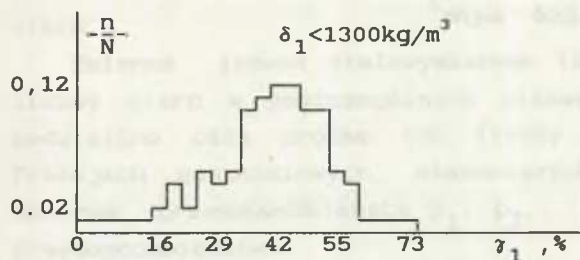
W rozdziale 5.4 będą wyznaczane momenty poszczególnych frakcji bez założeń o niezależności lub nieskorelowaniu.

Rysunki 5.4 - 5.7 przedstawiają obliczone i empiryczne rozkłady wychodów frakcji sumarycznej.



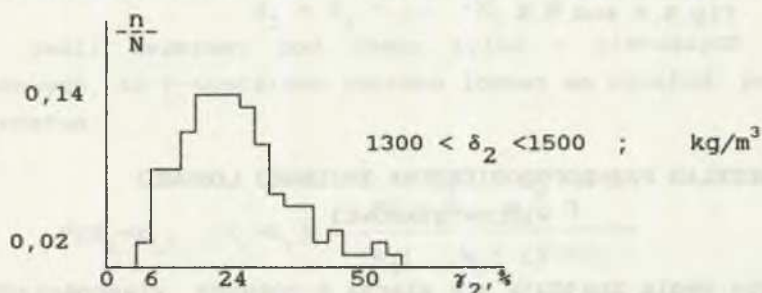
Rys.5.4. Dwumianowe rozkłady prawdopodobieństwa dwóch zmiennych losowych X_1 i X_2 oraz ich sumy $X=X_1+X_2$

Fig.5.4. Binomial probability distributions of two random variables X_1 , X_2 and their sum $X=X_1+X_2$



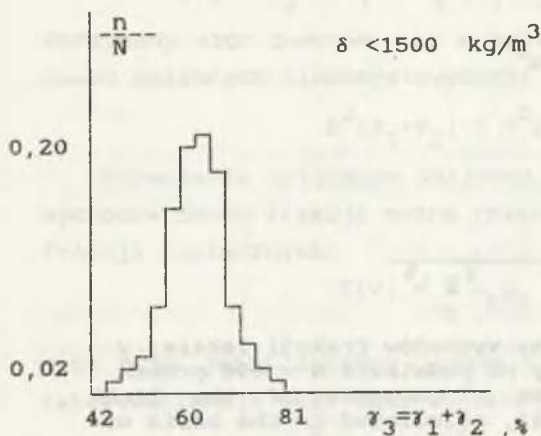
Rys.5.5. Histogram empiryczny wychodów frakcji lekkiej w nadawie, wyznaczony na podstawie $N = 496$ próbek

Fig.5.5. Empirical histogram of contents of the light fraction in raw coal, calculated on the basis of $N = 496$ samples



Rys.5.6. Histogram empiryczny wychodów frakcji pośredniej w nadawie, wyznaczony na podstawie $N = 496$ próbek

Fig.5.6. Empirical histogram of contents of the intermediate fraction in raw coal, calculated on the basis of $N = 496$ samples



Rys.5.7. Histogram empiryczny sumarycznego wychodu dwóch frakcji, których rozkłady przedstawiono na rys.5.5 i 5.6

Fig.5.7. Empirical histogram of summary yields of two fractions, which distributions have been presented on fig.5.5 and 5.6

5.4. ROZKŁAD PRAWDOPODOBIENSTWA ZMIENNEJ LOSOWEJ WIELOWYMIAROWEJ

W próbce węgla znajdują się ziarna o różnych właściwościach, które rozróżniamy np. jako frakcje gęstościowe i ziarnowe.

Założmy, że w próbce N -elementowej, pobranej zgodnie z warunkami losowania niezależnego, znajduje się k_1 ziarn pierwszego rodzaju, k_2 ziarn drugiego rodzaju itd., k_l ziarn l -tego rodzaju, przy czym:

$$k_1 + k_2 + \dots + k_l = N,$$

a frakcje są parami rozłączne. Dla każdego rodzaju ziarn prawdopodobieństwa wylosowania pojedynczego ziarna z populacji generalnej wynoszą odpowiednio: $p_1, p_2, \dots, p_l$ oraz

$$p_1 + p_2 + \dots + p_l = 1.$$

Rozważmy zmienną losową wielowymiarową $(X_1, X_2, \dots, X_l)$, gdzie $X_r = k_r$ oznacza, że w próbce N -elementowej znajduje się k_r

ziarn należących do r -tej klasy, lub że jeśli w danej klasie ziarnowej jest N ziarn, to r -ta frakcja gęstościowa zawiera k_r ziarn.

Zmienna losowa wielowymiarowa $(X_1, X_2, \dots, X_l)$ reprezentuje liczby ziarn w poszczególnych klasach ziarnowych, na jakie podzielono całą próbkę lub liczby ziarn w poszczególnych frakcjach gęstościowych, stanowiących daną klasę ziarnową. Wówczas prawdopodobieństwa $p_1, p_2, \dots, p_l$ oznaczają odpowiednio prawdopodobieństwa:

$$p_i, \quad i=1,2,\dots,l \quad \text{lub} \quad p_{j/i}, \quad j=1,2,\dots,r; \quad i=\text{const.}$$

Tak określona zmienna losowa wielowymiarowa ma funkcję prawdopodobieństwa określoną rozkładem wielomianowym [12]:

$$P(X_1=k_1, \dots, X_r=k_r, \dots, X_l=k_l) = \frac{N! p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} \dots p_l^{k_l}}{k_1! \dots k_r! \dots k_l!} \quad (5.33)$$

Zmienne losowe X_r spełniają związek liniowy:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_l = N$$

Jeśli weźmiemy pod uwagę tylko r pierwszych zmiennych losowych, to r -wymiarowa zmienna losowa ma rozkład prawdopodobieństwa:

$$P(X_1=k_1, \dots, X_r=k_r) = \frac{N! p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} q^{N-K}}{k_1! \dots k_r! (N-K)!} \quad (5.34)$$

gdzie:

$$K = k_1 + k_2 + \dots + k_r \quad \text{oraz} \quad q = 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_r$$

Liczba q oznacza prawdopodobieństwo wylosowania ziarna, nie należącego do żadnej z r klas (lub frakcji) stanowiących badaną zmienną losową.

Przy stałej liczbie N ziarn w próbce, zmienne losowe określające wychody frakcji ziarn:

$$(\nu_1, \dots, \nu_r, \dots, \nu_l) = \left(-\frac{c_1}{N} X_1, \dots, -\frac{c_r}{N} X_r, \dots, -\frac{c_l}{N} X_l \right) \quad (5.35)$$

$$\nu_1 + \dots + \nu_r + \dots + \nu_1 = 1 \quad (5.36)$$

mają łączny rozkład wielomianowy (5.33), ponieważ dla stałych c_r i N :

$$P(X_r = k_r) = P(\nu_r = \frac{c_r}{N} - k_r) \quad (5.37)$$

Natomiast r spośród l tych zmiennych losowych posiada łączny rozkład prawdopodobieństwa w postaci (5.34).

Aby wyznaczyć momenty poszczególnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_l$, rozpatrzmy następujący schemat losowań. Niech próbka N -elementowa powstaje przez N -krotne losowanie po jednym ziarnie z populacji generalnej o dużej licznosci. Wyniki losowań są niezależne. Wynik m -tego losowania można przedstawić w postaci wektora losowego $\{X_1^{(m)}, X_2^{(m)}, \dots, X_l^{(m)}\}$, zawierającego l zmiennych losowych, przy czym tylko jedna z nich jest różna od zera. Ponadto dla każdego m jest:

$$\begin{aligned} P \left(X_1^{(m)}=1, \dots, X_r^{(m)}=0, \dots, X_l^{(m)}=0 \right) &= p_1 \\ P \left(X_1^{(m)}=0, \dots, X_r^{(m)}=1, \dots, X_l^{(m)}=0 \right) &= p_r \\ P \left(X_1^{(m)}=0, \dots, X_r^{(m)}=0, \dots, X_l^{(m)}=1 \right) &= p_l \end{aligned} \quad (5.38)$$

oraz $p_1 + p_2 + \dots + p_l = 1$.

Liczba l składowych wektora odpowiada liczbie przyjętych klas ziarnowych lub frakcji gęstościowych. Prawdopodobieństwo wylosowania ziarna r -tej frakcji p_r jest stałe w każdym losowaniu. Utworzona próba N -elementowa jest realizacją wektora losowego:

$$(X_1, X_2, \dots, X_l) = \sum_{m=1}^N \left(X_1^{(m)}, X_2^{(m)}, \dots, X_l^{(m)} \right) \quad (5.39)$$

Wielowymiarowa zmienna losowa (5.39) ma rozkład wielomianowy

(5.33). Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej wielowymiarowej z definicji jest równa [12]:

$$\varphi_{x_1, x_2, \dots, x_1}(t_1, t_2, \dots, t_1) = E \left(e^{i(t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_1 X_1)} \right) \quad (5.40)$$

gdzie:

$t_1, t_2, \dots, t_1$ - zmienne rzeczywiste.

Uwzględniając (5.38), można przedstawić funkcję charakterystyczną wektora losowego w m-tym doświadczeniu następująco:

$$\varphi_{x_1^{(m)}, \dots, x_1^{(m)}}(t_1, \dots, t_1) = \sum_{r=1}^1 p_r e^{i t_r} \quad (5.41)$$

Korzystając z własności funkcji charakterystycznej sumy N niezależnych wektorów losowych (5.39) i uwzględniając (5.41), mamy:

$$\begin{aligned} \varphi_{x_1, \dots, x_1}(t_1, \dots, t_1) &= \prod_{m=1}^N \varphi_{x_1^{(m)}, \dots, x_1^{(m)}}(t_1, \dots, t_1) = \\ &= \left(\sum_{r=1}^1 p_r e^{i t_r} \right)^N \end{aligned} \quad (5.42)$$

Aby wyznaczyć dwa pierwsze momenty poszczególnych zmiennych losowych w ich rozkładach brzegowych, należy wyznaczyć pochodne funkcji charakterystycznej (5.42) względem odpowiednich zmiennych rzeczywistych t :

$$\frac{\partial \varphi_{x_1, \dots, x_1}}{\partial t_j} = iN \left(\sum_{r=1}^1 p_r e^{i t_r} \right)^{N-1} p_j e^{i t_j} \quad (5.43)$$

$$E(X_j) = -\frac{1}{i} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \right|_{t_1, \dots, t_1=0} = N p_j \quad (5.44)$$

$$E(X_j^2) = -\frac{1}{i^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_j^2} \Big|_{t_1, \dots, t_1=0} = N p_j [1 + p_j (N-1)] \quad (5.45)$$

$$D^2(X_j) = E(X_j^2) - [E(X_j)]^2 = N p_j (1 - p_j) \quad (5.46)$$

Aby obliczyć kowariancję pomiędzy parami poszczególnych zmiennych, należy najpierw wyznaczyć momenty mieszane $E(X_j X_k)$. W tym celu różniczkujemy (5.43) względem zmiennej t_k :

$$E(X_k X_j) = -\frac{1}{i^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_k \partial t_j} \Big|_{t_1, \dots, t_1=0} = p_k p_j N(N-1) \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_k, X_j) &= E[(X_k - N p_k)(X_j - N p_j)] = \\ &= E(X_k X_j) - N^2 p_k p_j = -p_k p_j N \end{aligned} \quad (5.48)$$

Istnieją zatem różne od zera pozadiagonalne elementy macierzy kowariancji. Współczynnik korelacji wyznaczymy z definicji:

$$\rho(X_k, X_j) = \frac{\text{cov}(X_k, X_j)}{\sqrt{D^2(X_k)} \sqrt{D^2(X_j)}} = -\frac{\sqrt{p_k p_j}}{\sqrt{(1-p_j)(1-p_k)}} \quad (5.49)$$

W szczególności, gdy przyjmuje się rozdział ziaren na dwie frakcje, wynik m -tego losowania można zapisać:

$$P(X_1^{(m)}=1, X_2^{(m)}=0) = p_1$$

$$P(X_1^{(m)}=0, X_2^{(m)}=1) = p_2$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

Po N losowaniach wektor wyników zapiszemy następująco:

$$(X_1, X_2) = \sum_{m=1}^N \left(X_1^{(m)}, X_2^{(m)} \right)$$

$$P(X_1=k, X_2=N-k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} p_1^k p_2^{N-k}$$

$$\text{cov}(X_1, X_2) = -Np_1p_2$$

$$\rho(X_1, X_2) = -1$$

Momenty wychodów poszczególnych frakcji ziarn wyznaczmy opierając się na funkcji charakterystycznej wektora losowego wychodów (5.35):

$$\begin{aligned} \varphi_{\nu_1, \dots, \nu_1}(t_1, \dots, t_1) &= \prod_{m=1}^N \varphi_{x_1^{(m)}, \dots, x_1^{(m)}}\left(\frac{c_1 t_1}{N}, \dots, \frac{c_1 t_1}{N}\right) = \\ &= \left(\sum_{r=1}^1 p_r e^{i c_r t_r / N} \right)^N \end{aligned} \quad (5.50)$$

Postępując podobnie jak dla wektora losowego $(X_1, \dots, X_1)$, otrzymujemy przez odpowiednie różniczkowanie funkcji (5.50) następujące parametry wychodów frakcji:

$$E(\nu_j) = c_j p_j \quad (5.51)$$

$$D^2(\nu_j) = \frac{c_j^2 p_j (1-p_j)}{N} \quad (5.52)$$

$$\text{cov}(\nu_k, \nu_j) = - \frac{c_k c_j p_k p_j}{N} \quad (5.53)$$

$$\rho(\nu_k, \nu_j) = - \frac{\sqrt{p_k p_j}}{\sqrt{(1-p_k)(1-p_j)}} \quad (5.54)$$

Wzory (5.51) i (5.52) odpowiadają wzorom (5.14) i (5.15), czego należało oczekiwać. Różna od zera kowariancja i współczynnik korelacji wskazują, że wychody poszczególnych frakcji ziarn w próbce są zmiennymi losowymi skorelowanymi.

5.5. ROZKŁADY ZŁOŻONE

W rozważaniach tego rozdziału zakładano dotychczas, że liczba ziarn w próbkach jest stała oraz że parametr c zależny od średnich gęstości i wymiarów ziarn w danej frakcji i w całej próbce jest dla danej frakcji ziarn wielkością stałą we wszystkich próbkach. W praktyce opróbowania na ogół tak nie jest. Przyjmuje się stałą masę próbki, a liczba ziarn w niej pozostaje zmienną losową. Wartość średnia gęstości ziarn w danej klasie ziarnowej (w sensie (3.7)), średnia gęstość ziarn w próbce (3.17), wartość średnia objętości ziarn w danej frakcji (3.10) i w całej próbce (3.15) są zmiennymi losowymi, jako funkcje liczby ziarn: n_{1j} , $n_{1..}$, $n_{.j}$, n . Każda zmienna losowa ν , przedstawiająca wychód frakcji ziarn danego typu lub sumę wychodów różnych frakcji, ma więc tak zwany rozkład złożony, tzn.:

$$P(\nu, N, c) = P(\nu = c \frac{K}{N} \mid N = N_0, c = c_0) P(N, c) \quad (5.55)$$

Rozkłady $P(\nu)$ opisane dla odpowiednich zmiennych losowych w rozdziałach 5.2, 5.3 i 5.4 są rozkładami warunkowymi wyznaczonymi dla stałych wartości c i N .

Aby otrzymać rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej ν , gdy N oraz c przybierają dowolne wartości, należy znaleźć rozkład brzegowy zmiennej losowej ν .

Dla obliczeń przykładowych założymy, że liczba N ziarn w próbce jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ . Parametr c jest stały. Szukana funkcja prawdopodobieństwa wynosi:

$$\begin{aligned} P\left(\nu = c \frac{K}{N}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\nu = c \frac{K}{N} \mid N=n\right) P(N=n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Po przekształceniach i zsumowaniu otrzymujemy:

$$P(\nu) = \frac{(\lambda p)^K}{K!} e^{-\lambda p}, \quad K=0,1,2,\dots \quad (5.57)$$

Funkcja prawdopodobieństwa (5.57) znana jest jako rozkład Poissona o parametrze λp , przy czym $\lambda = E(N)$.

Wielkość c , charakteryzująca własności fizyczne ziarn, jest zmienną losową przyjmującą wartości rzeczywiste, a co do charakteru rozkładu tej zmiennej brak jest podstaw, aby wyróżnić którykolwiek z rozkładów standardowych.

Zgodnie z ogólną regułą złożenia dwóch rozkładów, gdy jedna ze zmiennych jest typu ciągłego, a druga przyjmuje wartości dyskretne, mamy [13]:

$$P\left(\nu = c - \frac{K}{N}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(c) P\left(\nu = c - \frac{K}{N} \mid c\right) dc \quad (5.58)$$

5.6. APROKSYMACJA ROZKŁADÓW BINOMIALNYCH

5.6.1. Zastosowanie zbieżności do rozkładu normalnego

Obliczanie prawdopodobieństw $P(X=K)$ lub $P(\nu=cK/N)$ na podstawie rozkładu dwumianowego dla dużych wartości N i K jest uciążliwe ze względu na operację silni i potęgowania liczb mniejszych od jedności. Na mocy twierdzenia de Moivre'a - Laplace'a [57], [35], [12] dla dużych wartości N (dużych próbek) przybliżone wartości prawdopodobieństw w rozkładzie zmiennej losowej X , reprezentującej liczbę ziarn badanej frakcji, można znaleźć z tablic rozkładu normalnego lub wyznaczyć ze wzoru:

$$\begin{aligned} P(X=K) &= \binom{N}{K} p^K q^{N-K} \approx \frac{1}{\sqrt{Npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(K-Np)^2/2Npq} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{Npq}} \phi\left(\frac{K-Np}{\sqrt{Npq}}\right) \end{aligned} \quad (5.59)$$

gdzie:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (5.60)$$

jest funkcją gęstości rozkładu normalnego.

W szczególności dla najbardziej prawdopodobnej liczby ziarn w badanej frakcji $K_{mx} = Np$ prawdopodobieństwo maksymalne wynosi:

$$P(K=K_{mx}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} \quad (5.61)$$

W pracy [35] znajdujemy, że aproksymacja jest najdokładniejsza dla K w otoczeniu $K_{mx} = Np$ rzędu $\sqrt{Npq}$, natomiast w pracach [57], [12], że błąd jest wystarczająco mały, jeśli wielkości N , K oraz $N-K$ są dostatecznie duże.

Zmienna losowa ν , reprezentująca zawartość badanej frakcji w próbce węgla, ma rozkład prawdopodobieństwa przedstawiony za pomocą wzoru (5.14). Uwzględniając, że:

$$E(\nu) = cp$$

oraz

$$D^2(\nu) = c^2 pq/N$$

mamy następującą aproksymację rozkładu:

$$P(\nu = c \frac{K}{N}) \approx \frac{\sqrt{N}}{c \sqrt{pq}} \phi \left(\frac{\nu - cp}{\frac{c\sqrt{pq}}{\sqrt{N}}} \right) \quad (5.62)$$

gdzie p oznacza prawdopodobieństwo wylosowania jednego ziarna danego typu z populacji podlegającej opróbowaniu, N jest liczbą ziarn w próbce, a parametr c reprezentuje wymiary i gęstość ziarn (rozdział 4.3).

Na mocy integralnego twierdzenia de Moivre'a-Laplace'a prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X o rozkładzie dwumianowym, reprezentująca liczbę ziarn badanej frakcji w próbce N -elementowej, przyjmie wartości z pewnego przedziału $\langle k_1, k_2 \rangle$, jest w przybliżeniu równe:

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx \Phi(z_2) - \Phi(z_1) \quad (5.63)$$

gdzie $\Phi(z)$ jest dystrybucją standaryzowanego rozkładu normalnego, oraz:

$$z_1 = \frac{k_1 - Np}{\sqrt{Npq}} \quad , \quad z_2 = \frac{k_2 - Np}{\sqrt{Npq}} \quad (5.64)$$

Jeśli przedział $\langle k_1, k_2 \rangle$ jest symetryczny ze względu na wartość przeciętną $E(X) = Np$, to $z_1 = -z_2$ i wówczas:

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx 2 \Phi(z_2) - 1 \quad (5.65)$$

Dla zmiennej losowej v , reprezentującej zawartość badanego składnika, możemy zapisać następującą równość graniczną określającą prawdopodobieństwo, że zmienna losowa v znajdzie się w przedziale $\langle v_1, v_2 \rangle$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left(v_1 \leq \frac{\frac{c}{N} X - cp}{\frac{c\sqrt{pq}}{\sqrt{N}}} \leq v_2 \right) = \Phi(v_2) - \Phi(v_1) \quad (5.66)$$

gdzie X przyjmuje wartości $K=0, 1, 2, \dots, N$.

Jeśli $v_1 = -v_2 = v$, to:

$$P \left(\frac{|v - E(v)|}{D(v)} < v \right) \approx 2 \Phi(v) - 1 \quad (5.67)$$

Wzór powyższy pozwala na aproksymację dystrybucją rozkładu normalnego oszacowań wartości prawdopodobieństwa odchylenia

wychodu ν badanej frakcji ziarn węgla, od spodziewanej średniej $E(\nu)$ o wartość $\nu D(\nu)$. Ze względu na przydatność powyższego wzoru do obliczeń praktycznych zapiszmy go jeszcze w innych postaciach:

$$P \left(\left| c - \frac{K}{N} - cp \right| < \nu c \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{N}} \right) \approx 2\Phi(\nu) - 1 \quad (5.68)$$

lub w celu oszacowania częstości K/N występowania ziarn badane-
go typu w próbkach N -elementowych:

$$P \left(\left| \frac{K}{N} - p \right| < \nu \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{N}} \right) \approx 2\Phi(\nu) - 1 \quad (5.69)$$

Oznaczając:

$$\nu c \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{N}} = \varepsilon$$

i uwzględniając wyrażenia na wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej ν , możemy wzór (5.68) zapisać następująco:

$$P \left(|\nu - E(\nu)| < \varepsilon \right) \approx 2\Phi \left(\frac{\varepsilon}{D(\nu)} \right) - 1 \quad (5.70)$$

Rozpatrzmy teraz wektor losowy (5.35) wychodów frakcji ziarn, którego łączny rozkład prawdopodobieństwa dany jest wzorem (5.33). Wartość oczekiwana każdej ze zmiennych losowych i ich drugie momenty są określone wzorami (5.51) - (5.53). Utwórzmy wektor losowy $(Z_1, Z_2, \dots, Z_1)$, którego składowe są unormowanymi zmiennymi losowymi wychodów poszczególnych frakcji ziarn:

$$Z_j = \frac{\nu_j - E(\nu_j)}{D(\nu_j)} = \frac{\nu_j - c_j p_j}{c_j \frac{\sqrt{p_j(1-p_j)}}{\sqrt{N}}} \quad (5.71)$$

$$E(Z_j) = 0, \quad D^2(Z_j) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, 1 \quad (5.72)$$

$$\text{cov}(Z_j, Z_k) = - \frac{\sqrt{p_j p_k}}{\sqrt{(1-p_j)(1-p_k)}} \quad (5.73)$$

$$j, k = 1, 2, \dots, l.$$

Dystrybuanta $F(z_1, z_2, \dots, z_l)$ na mocy uogólnienia twierdzenia de Moivre'a-Laplace'a może być aproksymowana dystrybuantą wielowymiarowego rozkładu normalnego [12]:

$$P(Z_1 < z_1, Z_2 < z_2, \dots, Z_l < z_l) \approx \quad (5.74)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^l |M|}} \int_{-\infty}^{z_1} \dots \int_{-\infty}^{z_l} \exp\left(-\frac{1}{2|M|} \sum_{j,k=1}^l |M_{jk}| z_j z_k\right) dz_1 \dots dz_l$$

w którym $|M| \neq 0$ jest wyznacznikiem macierzy momentów rzędu drugiego par zmiennych losowych (Z_j, Z_k) , a $|M_{jk}|$ jest dopełnieniem algebraicznym wyrazu $\text{cov}(Z_j, Z_k)$ w wyznaczniku macierzy M .

5.6.2. Zastosowanie zbieżności do rozkładu Poissona

W przypadku gdy liczba N ziarn w próbce jest duża, a prawdopodobieństwo p wylosowania ziarna danego typu jest małe, tak że iloczyn $Np = \lambda$ jest niewielki ($N \geq 100$, $\lambda \leq 20$ [11]), to na mocy twierdzenia Poissona rozkład dwumianowy jest zbieżny do rozkładu Poissona:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K} = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} \quad (5.75)$$

Rozkład Poissona, podobnie jak rozkład dwumianowy, jest rozkładem dyskretnym. Charakteryzuje się jednym parametrem λ , więc może aproksymować rozkłady dwumianowe o różnych parametrach N i p , spełniających warunek:

$$Np = \lambda = \text{const.}$$

Według autora pracy [35] przybliżenie:

$$\binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K} \approx \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} \quad (5.76)$$

jest wystarczające, jeśli liczba N jest tak duża, że:

$$Np \approx Npq \gg 1 \quad (5.77)$$

Jeśli Np jest rzędu 1, wzór (5.76) nie jest słuszny.

Zmienna losowa X może przyjmować wartości $K=0,1,2,\dots$ oraz $E(X) = D^2(X) = \lambda$.

Zmienna losowa $Y=K/N$, określająca względną częstość ziarn danego typu w próbce N -elementowej, ma także rozkład dwumianowy (rozdział 5.2), który może być aproksymowany zgodnie z (5.76).

Wyznamy parametry $E(Y)$ oraz $D^2(Y)$. Jak wiadomo, funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X o rozkładzie Poissona jest równa:

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} \quad (5.78)$$

Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej Y o rozkładzie Poissona, z definicji, może być zapisana następująco:

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) = \varphi_{X/N}(t) &= \sum_{K=0}^{\infty} e^{itK/N} \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it/N})^K}{K!} = \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it/N}} = e^{\lambda(e^{it/N}-1)} \end{aligned} \quad (5.79)$$

Obliczając odpowiednie pochodne funkcji (5.79), otrzymamy wyrażenia na kolejne momenty:

$$E(Y) = m_1 = -\frac{1}{i} \varphi'_Y(0) = \frac{\lambda}{N} \quad (5.80)$$

$$E(Y^2) = m_2 = \frac{1}{i^2} \varphi''_Y(0) = \frac{\lambda^2 + \lambda}{N^2} \quad (5.81)$$

$$D^2(\nu) = m_2 - m_1^2 = \frac{\lambda}{N^2} \quad (5.82)$$

Wychód pojedynczej frakcji $\nu = cK/N$, przy stałych c oraz N , jest zmienną losową, której rozkład można również aproksymować zgodnie ze wzorem (5.75), jeśli są spełnione warunki dotyczące liczności próbek.

Funkcja charakterystyczna wychodu pojedynczej frakcji, jako zmiennej losowej o rozkładzie Poissona, wynosi:

$$\varphi_{cY}(t) = \varphi_Y(ct) = e^{\lambda(e^{ict/N} - 1)} \quad (5.83)$$

a wartość oczekiwana i wariancja są równe:

$$E(\nu) = \frac{c\lambda}{N}, \quad D^2(\nu) = \frac{c^2 \lambda}{N^2} \quad (5.84)$$

Parametr λ jest zależny od prawdopodobieństwa p wylosowania ziarna danego typu. Zatem każda zmienna losowa ν_j , reprezentująca wychód ziarn danej frakcji posiada następujące parametry:

$$\lambda_j = Np_j, \quad E(\nu_j) = \frac{c_j \lambda_j}{N}, \quad D^2(\nu_j) = \frac{c_j^2 \lambda_j}{N^2} \quad (5.85)$$

Jeśli ponadto dla zmiennych losowych ν_j spełnione są warunki:

$$\sum_{j=1}^1 \nu_j = 1, \quad N = k_1 + \dots + k_l, \quad p_1 + \dots + p_l < 1 \quad (5.86)$$

to dla dużych wartości N rozkład wielomianowy (5.33) można przybliżyć wzorem [35]:

$$\frac{N!}{k_1! \dots k_l!} \prod_{j=1}^l p_j^{k_j} \approx \prod_{j=1}^{l-1} e^{-\lambda_j} \frac{(\lambda_j)^{k_j}}{k_j!} \quad (5.87)$$

W szczególności, gdy rozpatrujemy dwie frakcje ziarn: frakcję wybraną oraz pozostałe ziarna, otrzymujemy wzór (5.76).

Z zależności (5.87) można wyciągnąć wniosek, że:

$$P(v_i, v_j) = P(v_i) P(v_j) \quad (5.88)$$

Ma to następujące znaczenie praktyczne: jeśli próbka zawiera dużą liczbę N ziarn, a prawdopodobieństwo p_i wylosowania pojedynczego ziarna jest małe dla poszczególnych frakcji ziarn, to wychody poszczególnych frakcji są zmiennymi losowymi niezależnymi.

Twierdzenie o dodawaniu dla zmiennych losowych o rozkładzie Poissona pozwala na określenie rozkładu sumy wychodów dwóch frakcji v_1, v_2 :

$$P(v_1 + v_2) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^K}{K!} \quad (5.89)$$

Jeśli znane są parametry λ_1, λ_2 , a w obydwu frakcjach jest łącznie K ziarn, to można wyznaczyć prawdopodobieństwo, że K_1 ziarn znajduje się we frakcji pierwszej, a $K_2 = K - K_1$ ziarn we frakcji drugiej. W tym celu wyznaczamy prawdopodobieństwo warunkowe:

$$\begin{aligned} P(X_1=K_1, X_2=K_2 | X=K) &= \frac{P(X_1=K_1, X_2=K_2)}{P(X=K)} = \\ &= \frac{e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{K_1}}{K_1!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{K_2}}{K_2!}}{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^K}{K!}} = \frac{K!}{K_1! K_2!} \frac{\lambda_1^{K_1} \lambda_2^{K_2}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{K_1 + K_2}} = \\ &= \frac{K!}{K_1! K_2!} p_1^{K_1} p_2^{K_2} \quad (5.90) \end{aligned}$$

Wynik obliczeń daje lewą stronę wzoru (5.87).

Aproksymacja rozkładów dwumianowych rozkładem Poissona i twierdzenie o dodawaniu zapisane za pomocą wzoru (5.89) mają następujące znaczenie praktyczne: jeśli znane są wartości średnie wychodów wąskich frakcji gęstościowych lub ziarnowych $\nu_1, \dots, \nu_\zeta$:

$$E(\nu_1) = \frac{c_1 \lambda_1}{N}, \quad \dots \quad E(\nu_\zeta) = \frac{c_\zeta \lambda_\zeta}{N}$$

to rozkład prawdopodobieństwa wychodu frakcji sumarycznej jest określony wzorem (5.89), a parametrem rozkładu jest następująca suma:

$$\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_\zeta$$

5.7. ROZKŁADY PRAWDOPODOBIENSTWA FRAKCJI W PRÓBCE POMNIEJSZONEJ

Pomniejszanie próbki ogólnej do tzw. próbki laboratoryjnej, a następnie do próbki analitycznej to kolejna operacja, po pobieraniu próbki z populacji generalnej, wprowadzająca czynnik losowy do określania charakterystyki węgla. Liczność próbki pomniejszanej nie jest tak duża jak liczność populacji generalnej i warunki losowania nie zapewniają stałości prawdopodobieństwa. Można tu zastosować schemat losowań Pólya, w którym z populacji o licznosci N (próbka ogólna), w której jest K ziarn danego typu, losuje się bez zwracania N' ziarn, stanowiących próbkę pomniejszoną. Liczba K' ziarn badanego składnika w próbce pomniejszonej podlega rozkładowi hipergeometrycznemu:

$$P(K') = \frac{\binom{K}{K'} \binom{N-K}{N'-K'}}{\binom{N}{N'}} \quad (5.91)$$

Przy stałych wartościach N' oraz c zmienna losowa:

$$\nu' = cK'/N',$$

stanowiąca zawartość ziarn badanej frakcji w próbce pomniejszo-

nej również podlega rozkładowi hipergeometrycznemu, według formuły (5.91), ponieważ:

$$P(cK'/N') = P(K') \quad (5.92)$$

a wartość oczekiwana i wariancja wynoszą odpowiednio:

$$E(\nu') = cK/N = c p' \quad (5.93)$$

$$D^2(\nu') = c^2 p'(1-p') \left(-\frac{1}{N'} - \frac{1}{N}\right) \quad (5.94)$$

gdzie:

p' - prawdopodobieństwo wylosowania pojedynczego ziarna badanej frakcji z próbki ogólnej,

$$p' = K/N.$$

Stopień pomniejszania próbki wynosi:

$$Q = N/N',$$

więc wariancję (5.94) można zapisać następująco:

$$D^2(\nu') = c^2 p'(1-p') \frac{Q-1}{N} \quad (5.95)$$

Jeśli $Q \rightarrow 1$, to wariancja próbki pomniejszonej dąży do zera, a ze wzrostem Q wariancja rośnie liniowo. Ponadto wariancja zależy także od wartości prawdopodobieństwa p' , a więc od wartości ziarn badanej frakcji w próbce ogólnej, podobnie jak przy pobieraniu próbki z populacji generalnej (np. wzór (5.16)) i ze względu na wartość p' wariancja osiąga maksimum dla:

$$p' = 1/2.$$

Jeśli nie ma podstaw, aby przyjąć stałą wartość parametru c oraz stałą liczbę N ziarn podczas procesu pomniejszania próbek, to należy zastosować rozkłady złożone (rozdział 5.5), w których rozkład hipergeometryczny jest rozkładem warunkowym.

6. MODELE OPRÓBOWANIA DYNAMICZNEGO

6.1. UWAGI OGÓLNE

Dynamicznym pobieraniem próbek nazywać będziemy wydzielanie w dowolnej losowej chwili t pewnej masy węgla z ogólnego, transportowanego przenośnikiem, strumienia masy nadawy.

Model opróbowania dynamicznego jest ściśle związany z przyjętym opisem transportu masy, np. w postaci odpowiedniego procesu stochastycznego, oraz ze sposobem próbkowania tego procesu. Opis opróbowania dynamicznego dotyczy także tzw. ciągłego pomiaru zawartości popiołu, siarki lub wilgoci w węglu. Bowiem w określonej chwili czasu wiązka promieniowania obejmuje tylko pewną porcję badanej masy [34] i wynik pomiaru dotyczy procesu próbkowanego.

Biorąc pod uwagę rozpatrywane w rozdziałach 3-5 cechy ziarn węgla oraz stosowane przez technologów i automatyków wielkości opisujące nadawę do procesów wzbogacania, własności materiału obserwowane w pewnym stałym punkcie względem przesuwanego się przenośnika można przedstawić jako następującą funkcję losową (wektorowe pole losowe):

$$\{ \gamma(d, \delta, s, t), \alpha(d, \delta, s, t) \} \quad (6.1)$$

gdzie:

- γ - wychód frakcji ziarn o średnicy d i gęstości δ ,
- α - zapozielenie frakcji ziarn o średnicy d i gęstości δ ,
- s - wektor współrzędnych,
- t - czas.

W ustalonej chwili t_0 i ustalonym punkcie przenośnika s_0 wielkości γ i α pozostają funkcjami losowymi parametrów d i δ ,

a wektor losowy (6.1) jest wektorowym polem losowym z ciągłym parametrem (d, δ) .

Dla ustalonych wartości średnich (lub przedziałów zmian) średnicy $d_i (i=1, 2, \dots, k)$ oraz gęstości ziarn $\delta_j (j=1, 2, \dots, l)$, zaobserwowane w pewnym przedziale czasu $(0, T)$ wychody i zapopielenia poszczególnych frakcji gęstościowych i klas ziarnowych można uważać za realizację wielowymiarowego procesu stochastycznego:

$$\{ \gamma(d_i, \delta_j, s, t), \alpha(d_i, \delta_j, s, t) \} = \left[\gamma_{ij}(s, t), \alpha_{ij}(s, t) \right] \quad (6.2)$$

$$\begin{matrix} i=1, 2, \dots, k \\ j=1, 2, \dots, l \end{matrix}$$

Każda z funkcji losowych $\gamma_{ij}(s, t)$, $\alpha_{ij}(s, t)$ przyjmuje wartości rzeczywiste z przedziału $[0, 1]$.

W ustalonej chwili t_0 i ustalonym punkcie o współrzędnych s_0 każda z funkcji losowych (6.2) staje się zmienną losową, określającą zawartość frakcji wybranego typu ziarn, znajdujących się na przenośniku w pewnym otoczeniu Δs punktu s_0 :

$$\left[\gamma_{ij}(s_0, t_0) \right] = \left[\frac{m_{ij}(s_0, t_0, \Delta s)}{m(s_0, t_0, \Delta s)} \right] \quad (6.2a)$$

$$\begin{matrix} i=1, 2, \dots, k \\ j=1, 2, \dots, l \end{matrix}$$

$$\left[\alpha_{ij}(s_0, t_0) \right] = \left[\frac{m_{\alpha, ij}(s_0, t_0, \Delta s)}{m_{ij}(s_0, t_0, \Delta s)} \right] \quad (6.2b)$$

$$\begin{matrix} i=1, 2, \dots, k \\ j=1, 2, \dots, l \end{matrix}$$

gdzie:

m_{ij} - masa ziarn j-tej frakcji gęstościowej, i-tej klasy ziarnowej,

$m_{\alpha, ij}$ - masa ziarn skały płonnej wśród ziarn j-tej frakcji gęstościowej, i-tej klasy ziarnowej,

m - ogólna masa ziarn.

Uwzględniając (3.1), (3.11)-(3.13), (3.33) w wyrażeniach (6.2) - (6.2b) widzimy, że podstawowymi procesami losowymi są liczby ziarn o określonych własnościach:

$$n_{ij}(t,s,\Delta s), n(t,s,\Delta s), k_{ij}(t,s,\Delta s) \quad (6.3)$$

w strumieniu masy na przenośniku.

Jest oczywiste, że funkcja losowa jest określona wtedy [19], [41], [42], [12], [45], [46], gdy dana jest miara probabilistyczna dla dowolnych wartości argumentów (d, δ, s, t) .

Miarę probabilistyczną procesów stochastycznych określają: łączna gęstość prawdopodobieństwa, funkcja charakterystyczna lub ciąg nieskończony dystrybuant skończenie wymiarowych dla dowolnych wartości argumentów z przedziału ich zmienności. Ponieważ określenie miary probabilistycznej procesów (6.1), (6.2) nie jest możliwe, a w każdym razie mało przydatne w zadaniach praktycznych, często przyjmuje się dodatkowe założenia o procesie, ułatwiające określenie miary. Zakłada się np. stacjonarność, ergodyczność, niezależność poszczególnych składowych wektora losowego (6.2) lub też, że proces opisujący zmienne w czasie wybrane cechy ziarn węgla jest procesem k -tego rzędu. Ta ostatnia własność oznacza, że znajomość tylko k -wymiarowych dystrybuant umożliwia wyznaczenie ciągu n -wymiarowych dystrybuant tego procesu, przy czym n może być dowolnie duże.

Modelami procesów k -tego rzędu są np.:

- dla $k=1$, proces bezwzględnie losowy (szum biały);
- dla $k=2$, procesy Poissona, procesy Markowa, procesy gaussowskie.

Opis procesu przez podanie miary probabilistycznej nosi nazwę modelu zupełnego [42], w odróżnieniu od modelu niezupełnego danego w postaci np. momentów r -tego rzędu:

$$m_{i_1, i_2, \dots, i_n} = E \{ [X(t_1)]^{i_1} [X(t_2)]^{i_2} \dots [X(t_n)]^{i_n} \} \quad (6.3a)$$

przy czym $r = i_1 + i_2 + \dots + i_n$.

Dla procesów reprezentujących zmienne w czasie własności nadawcy w podejściu inżynierskim najczęściej stosuje się momenty zwykłe lub centralne pierwszego i drugiego rzędu, tzn. wartość średnią, wariancję i funkcję korelacyjną. Znajomość tych momentów umożliwia analizę korelacyjną procesów, dogodną przy opisie w zakresie teorii regulacji.

Ponadto spotyka się modele przedstawiające proces (6.2) lub proces dyskretny $\{\gamma_{ij}(t_k), \alpha_{ij}(t_k)\}$ jako sygnał wyjściowy pewnego deterministycznego układu liniowego o sygnale wejściowym w postaci szumu białego. Takie podejście może być przydatne w przypadku tworzenia dyskretnych algorytmów sterowania procesami wzbogacania węgla i umożliwia stosunkowo dogodną identyfikację modeli procesów [32], [56].

Założenie o ergodyczności jest na ogół przyjmowane przy analizie wszystkich danych eksperymentalnych [38], [14], [15], gdy stanowią one tylko jedną realizację, oraz przy analizie teoretycznej błędów pomiarowych [8], [18].

Dotychczas nie podejmowano próby wyznaczania miary probabilistycznej procesów (6.1)–(6.2b), ujmujących zmienność w czasie łącznej charakterystyki węgla. Należy natomiast podkreślić, że w pracach [1] i [44] autorzy tworzą opis procesów wzbogacania węgla, stosując wybrane modele procesów stochastycznych, operując miarą probabilistyczną zależną od czasu.

W rozdziale 6 będą rozpatrywane pewne wybrane modele procesów stochastycznych w zastosowaniu do opisu opróbowania węgla, pozwalające uzyskać miarę probabilistyczną procesów (6.3).

6.2. MODEL OPRÓBOWANIA Z WYKORZYSTANIEM PROCESÓW POISSONA

6.2.1. Rozmieszczenie ziarn węgla w czasie jako poissonowski potok zdarzeń

Podstawowe znaczenie dla tworzonych w tym rozdziale modeli będzie miało przyjęcie pewnych założeń co do rozmieszczenia ziarn węgla na przenośniku. Podejście podobne stosuje się dla opisu własności pewnych losowych zbiorów punktów w fizyce, np. energii cząstek promieniowania kosmicznego, stanu licznika Geigera itp. [17].

Założmy więc, że:

1) n ziarn danego typu zostało kolejno, niezależnie jedno od drugiego rozmieszczonych losowo na długości l przenośnika (na powierzchni s , w objętości v) lub, co jest równoważne przy stałej prędkości taśmy, w przedziale $(0, T)$ tworzą odpowiedni zbiór punktów na osi czasu;

2) prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że ziarno znajduje się w przedziale Δt , nie zależy od położenia tego przedziału na osi t ; wynosi:

$$p = \frac{\Delta t}{T} \quad (6.4)$$

i jest jednakowe dla każdego ziarna z danej frakcji.

W przypadku rozkładu ziaren na odcinku długości l , powierzchni s lub objętości v mamy odpowiednio:

$$p = \Delta l / l ; \quad p = \Delta s / s ; \quad p = \Delta v / v.$$

Zatem, prawdopodobieństwo wystąpienia k ziarn w przedziale Δt , podczas gdy n ($n \geq k$) ziarn znajduje się w przedziale $(0, T)$, wynosi:

$$P\{k \text{ ziarn w przedziale } \Delta t\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (6.5)$$

Na mocy twierdzenia Poissona, jeśli długość przedziału T rośnie oraz liczba n ziarn, znajdujących się w nim, rośnie w taki sposób, że:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{n}{T} = \lambda = \text{const} \quad (6.6)$$

wówczas [35]:

$$P\{k \text{ ziarn w przedziale } \Delta t\} = P(k, \Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!} \quad (6.7)$$

Parametr λ nazywa się intensywnością i określa spodziewana liczbę ziarn w przedziale czasu o długości $\Delta t=1$. Wartość λ jest zależna od zawartości danej frakcji w materiale (rozdz. 5.6.2.) oraz od grubości warstwy materiału.

Jeśli prawdopodobieństwo p wylosowania pojedynczego ziarna nie jest stałe, lecz na odcinku t_2-t_1 jest określone pewną całką:

$$p = \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t) dt \quad (6.8)$$

na skutek zmiennej w czasie zawartości ziarn danego typu w nadawie lub zmiany obciążenia przenośnika, wówczas także intensywność λ jest zależna od t :

$$\lambda(t) = n\alpha(t) \quad (6.9)$$

a prawdopodobieństwo otrzymania k ziarn w przedziale (t_1, t_2) wynosi [35]:

$$P(k, t_2-t_1) = \frac{\left[\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \right]^k}{k!} \exp \left[- \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \right] \quad (6.10)$$

Niech teraz X_t oznacza liczbę ziarn zaobserwowanych lub zmierzonych przez detektor pomiarowy, kamerę lub inny przyrząd w materiale podlegającym opróbowaniu, które zostały przeniesione przez przenośnik w przedziale $\langle 0, t \rangle$, $0 \leq t < \infty$.

$\{X_t, 0 \leq t < \infty\}$ jest procesem stochastycznym, gdzie dla każdego t zmienna losowa X_t przyjmuje wartości całkowite nieujemne $i = 0, 1, 2, \dots$

O procesie X_t zakładamy, że:

1° $\{X_t, 0 \leq t < \infty\}$ jest procesem o przyrostach niezależnych, co oznacza, że w rozłącznych przedziałach czasowych:

$$\langle t_0, t_1 \rangle, \langle t_1, t_2 \rangle, \dots, \langle t_{n-1}, t_n \rangle$$

zmienne losowe:

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

są niezależnymi zmiennymi losowymi, co implikuje następującą równość prawdopodobieństw:

$$\begin{aligned} P \{ X_{t_1} - X_{t_0} = k_1, X_{t_2} - X_{t_1} = k_2, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = k_n \} = \\ = P \{ X_{t_1} - X_{t_0} = k_1 \} \dots P \{ X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = k_n \} \end{aligned}$$

2° $\{X_t, 0 \leq t < \infty\}$ jest procesem o przyrostach jednorodnych, co oznacza, że prawdopodobieństwo pojawienia się określonej ilości ziarn w przedziałach czasowych o jednakowej długości jest stałe. Prawdopodobieństwo:

$$w_k(t) = P(X_{t_2} - X_{t_1} = k)$$

zależy tylko od długości przedziału $\langle t_1, t_2 \rangle$;

3° $\{X_t, 0 \leq t < \infty\}$ jest procesem prostym, więc prawdopodobieństwo pojawienia się badanego ziarna w małym przedziale czasowym t ($t \rightarrow 0$) jest równe λ , czyli:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{w_1(t)}{t} = \frac{P\{X_t=1\}}{t} = \frac{\lambda t + o(t)}{t} = \lambda$$

oraz:

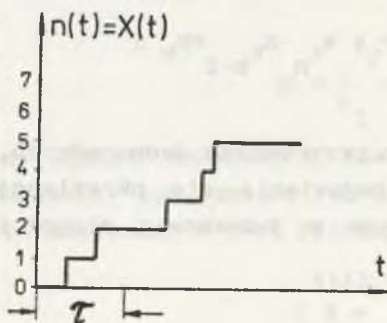
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - w_0(t) - w_1(t)}{t} = 0,$$

co oznacza, że prawdopodobieństwo pojawienia się co najmniej dwóch ziarn w przedziale t ($t \rightarrow 0$) jest rzędu $o(t)$.

Przy tych założeniach dla dowolnego, ustalonego punktu t , ($0 \leq t < \infty$) X_t jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λt [12]:

$$P\{X_t = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (6.11)$$

Każda realizacja tego procesu jest funkcją schodkową (rys.6.1) ze stopniami równymi 1, występującymi w losowych punktach t_i .



Rys.6.1. Realizacja procesu Poissona
Fig.6.1. Realization of a Poisson process

Wartością średnią procesu X_t jest średnia ilość ziarn danego typu w przedziale $(0, t)$ i wynosi:

$$E\{X_t\} = \lambda t \quad (6.12)$$

Pozostałe parametry procesu Poissona są następujące [35]:

$$E\{(X_t)^2\} = \lambda^2 t^2 + \lambda t \quad (6.13)$$

$$D_x^2(t) = E\{[X_t - E(X_t)]^2\} = \lambda t \quad (6.14)$$

$$R_X(t_1, t_2) = E \{ X_{t_1} X_{t_2} \} =$$

$$= \begin{cases} \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2, & t_1 \geq t_2 \\ \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2, & t_1 \leq t_2 \end{cases} \quad (6.15)$$

$$\text{Cov}_X(t_1, t_2) = E \{ [X_{t_1} - E(X_{t_1})][X_{t_2} - E(X_{t_2})] \} =$$

$$= \begin{cases} \lambda t_2, & t_1 \geq t_2 \\ \lambda t_1, & t_1 \leq t_2 \end{cases} \quad (6.15a)$$

Proces Poissona ma także własności procesów Markowa, bowiem funkcja prawdopodobieństwa przejścia, określająca następujące prawdopodobieństwo warunkowe:

$$p_{ij}(t) = P(X_{t_2} = j | X_{t_1} = i) = \frac{P(X_{t_1} = i, X_{t_2} - X_{t_1} = j - i)}{P(X_{t_1} = i)} \quad (6.16)$$

na mocy własności 1° oraz (6.11) jest równa:

$$p_{ij}(t) = P(X_{t_2} - X_{t_1} = j - i) = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \quad (6.17)$$

Dla przypadku, gdy gęstość prawdopodobieństwa (6.4) rozmieszczenia ziarn na przenośniku nie jest jednostajna, lecz określona wzorem (6.8), czyli własność 2° procesu nie jest spełniona, wartość oczekiwana i funkcja autokorelacji wynoszą [35]:

$$E\{X_t\} = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \quad (6.18)$$

$$R_X(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} \lambda(t) dt \left[1 + \int_0^{t_1} \lambda(t) dt \right], \quad (6.19)$$

dla $t_1 > t_2$.

Gdy $t_1 < t_2$, zmienne t_1 i t_2 we wzorze (6.19) zamieniają się.

Funkcja autokowariancji, po uwzględnieniu (6.18) i (6.19), wynosi:

$$\text{Cov}_X(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} \lambda(t) dt, \quad \text{dla } t_1 > t_2 \quad (6.20)$$

Funkcja autokowariancji jest określona na części wspólnej przedziałów $(0, t_1)$ i $(0, t_2)$.

6.2.2. Próbkowanie procesów Poissona

6.2.2.1. Opis opróbowania, gdy strumień ziarn jest jednorodnym procesem Poissona

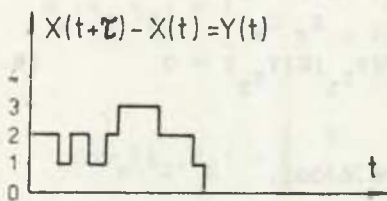
Niech X_t oznacza jednorodny proces Poissona, reprezentujący liczbę pojawiających się ziarn danego typu w przedziale $(0, t)$. Aby określić model pobierania próbki w dowolnej chwili t przez czas τ , utwórzmy nowy proces:

$$Y_t = X(t+\tau) - X(t) = X_{t+\tau} - X_t \quad (6.21)$$

który określa liczbę ziarn w przedziale czasu $(t, t+\tau)$.

Y_t przyjmuje wartości całkowite nieujemne i zależy od τ (rys. 6.2.). Dla ustalonej chwili t i wartości τ zmienna losowa $Y(t)$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda\tau$:

$$P(Y_t) = P\{X_{t+\tau} - X_t = k\} = e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} \quad (6.22)$$



Rys.6.2. Proces różnic procesu Poissona

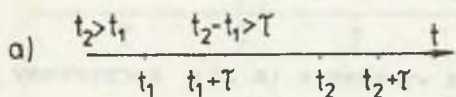
Fig.6.2. The increments process of a Poisson process

Wartość oczekiwana procesu Y_t wynosi:

$$E\{Y_t\} = E\{X_{t+\tau}\} - E\{X_t\} = \lambda\tau \quad (6.23)$$

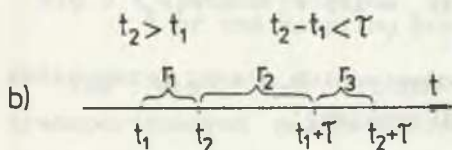
Funkcje autokorelacji i autokowariancji mogą być wyznaczone następująco:

$$R_Y(t_1, t_2) = E\{Y_{t_1} Y_{t_2}\} = E\left[\left(X_{t_1+\tau} - X_{t_1}\right) \left(X_{t_2+\tau} - X_{t_2}\right)\right]$$



Rys.6.3. Przedziały czasowe dla wyznaczenia funkcji autokorelacji

Fig.6.3. Time intervals for determining an autocorrelation function



Należy rozpatrzyć następujące przypadki:

a) niech $t_2 > t_1$, $t_2 - t_1 > \tau$ (rys.6.3a), to na mocy własności 1° procesu X_t mamy:

$$R_y(t_1, t_2) = E\{X_{t_1+\tau} - X_{t_1}\} E\{X_{t_2+\tau} - X_{t_2}\} = \lambda^2 \tau^2 \quad (6.24)$$

$$\text{Cov}_y(t_1, t_2) = R_y(t_1, t_2) - E\{Y_{t_1}\}E\{Y_{t_2}\} = 0 \quad (6.25)$$

b) niech $t_2 > t_1$, $t_2 - t_1 < \tau$ (rys. 6.3b).

Oznaczmy długości przedziałów czasowych:

$$r_1 = t_2 - t_1, \quad r_2 = (t_1 + \tau) - t_2, \quad r_3 = (t_2 + \tau) - (t_1 + \tau) \quad (6.26)$$

Iloczyn zmiennych losowych $Y_{t_1} Y_{t_2}$ należy zamienić na zależność określoną na zmiennych losowych z rozłącznych przedziałów czasowych:

$$\begin{aligned} Y_{t_1} Y_{t_2} &= (X_{t_1+\tau} - X_{t_1})(X_{t_2+\tau} - X_{t_2}) = (X_{r_2} + X_{r_1})(X_{r_3} + X_{r_2}) = \\ &= X_{r_2} X_{r_3} + X_{r_2}^2 + X_{r_1} X_{r_3} + X_{r_1} X_{r_2} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Obliczając wartość oczekiwaną wyrażenia (6.27), korzystamy z własności 1° procesu X_t i wzorów (6.12), (6.13):

$$E\{Y_{t_1} Y_{t_2}\} = \lambda^2 r_2 r_3 + \lambda^2 r_2^2 + \lambda r_2 + \lambda^2 r_1 r_3 + \lambda^2 r_1 r_2$$

Po podstawieniu za r_1, r_2, r_3 odpowiednich granic przedziałów (6.26) i uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy:

$$R_y(t_1, t_2) = \lambda^2 \tau^2 + \lambda [\tau - (t_2 - t_1)] \quad (6.28)$$

$$\text{Cov}_y(t_1, t_2) = \lambda [\tau - (t_2 - t_1)] \quad (6.29)$$

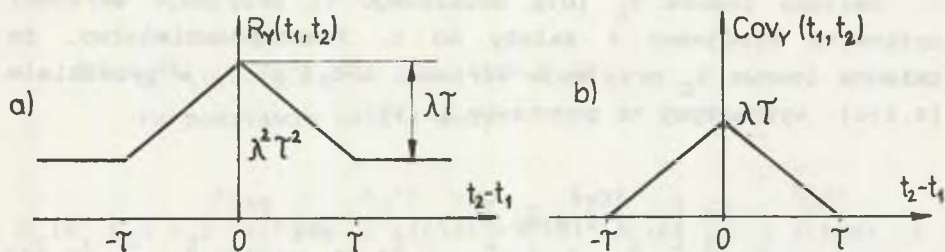
c) Dla $t_1 > t_2$ postępujemy podobnie jak w punktach a i b.

Ostatecznie otrzymujemy następujące wyrażenia na funkcje autokorelacji i autokowariancji procesu próbkowania Y_t , zdefiniowanego wzorem (6.21):

$$R_y(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda \tau, & |t_2 - t_1| \geq \tau \\ \lambda^2 \tau^2 + \lambda[\tau - |t_2 - t_1|], & |t_2 - t_1| < \tau \end{cases} \quad (6.30)$$

$$\text{Cov}_y(t_1, t_2) = \begin{cases} 0, & |t_2 - t_1| \geq \tau \\ \lambda [\tau - |t_2 - t_1|], & |t_2 - t_1| < \tau \end{cases} \quad (6.31)$$

Wykresy funkcji (6.30) i (6.31) zostały przedstawione na rysunku 6.4.



Rys.6.4. Wykresy funkcji autokorelacji (a) i autokowariancji (b) procesu próbkowania

Fig.6.4. Autocorrelation (a) and autocovariance (b) curves of the sampling process

Tak więc, gdy liczba wybranego typu ziarn węgla transportowanych przenośnikiem jest przedstawiona w postaci jednorodnego procesu Poissona X_t , o intensywności λ , to proces próbkowany Y_t określony wzorem (6.21) posiada rozkład Poissona z parametrem $\lambda \tau$, wartość oczekiwaną równą $\lambda \tau$, a funkcje autokorelacji i autokowariancji mają kształty impulsów trójkątnych o wymiarach zależnych od λ i czasu pobierania próbki τ .

6.2.2.2. Opis opróbowania, gdy strumień ziarn jest niejednorodnym procesem Poissona

Niech teraz X_t ($0 \leq t < \infty$) oznacza niejednorodny proces Poissona o intensywności $\lambda(t)$. X_t oznacza liczbę danego typu ziarn węgla zaistniałych na przenośniku w przedziale czasu $(0, t)$. Liczbę ziarn pobranych do próbki w przedziale czasu $(t, t+\tau)$ określa następujący proces:

$$Y_t = X(t+\tau) - X(t) = X_{t+\tau} - X_t \quad (6.32)$$

Zmienna losowa Y_t (dla ustalonego t) przyjmuje wartości całkowite nieujemne i zależy od τ . Prawdopodobieństwo, że zmienna losowa Y_t przyjmuje wartości $k=0, 1, 2, \dots$ w przedziale $(t, t+\tau)$, wyznaczmy na podstawie (6.10):

$$P\{Y_t=k, \tau\} = \frac{\left[\int_t^{t+\tau} \lambda(p) dp \right]^k}{k!} \exp \left[- \int_t^{t+\tau} \lambda(p) dp \right] \quad (6.33)$$

gdzie p - zmienna całkowania.

Wartość oczekiwana procesu na mocy addytywności operacji całkowania wynosi:

$$E\{Y_t\} = E\{X_{t+\tau} - X_t\} = E\{X_{t+\tau}\} - E\{X_t\} = \int_t^{t+\tau} \lambda(p) dp \quad (6.34)$$

Funkcję autokorelacji:

$$R_y(t_1, t_2) = E\{Y_{t_1} Y_{t_2}\} = E\left[\left(X_{t_1+\tau} - X_{t_1}\right)\left(X_{t_2+\tau} - X_{t_2}\right)\right] \quad (6.35)$$

obliczymy, postępując podobnie jak dla próbkowania jednorodnego procesu Poissona. Najpierw założymy, że proces jest określony na rozłącznych przedziałach czasowych:

$$a) \quad t_2 > t_1, \quad t_2 - t_1 > \tau \quad (\text{rys. 6.3a})$$

$$\begin{aligned}
 R_y(t_1, t_2) &= E\{X_{t_1+\tau} - X_{t_1}\} E\{X_{t_2+\tau} - X_{t_1}\} = \\
 &= \int_{t_1}^{t_1+\tau} \lambda(t) dt \int_{t_2}^{t_2+\tau} \lambda(t) dt \quad (6.36)
 \end{aligned}$$

Korzystając z (6.35), mamy:

$$\text{Cov}_y(t_1, t_2) = R_y(t_1, t_2) - E\{Y_{t_1}\}E\{Y_{t_2}\} = 0 \quad (6.37)$$

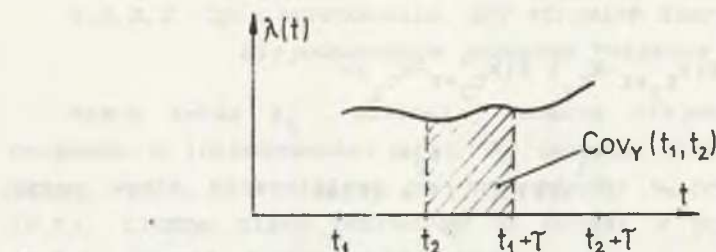
b) $t_2 > t_1$, $t_2 - t_1 < \tau$ (rys. 6.3b)

Na podstawie (6.27) mamy:

$$\begin{aligned}
 R_y(t_1, t_2) &= \int_{t_2}^{t_1+\tau} \lambda(t) dt \int_{t_1+\tau}^{t_2+\tau} \lambda(t) dt + \left[\int_{t_2}^{t_1+\tau} \lambda(t) dt \right]^2 + \int_{t_2}^{t_1+\tau} \lambda(t) dt + \\
 &+ \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \int_{t_1+\tau}^{t_2+\tau} \lambda(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \int_{t_2}^{t_1+\tau} \lambda(t) dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_1+\tau} \lambda(t) dt \int_{t_2}^{t_2+\tau} \lambda(t) dt + \int_{t_2}^{t_1+\tau} \lambda(t) dt \quad (6.38)
 \end{aligned}$$

$$\text{Cov}_y(t_1, t_2) = R_y(t_1, t_2) - E\{Y_{t_1}\}E\{Y_{t_2}\} = \int_{t_2}^{t_1+\tau} \lambda(t) dt \quad (6.39)$$

Zatem funkcja autokowariancji jest różna od zera tylko na części wspólnej przedziałów $(t_1, t_1+\tau)$ i $(t_2, t_2+\tau)$ (rys. 6.5).



Rys.6.5. Ilustracja do wzoru (6.39)

Fig.6.5. Illustration to the formula (6.39)

Gdy $t_2 - t_1 \rightarrow 0$, to:

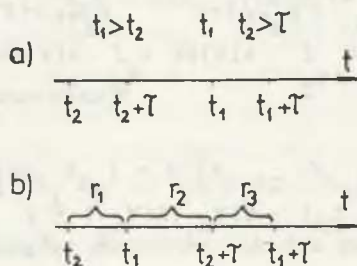
$$\text{Cov}_Y(t_1, t_2) \rightarrow \int_{t_1}^{t_1+\tau} \lambda(t) dt \quad (6.40)$$

c) Niech $t_1 > t_2$, $t_1 - t_2 > \tau$ (rys.6.6a).

Ponieważ przedziały $(t_2, t_2 + \tau)$ i $(t_1, t_1 + \tau)$ są rozłączne, możemy wprost wyliczyć:

$$R_Y(t_2, t_1) = E(Y_{t_2} Y_{t_1}) = \int_{t_2}^{t_2+\tau} \lambda(t) dt \int_{t_1}^{t_1+\tau} \lambda(t) dt \quad (6.41)$$

$$\text{Cov}_Y(t_2, t_1) = 0 \quad (6.42)$$



Rys.6.6. Przedziały czasowe dla wyznaczenia funkcji autokorelacji

Fig.6.6. Time intervals for determining an autocorrelation function

d) Załóżmy, że $t_1 > t_2, t_1 - t_2 < \tau$ (rys. 6.6b) i oznaczmy długości przedziałów czasowych:

$$r_1 = t_1 - t_2, \quad r_2 = (t_2 + \tau) - t_1, \quad r_3 = (t_1 + \tau) - (t_2 + \tau) \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} E\{Y_{t_2} Y_{t_1}\} &= E\{[X_{t_2+\tau} - X_{t_2}][X_{t_1+\tau} - X_{t_1}]\} = E\{(X_{r_1} + X_{r_2})(X_{r_3} + X_{r_2})\} = \\ &= E\{X_{r_1}X_{r_3} + X_{r_2}X_{r_3} + X_{r_1}X_{r_2} + X_{r_2}^2\} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Poszczególne iloczyny zmiennych losowych w wyrażeniu (6.44) są określone na przedziałach czasowych rozłącznych.

Zatem wartość oczekiwana (6.44), po uwzględnieniu własności 1° procesu X_t , wzoru (6.34) i addytywności całki, wynosi:

$$E\{Y_{t_2} Y_{t_1}\} = \int_{t_2}^{t_2+\tau} \lambda(t) dt \int_{t_1}^{t_1+\tau} \lambda(t) dt + \int_{t_1}^{t_2+\tau} \lambda(t) dt \quad (6.45)$$

Funkcja autokowariancji jest równa:

$$\text{Cov}_Y(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2+\tau} \lambda(t) dt \quad (6.46)$$

Ostatecznie, funkcja autokowariancji, funkcja autokorelacji i rozkład prawdopodobieństwa liczby ziarn pobranych do próbki zależą od:

- intensywności $\lambda(t)$ procesu $X(t)$ rozmieszczenia ziaren na przenośniku,
- czasu pobierania próbki τ ,

a funkcje autokorelacji i autokowariancji zależą także od czasu, tzn. od t_1 i t_2 . Ponadto, jeśli wartość bezwzględna różnicy $|t_2 - t_1|$ jest większa od czasu pobierania próbki τ , to funkcja

autokowariancji jest równa zeru, a jeśli $|t_2 - t_1| < \tau$, wówczas funkcja autokowariancji jest określona na części wspólnej przedziałów $(t_1, t_1 + \tau)$ i $(t_2, t_2 + \tau)$, a dla $t_1 = t_2 = t$:

$$D_Y^2(t) = \int_t^{t+\tau} \lambda(p) dp \quad (6.47)$$

6.3. MODEL OPRÓBOWANIA Z ZASTOSOWANIEM PROCESÓW SYGNAŁOWYCH

Poniższy opis procesu opróbowania jest odpowiedni dla przyrządów realizujących tzw. pomiar ciągły zawartości określonego składnika w strudze materiału uziarnionego. W przyrządach radiometrycznych, mikrofalowych itp. wiązka promieniowania obejmuje w każdej chwili t pewną porcję materiału, nie obejmując całego strumienia materiału na przenośniku.

Weźmy pod uwagę inny proces sygnałowy, uwzględniający nie tylko, jak proces Poissona pojawiają się ziarna w określonym miejscu przenośnika w różnych chwilach czasowych, ale także zjawisko zaniku ziarn. Niech 'pojawianie się' ziarn w określonym punkcie przenośnika podlega formule procesu Poissona o intensywności λ , spełniającego warunki $1^\circ - 3^\circ$ (rozdz. 6.2.1). Ponadto bierzemy pod uwagę czas przebywania pojedynczego ziarna w zasięgu przyrządu pomiarowego, określony zmienną losową T o rozkładzie wykładniczym:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \mu e^{-\mu t} & t \geq 0 \end{cases} \quad (6.48)$$

Wybór rozkładu ma uzasadnienie praktyczne, ponieważ najwięcej jest ziarn najdrobniejszych. Przedział zmienności $t \in (0, t_{mx})$ oraz parametr μ są związane z rozmiarami największych ziarn, prędkością przenośnika i parametrami przyrządu.

Proces $\{Y_t, 0 \leq t < \infty\}$ oznacza ilość ziarn w chwili t . (Zauważmy, że proces X_t oznaczał liczbę ziarn w przedziale $(0, t)$). Interesuje nas prawdopodobieństwo całkowite $w_j(t)$ tego, że w chwili t proces znajduje się w stanie j :

$$w_j(t) = P(Y_t = j), \quad j=0,1,2,\dots \quad (6.49)$$

W tym celu zauważmy, że [12]:

- proces Y_t może być w chwili $t+\Delta t$ w stanie 0, jeśli w chwili t nie było żadnego ziarna i w przedziale $(t, t+\Delta t)$ nie pojawiło się nowe ziarno; prawdopodobieństwo tego określimy, korzystając z własności 3° procesu X_t :

$$w_0(t) [1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)];$$

lub też, jeśli proces był w chwili t w stanie 1 i w przedziale $(t, t+\Delta t)$, ziarno przesunęło się wraz z przenośnikiem (zanikło); prawdopodobieństwo tego wynosi:

$$w_1(t) [\mu \Delta t + o(\Delta t)];$$

- liczba ziarn w chwili $t+\Delta t$ może być równa $j \geq 1$, jeżeli proces Y_t był w chwili t w stanie j , a w przedziale $(t, t+\Delta t)$ nie przybyło i nie ubyło ani jedno ziarno:

$$w_j(t) [1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)] [1 - \mu j \Delta t + o(\Delta t)]$$

lub w chwili t proces był w stanie $j-1$, a w przedziale $(t, t+\Delta t)$ przybyło jedno ziarno:

$$w_{j-1}(t) [\lambda \Delta t + o(\Delta t)]$$

badź proces był w chwili t w stanie $j+1$ i jedno ziarno zanikło:

$$w_{j+1}(t) [\mu (j+1) \Delta t + o(\Delta t)];$$

- prawdopodobieństwo wszystkich innych możliwości jest równe $o(\Delta t)$.

Uwzględniając powyższe rozważania, prawdopodobieństwo całkowite tego, że liczba ziarn w chwili $t+\Delta t$ wynosi $j=0,1,2,\dots$, zapiszemy następującymi równaniami:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0(t+\Delta t) = w_0(t)[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)] + w_1(t)[\mu\Delta t + o(\Delta t)] + \\ \quad + o(\Delta t) \\ w_j(t+\Delta t) = w_j(t) [1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)] [\mu\Delta t + o(\Delta t)] + \\ \quad + w_{j-1}(t)[\lambda\Delta t + o(\Delta t)] + w_{j+1}(t)[\mu(j+1)\Delta t + o(\Delta t)] + \\ \quad + o(\Delta t) \end{array} \right. \quad (6.50)$$

$$(j=1,2,\dots)$$

Dzieląc powyższe równości przez Δt i przechodząc do granicy przy $\Delta t \rightarrow 0$, otrzymujemy równania różniczkowe:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0'(t) = -\lambda w_0(t) + \mu w_1(t) \\ w_j'(t) = \lambda w_{j-1}(t) - (\lambda + j\mu)w_j(t) + \mu(j+1)w_{j+1}(t) \end{array} \right. \quad (6.51)$$

$$(j=1,2,\dots)$$

Jest to nieskończony układ liniowych równań różniczkowych. W celu uzyskania rozwiązania tego układu zostanie zastosowana funkcja tworząca prawdopodobieństwa [12]:

$$f(t,s) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(t) s^j \quad (6.52)$$

Założmy warunek początkowy, tzn. że w chwili $t=0$ z prawdopodobieństwem 1 było i ziaren:

$$c_1(0)=1, \quad f(0,s) = s^1 \quad (6.53)$$

Różniczkując po czasie wyrażenie (6.52), uzyskujemy następujące liniowe równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego:

$$-\frac{\partial f(t,s)}{\partial t} = -\lambda(1-s) f(t,s) + \mu(1-s) - \frac{\partial f(t,s)}{\partial s} \quad (6.54)$$

Rozwiązaniem równania podanym w pracy [12] jest funkcja tworząca:

$$f(t,s) = [1-(1-s)e^{-\mu t}]^i \exp \left[-\frac{\lambda}{\mu} - (1-s)(1-e^{-\mu t}) \right] \quad (6.55)$$

Ze wzoru (6.55) wynika, że dla każdego t , Y_t jest sumą dwóch niezależnych zmiennych losowych, z których jedna ma rozkład Poissona z parametrem:

$$E(Y_1) = D^2(Y_1) = -\frac{\lambda}{\mu} - (1-e^{-\mu t}) \quad (6.56)$$

a druga rozkład dwumianowy z parametrem $p = e^{-\mu t}$.

Prawdopodobieństwo całkowite, że w chwili t w próbce znajduje się j ziarn badanego typu, można określić korzystając ze wzoru Palma [12]:

$$w_j(t) = \exp \left[-\frac{\lambda}{\mu} - (1-e^{-\mu t}) \right] \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{k} \left(-\frac{\lambda}{\mu} \right)^{j-k} \cdot \frac{e^{-\mu t k} (1-e^{-\mu t})^{i+j-2k}}{(j-k)!} \quad (j=0,1,2,\dots) \quad (6.57)$$

Wartość oczekiwana procesu Y_t wynosi:

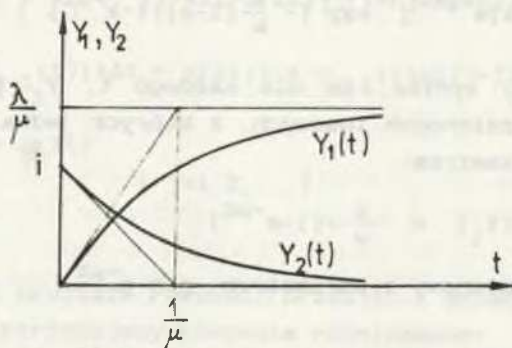
$$E(Y_t) = -\frac{\lambda}{\mu} - (1-e^{-\mu t}) + i e^{-\mu t} \quad (6.58)$$

a wariancja jest równa:

$$D^2(Y_t) = (1-e^{-\mu t}) \left(-\frac{\lambda}{\mu} + i e^{-\mu t} \right) \quad (6.59)$$

Na rys.6.7 przedstawione zostały wykresy funkcji:

$$Y_1 = -\frac{\lambda}{\mu} - (1-e^{-\mu t}) \quad \text{oraz} \quad Y_2 = i e^{-\mu t}$$



Rys.6.7. Wykresy funkcji pomocniczych $Y_1 = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$
 $Y_2 = i e^{-\mu t}$

Fig.6.7. Graphs of Y_1 and Y_2 auxiliary functions

Wartość oczekiwana (6.58) może być zapisana w postaci sumy:

$$E(Y_t) = Y_1 + Y_2 \quad (6.60)$$

a wariancja (6.59) w postaci wyrażenia:

$$D^2(Y_t) = Y_1 \left(\frac{\lambda}{\mu} + Y_2 \right) \quad (6.61)$$

Ze wzorów (6.57)-(6.61) wynika, że:

- prawdopodobieństwo $w_j(t)$ tego, że w chwili t liczba ziarn w obrębie próbobiornika wynosi j , oraz wartość oczekiwana i wariancja są zależne od czasu, wartości początkowej (i) procesu, a także parametrów μ oraz λ ;
- gdy $t \rightarrow \infty$, co oznacza nieskończenie długi czas próbkowania, to rozkład liczby ziaren $w_j(t)$ jest zbieżny do rozkładu Poissona o wartości przeciętnej λ/μ , niezależnie od stanu początkowego:

$$w_j = \lim_{t \rightarrow \infty} w_j(t) = \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} \exp\left(-\frac{\lambda}{\mu}\right) \quad (6.62)$$

(j=0,1,2,...)

- gdy wartość początkowa procesu, tzn. liczba ziarn dla $t=0$, jest równa zero ($i=0$), to Y_t ma rozkład Poissona:

$$w_j(t) = \exp\left[-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right] \frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right]^j}{j!} \quad (6.63)$$

(j=0,1,2,...)

o wartości oczekiwanej i wariancji równych:

$$E(Y_t) = D^2(Y_t) = \frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t}) = Y_1 \quad (6.64)$$

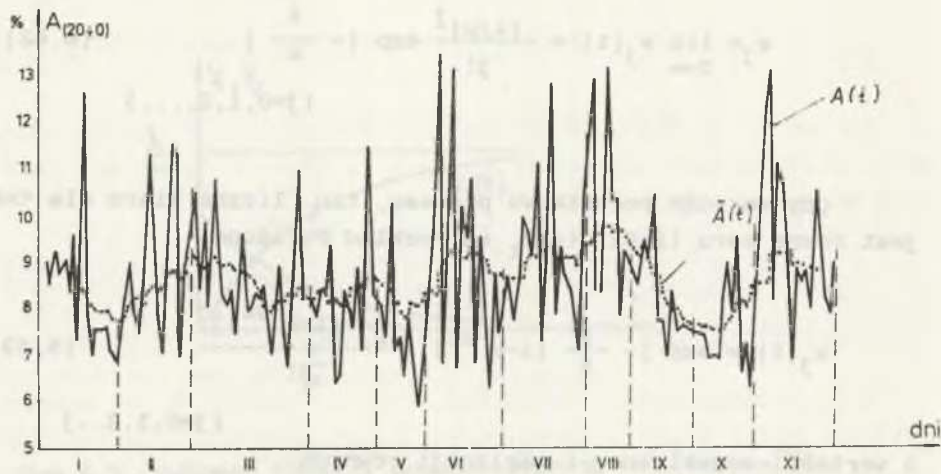
Na zakończenie rozważań teoretycznych dotyczących charakteru zmienności procesów, będących modelami wybranych cech węgla w tzw. próbkach dynamicznych, zostaną przytoczone przykładowe badania doświadczalne.

6.4. PRZYKŁAD

Pobieranie próbek węgla z koncentratów produkowanych w zakładach przeróbki mechanicznej węgla i oznaczanie w nich popiołu wchodzi w zakres normalnej kontroli procesu produkcyjnego.

Na rys. 6.8 przedstawiono wartości zapopielenia w 158 próbkach koncentratu z osadzarki miałowej, wzbogacającej węgiel o uziarnieniu 0-20 mm. Próbkę pobierano w nieregularnych odstępach czasu (1-2 h), w liczbie kilkunastu na dobę, przez 11 dni.

Przedstawiony na rys. 6.8 przebieg stanowi realizację pewnego procesu stochastycznego, charakteryzującego się dużą zmiennością.



Rys.6.8.Przebiegi zawartości popiołu w próbkach koncentratu z osadzarki miałowej
Fig.6.8.Ash content curve in the samples of the fines jig concentrate

Zgodnie ze wzorem (3.38), w którym przyjmujemy wartości średnie objętości ziarn skały płonnej v_p i średnią objętość ziarn w próbce $\bar{v}$ jako równe

$$v_p = \bar{v},$$

zapalenie próbki możemy przedstawić w postaci zależności:

$$\lambda = -\frac{\delta p}{\delta} - \frac{k}{n}.$$

Można się spodziewać, że iloraz k/n liczby ziarn skały przez liczbę ziarn w próbce koncentratu jest znacznie mniejszy od 0,5, zatem rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej A ma lewostronną asymetrię (rys.6.9a). Wariancja, w myśl wzoru ogólnego (5.22), jest proporcjonalna do kwadratu współczynnika $\delta_p / \bar{\delta} > 1$ i odwrotnie proporcjonalna do liczby ziarn w próbce.

Funkcja autokowariancji procesu $A(t)$ szybko maleje do zera ze wzrostem przedziału $t_2 - t_1$:

$$\text{Cov}_A(t_1, t_2) = \begin{cases} D_A^2 = 2,51 & \text{dla } t_2 - t_1 = 0 \\ 0,21 & \text{dla } t_2 - t_1 = \Delta t \end{cases}$$

gdzie Δt jest odstępem czasu pomiędzy kolejnymi pomiarami.

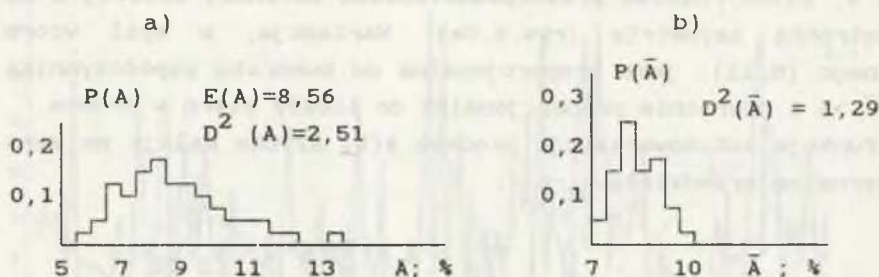
Taki charakter zmian potwierdza rozważania zakończone wzorem (6.31) i rys.6.4b, że funkcja autokowariancji procesu próbkowanego maleje do zera w przedziałach czasowych $t_2 - t_1 > \tau$.

Uśrednienie przebiegu $A(t)$ przez czas $5\Delta t$, za pomocą tzw. średniej pełzającej:

$$\bar{A}(t_m) = \frac{1}{5} \sum_{k=-2}^{k=2} A(t_{m+k})$$

odpowiada zwiększeniu czasu próbkowania $\tau = 5\Delta t$ i zwiększeniu masy próbki. Uzyskany nowy proces próbkowania $\bar{A}(t)$ ma mniejsze wahania, co widać na rys.6.8 przedstawiającym jego realizację oraz na rozkładzie pokazanym na rys.6.9b. Funkcja autokowariancji przebiegu $\bar{A}(t)$ dla kilku pierwszych kroków wyznaczonych w przedziale czasowym mniejszym od τ wynosi:

$$\text{Cov } \bar{A}(t_1, t_2) = \begin{cases} D_{\bar{A}}^2 = 1,29 & , & t_2 - t_1 = 0 \\ 0,82 & , & t_2 - t_1 = \Delta t \\ 0,278 & , & t_2 - t_1 = 2\Delta t \\ 0,17 & , & t_2 - t_1 = 3\Delta t \end{cases}$$



Rys.6.9. Rozkłady prawdopodobieństwa zawartości popiołu w próbkach koncentratu
Fig.6.9. Probability distributions of ash content in the concentrate samples

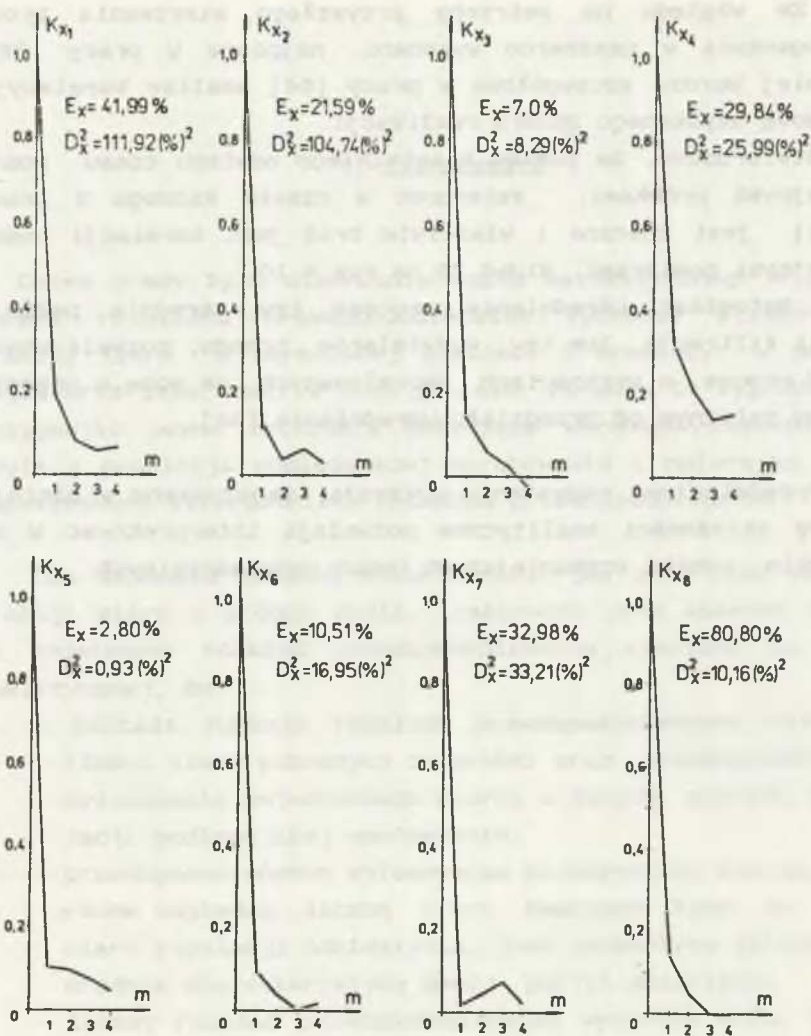
W ramach pracy [38] przeprowadzono szerokie badania nad zmiennością w czasie charakterystyk węgla w zakładzie przeróbki mechanicznej węgla jednej z kopalń. Z przesypu przenośnika doprowadzającego nadawę o uziarnieniu 0-20 mm do jednej z osadzarek pobrano 496 próbek o masie 5 kg każda, w jednakowych odstępach czasu, równych 240 sekund. Z każdej próbki oddzielono węgiel o uziarnieniu poniżej 1 mm, a następnie dla próbek o uziarnieniu 1-20mm wykonano analizy densymetryczne oraz oznaczenie zawartości popiołu. Wydzielono w każdej próbce cztery frakcje gęstościowe.

Uzyskano realizację dyskretną pewnego wielowymiarowego procesu stochastycznego:

$$\{ X_1(t), X_2(t), \dots, X_8(t) \}, \quad t=t_1, t_2, \dots, t_{496}$$

w którym:

- $X_1, \dots, X_4$ są zmiennymi losowymi, reprezentującymi zawartości czterech głównych frakcji, o gęstościach granicznych: 1300, 1500 i 1800 kg/m³, w próbkach nadawy,
- $X_5, \dots, X_8$ są zmiennymi losowymi, reprezentującymi zawartość popiołu w tych frakcjach.



Rys. 6.10. Unormowane funkcje autokowariancji:
 - wychodów czterech głównych frakcji gęstościowych ($X_1 - X_4$),
 - zawartości w nich popiołu ($X_5 - X_8$),
 obliczone w pracy [56] na podstawie 496 próbek nadawy
 Fig. 6.10. Normalized covariance functions of:
 - contents of 4 main density fractions ($X_1 - X_4$),
 - ash contents in the fractions ($X_5 - X_8$),
 calculated in work [56] on the basis 496 of raw coal samples

Ze względu na potrzeby przyszłego sterowania procesem wzbogacania w osadzarce wykonano, najpierw w pracy [38], a później bardzo szczegółowo w pracy [56] analizę korelacyjną i widmową uzyskanego zbioru realizacji.

Stwierdzono, że pomimo niewielkiego odstępu czasu pomiędzy kolejnymi próbkami, zmienność w czasie każdego z procesów $X_1(t)$ jest znaczna i właściwie brak jest korelacji pomiędzy kolejnymi pomiarami. Widać to na rys.6.10.

Natomiast uśrednianie procesu tzw. średnią pełzającą, czyli filtracja, lub tzw. wydzielanie trendu, pozwala utworzyć nowy proces, o wartościach skorelowanych ze sobą w przedziale czasu zależnym od przedziału uśredniania [56].

Przedstawione rozważania wykazują, że uzyskane w niniejszej pracy zależności analityczne pozwalają interpretować w nowym świetle wyniki wcześniejszych badań doświadczalnych.

7. ZAKOŃCZENIE

Celem pracy było utworzenie opisu matematycznego w postaci formuł rozkładów prawdopodobieństwa wychodów elementarnych frakcji ziarn o określonej gęstości i średnicy w próbkach węgla oraz zawartości w nich popiołu. Formuły te wyprowadzono, przyjmując pewne założenia dotyczące warunków losowań ziarn węgla z populacji podlegającej opróbowaniu i opierając się na odpowiednich twierdzeniach rachunku prawdopodobieństwa.

Dla schematu losowań niezależnych, gdy zawartość każdej z frakcji ziarn w próbce węgla, traktowana jako zmienna losowa, ma dwumianowy rozkład prawdopodobieństwa, wykazano na drodze analitycznej, że:

- kształt funkcji rozkładu prawdopodobieństwa zależy od ilości ziarn pobranych do próbki oraz prawdopodobieństwa wylosowania pojedynczego ziarna o danych cechach z populacji podlegającej opróbowaniu;
- prawdopodobieństwo wylosowania pojedynczego ziarna, mierzone względną liczbą ziarn badanego typu do liczby ziarn populacji odniesienia, jest parametrem związanym ze średnią charakterystyką danej partii materiału;
- łączny rozkład prawdopodobieństwa wychodów kilku frakcji określony jest formułą rozkładu wielomianowego;
- rozkład prawdopodobieństwa sumarycznego wychodu dwóch frakcji jest kompozycją rozkładów poszczególnych frakcji;
- wariancja rozkładu zawartości dowolnego składnika w próbce węgla jest odwrotnie proporcjonalna do liczby ziarn w próbce i zależy od parametru reprezentującego wymiary i gęstość ziarna oraz prawdopodobieństwa wylosowania pojedynczego ziarna danego typu. Ogólnie, wariancja zawartości

- badanego składnika w próbce węgla jest zależna od liczby ziarn pobranych do próbki i średniej charakterystyki materiału, z którego pochodzi próbka;
- wychody poszczególnych frakcji są zmiennymi losowymi skorelowanymi, a kowariancja i współczynnik korelacji są zależne od prawdopodobieństwa wylosowania pojedynczego ziarna każdej z frakcji; im mniejsza liczba ziarn frakcji badanych w stosunku do liczebności populacji odniesienia, tym mniejsza korelacja pomiędzy wychodami poszczególnych par frakcji ziarn w próbce;
 - jeśli liczba ziarn w próbce jest duża, to rozkłady dwumianowe zawartości poszczególnych frakcji ziarn w próbce można aproksymować rozkładem normalnym o odpowiednich parametrach, zaś rozkład wielomianowy zmiennej losowej wielowymiarowej, reprezentującej wybrane frakcje ziarn w próbce, można aproksymować wielowymiarowym rozkładem normalnym; aproksymacja jest najdokładniejsza w otoczeniu wartości oczekiwanej;
 - jeśli liczba ziarn pobranych do próbki jest duża i jednocześnie prawdopodobieństwo wylosowania ziarna danego typu jest małe, tak że iloczyn tych wielkości jest niewielki, to rozkłady dwumianowe zawartości poszczególnych frakcji ziarn w próbce można aproksymować rozkładem Poissona, a rozkłady wielomianowe zmiennej losowej wielowymiarowej rozkładem wielowymiarowym Poissona; w przypadkach szczególnych wychody frakcji ziarn są zmiennymi losowymi niezależnymi.

Zawartość badanej frakcji w próbce pomniejszonej, zgodnie ze schematem losowań Pólya, podlega rozkładowi hipergeometrycznemu. Wariancja każdej zmiennej jest funkcją stopnia pomniejszania próbki, wymiarów i gęstości ziarn oraz prawdopodobieństwa wylosowania pojedynczego ziarna danego typu z próbki ogólnej.

Opróbowanie w warunkach dynamicznych, tzn. gdy materiał jest transportowany np. na przenośniku i w dowolnej losowej chwili t pobierana jest próbka przez czas τ , zostało opisane za pomocą pewnych wybranych procesów stochastycznych, reprezentujących liczby ziarn poszczególnych frakcji w próbkach. Opis opróbowania oparty został na założeniu, że pojawianie się ziarn na przenośniku stanowi poissonowski potok zdarzeń ze stałą lub zależną od czasu intensywnością. Parametr ten zależy od prawdopodobieństwa wylosowania pojedynczego ziarna określonego typu. Wykazano na drodze analitycznej, że rozkłady prawdopodobieństwa, wartości oczekiwane i momenty drugiego rzędu procesów stochastycznych, opisujących liczbę ziarn pobieranych do próbki, są funkcją czasu pobierania próbki τ i intensywności procesu Poissona, odpowiadającej danej frakcji ziarn. Dla procesu niejednorodnego, tzn. gdy poissonowski potok zdarzeń pojawiania się ziarn na przenośniku charakteryzuje się intensywnością zależną od czasu, rozkłady prawdopodobieństwa i momenty liczby ziarn pobieranych do próbek są ponadto funkcjami czasu t .

Opis opróbowania w postaci procesu sygnałowego, uwzględniającego pojawianie się i zanik ziarn w obrębie próbobiornika, pozwolił uzyskać formuły rozkładu prawdopodobieństwa i momentów również zależne od czasu pobierania próbek oraz wymiarów ziarn i intensywności ich pojawiania się.

Utworzone w pracy modele wielkości opisujących charakterystyki węgla w próbkach ukazują istotne różnice pomiędzy parametrami probabilistycznymi węgla w populacji podlegającej opróbowaniu i odpowiednimi parametrami w próbkach. Tak więc niezbędne jest uwzględnianie powyższych modeli opróbowania w takich zagadnieniach jak:

- identyfikacja średnich charakterystyk materiałów uziarnionych (węgla, rud, kruszyw i in.) na podstawie wyników analiz w próbkach,
- estymacja parametrów strugi materiału w układach z czujnikami tzw. pomiaru ciągłego,
- skalowanie dynamicznej charakterystyki przyrządów do tzw.

- 1 pomiarów ciągłych zawartości wybranego składnika w strumieniu materiału uziarnionego,
- optymalizacja systemów opróbowania w zakładach przeróbki mechanicznej węgla, przy uwzględnieniu takich składników jak struktura systemu, koszt operacji opróbowania, ograniczenia określone dopuszczalnymi błędami estymacji,
 - modelowanie i badania symulacyjne systemów sterowania procesów wzbogacania.

LITERATURA

- [1] Auer A.: Model i identyfikacja procesów klasyfikacji i mielenia. Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, seria Elektryka z.4, Opole 1978.
- [2] Aufbereitungs - Technik. Mineral Processing 1989, No 9. Pilot Station Sample Taking and Processing.
- [3] Aufbereitungs - Technik. Mineral Processing 1990, No 5. Particle Analyzer.
- [4] Barzykowski J.: Wybrane problemy teorii ważenia dynamicznego. Dodatek do Biuletynu nr 7(324) WAT, Warszawa 1979.
- [5] Berchtold G.B.: Fundamentals for sampling and analyzing coal. World Coal 1983, No 2.
- [6] Blaschke S.: Przeróbka mechaniczna kopalin. Wyd. Śląsk, Katowice 1982.
- [7] Brandt S.: Metody statystyczne i obliczeniowe analizy danych. PWN, Warszawa 1976.
- [8] Cierpisz S.: Automatyzacja procesów przeróbki mechanicznej węgla. Wyd. Śląsk, Katowice 1980.
- [9] Cierpisz S., Kalinowski K.: Maximization of the concentrate yield in the control system of the coal flotation process. 11th IFAC World Congress, Estonia 1990.
- [10] Coal Age. Operating Handbook of Coal Preparation 1978, Vol.3.
- [11] Duncan A.J.: Bulk sampling: problems and lines of attack. Technometrics 1962, Vol.4, No 2.
- [12] Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1976.
- [13] Gerstenkorn T., Śródka T.: Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa. PWN, Warszawa 1978.
- [14] Identyfikacja nadawy i procesu wzbogacania w osadzarce.

- Praca Inst. Elektryfikacji i Automatykacji Górnictwa Polit. Śl. NB-164/RG-1/80 (nie publikowana). Gliwice 1984.
- [15] Jachnik E.: Analiza własności statystycznych przebiegu wychodów i zapopielenia frakcji gęstościowych miału węglowego. Mechanizacja i Automatykacja Górnictwa 1984, nr 11.
- [16] Kamada H., Kawaguchi H., Onodera J.: On the coal blending process control by on-line ash monitors. 10th ICPC, Canada 1986.
- [17] van Kampen N.G.: Procesy stochastyczne w fizyce i chemii. PWN, Warszawa 1990.
- [18] Kalinowski K.: Theoretical problems of determining the content of mineral constituents by analysing its samples taken from the belt conveyor. Studia Geotechnica et Mechanica 1984, Vol.VI, No 1.
- [19] Kowalenko I.N., Kuzniecowa N.J., Szurienkow W.M.: Procesy stochastyczne. Poradnik. PWN, Warszawa 1989.
- [20] Kozin W.Z.: Zakony raspriedielenija wierojatnosti sodierżanija opriedielajemych komponentow w toczecznych probach. Gornyj Żurnał Izwestija WUZ 1984, No 3.
- [21] Krasucki F., Kalinowski K., Walaszek-Babiszewska A.: Symulacja rozpoznawania rodzaju nadawy dla systemu sterowania automatycznego. Zeszyty Naukowe Polit. Śl., seria Górnictwo z.100, Gliwice 1979.
- [22] Krasucki F., Kalinowski K.: Teoretyczne i techniczne zagadnienia pomiarów jakości węgla w układach automatyzacji ZPMW. Seminarium elektryfikacji i automatyzacji kopalń. Skrypt Uczelniany nr 1499, Politechnika Śląska, Gliwice 1990.
- [23] Krasucki F., Walaszek-Babiszewska A.: Identyfikacja probabilistycznej charakterystyki nadawy w systemie sterowania procesu wzbogacania węgla (ros.). ARS, Ostrawa 1984.
- [24] Krukowiecki W.: Przeróbka mechaniczna rud, węgla, soli i innych kopalin. PWN, Warszawa-Kraków 1970.
- [25] Kushner H.: Wprowadzenie do teorii sterowania stochastycznego. PWN, Warszawa 1983.

- [26] Lach R., Cierpisz S., Mirkowski C.: Analiza własności statystycznych przebiegu zmian zawartości popiołu w węglu. Wzbogacanie i Utylizacja Kopalin 1974, nr 4.
- [27] Lipcer R.Sz., Sziriajew A.N.: Statystyka procesów stochastycznych. PWN, Warszawa 1981.
- [28] Martyniak J.: Teoretyczne podstawy uogólnionej metody reprezentacyjnych badań kopalin stałych. Prace Głównego Instytutu Górnictwa. Wyd. GIG, Katowice 1986.
- [29] Muller H., Espig D., Kauter S.: Preparation of samples on a scientific basis. Method, selection and utilisation of rotary reducers. Aufbereitungs -Technik 1986, No 8.
- [30] Natural gamma coal quality monitor cross sectional system diagram. SEI (materiały firmowe).
- [31] Nawrocki J.: Analityczno - graficzne metody oceny pracy wzbogacalników grawitacyjnych. Wyd. Śląsk, Katowice 1976.
- [32] Oniszczenko A.M., Biełonożko W.P.: Statisticeskij analiz processow izmienienija kaczestwa obogaszczennogo ugla. Koks i Chimiya 1985, No 5.
- [33] Pacut A.: Prawdopodobieństwo. Teoria. Modelowanie probabilistyczne w technice. WNT, Warszawa 1985.
- [34] Pak J.N., Wdowkin A.: Metodika ocienki pogriesznosti za szczt neodnorodnosti matieriała pri jego analizie gamma-albiednym mietodom. Gornyj Żurnał Izwiestija WUZ 1986, No 5.
- [35] Papoulis A.: Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. WNT, Warszawa 1972.
- [36] PN-56/G-04505. Węgiel kamienny. Pobieranie próbek do celów przeróbki mechanicznej.
- [37] PN-80/G-04502. Węgiel kamienny i brunatny. Próbkki produkcyjne. Pobieranie, przygotowanie i sprawdzanie dokładności.
- [38] Przeprowadzenie badań dynamicznych własności nadawy na zakład przeróbczy. Praca Instytutu Elektryfikacji i Automatyzacji Górnictwa Politechniki Śląskiej (nie publikowana), Gliwice 1980.
- [39] Reiners E., Mohrhauer P.: Bulk material sampling in high

- capacity loading plants. Aufbereitungs - Technik. Mineral Processing 1985, No 8.
- [40] Reiners E., Mohrhauer P.: The hammer sampler - a proven sampling unit. Aufbereitungs - Technik. Mineral Processing 1989, No 4.
 - [41] Rozanow J.A.: Wstęp do teorii procesów stochastycznych. PWN, Warszawa 1974.
 - [42] Rozenberg W.J.: Wstęp do teorii błędów systemów pomiarowych. PWN, Warszawa 1982.
 - [43] Rybarz J., Rysz M., Siwiec A., Tumidajski T.: Wielowymiarowe oceny wzbogacalności węgla. Mat. XXI Krakowskiej Konferencji Naukowo-Technicznej nt. "Podstawy teoretyczne oraz modelowanie, kontrola i sterowanie procesami przeróbki surowców mineralnych". Wyd. AGH, Kraków 1987.
 - [44] Siwiec A.: Modele wybranych procesów przeróbczych. Zeszyty Naukowe AGH, seria Górnictwo z.118. Kraków 1982.
 - [45] Swiesznikow A.A.: Podstawowe metody funkcji losowych. PWN, Warszawa 1965.
 - [46] Szczepankiewicz E.: O pewnych polach losowych. Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, seria Konferencje Matematyka z.9, Opole 1985.
 - [47] Sztaba K.: Pobieranie i przygotowanie próbek. Metody oceny o ogólnym zastosowaniu. Poradnik górnika. Wyd. Śląsk, Katowice 1976.
 - [48] Sztaba K.: O pewnej koncepcji metody oznaczania własności materiału grubo uziarnionego w warunkach przemysłowego zakładu przeróbki kopalin. ARS, Ostrawa 1987.
 - [49] Tumidajski T.: Kontrola procesów technologicznych, cz.II. Zastosowanie metod statystycznych w analizie procesów przeróbczych. Skrypt Uczelniany nr 773, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków 1980.
 - [50] Walaszek-Babiszewska A.: Badanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (Γ, λ) , charakteryzującej własności nadawy. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Górnictwo z.129, Gliwice 1984.
 - [51] Walaszek-Babiszewska A.: Zastosowanie rozkładów prawdopo-

dobieństwa wielowymiarowych zmiennych losowych do opisu własności węgla. Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, seria Konferencje Matematyka z.9, Opole 1985.

[52] Walaszek-Babiszewska A., Zapała W.: Model zagęszczenia nadawy jako zakłócenia w układzie automatycznego sterowania procesu flotacji węgla. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Górnictwo z.184, Gliwice 1990.

[53] Walaszek-Babiszewska A.: Rozkłady prawdopodobieństwa frakcji gęstościowych i klas ziarnowych w próbach materiałów uziarnionych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Górnictwo z.190, Gliwice 1990.

[54] Wong E.: Procesy stochastyczne w teorii informacji i układach dynamicznych. WNT, Warszawa 1976.

[55] Wybór pism Witolda Budryka. T.2. KG PAN . PWN, Warszawa-Kraków 1977.

[56] Zapała W.: Opracowanie i cyfrowe badania symulacyjne algorytmów sterowania procesu wzbogacania węgla z wykorzystaniem pomiaru rozkładu frakcji densymetrycznych w łozu osadzarki. Praca doktorska (nie publikowana). Wydział Górniczy Politechniki Śląskiej, Gliwice 1988.

[57] Zubrzycki S.: Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. PWN, Warszawa 1966.

MODELE STOCHASTYCZNE OPRÓBOWANIA WĘGLA

Streszczenie

Podstawowym celem pracy jest utworzenie probabilistycznego opisu opróbowania węgla, jako procesu stanowiącego nieodłączną część identyfikacji i sterowania procesów wzbogacania węgla.

Przyjęto, że najwłaściwszą formą opisu będzie rozkład prawdopodobieństwa odpowiednich cech węgla w próbkach.

Cel pracy zrealizowano w następujących etapach:

- w rozdziale 3 wyznaczono deterministyczne zależności wychodów frakcji gęstościowych i ziarnowych w próbce węgla. Formuły te uzyskano na podstawie bilansu masy ziarn w próbce i przyjętych średnich wartości gęstości i objętości ziarn. Uzyskano zależności wiążące wychód frakcji ze względną liczbą ziarn badanej frakcji;
- w rozdziale 4 zdefiniowano pojęcie przestrzeni probabilistycznej dla różnych typów doświadczeń, tzn. gdy losowanie ziarn rozpatrywane jest w kategoriach zdarzeń elementarnych lub gdy cechy ziarna uznajemy za zmienne losowe oraz gdy wychody frakcji ziarn wyznaczone z próbki są zmiennymi losowymi. W rozdziale 6.1 rozszerzono rozważania, uwzględniając zmienność cech węgla w czasie i zaproponowano kilka typów procesów stochastycznych;
- rozdział 5 zawiera wyprowadzenie ogólnych formuł rozkładów prawdopodobieństwa liczby ziarn i wychodów frakcji w próbkach. Formuły te uzyskano przez zastosowanie odpowiednich schematów losowań. Parametry rozkładów wyznaczono odpowiednio dla poszczególnych frakcji ziarn. Podano także zasady aproksymacji rozkładów dwumianowych i wielomianowych rozkładami Poissona i normalnym;

- w rozdziale 6 uzyskano opis opróbowania dynamicznego w postaci rozkładów prawdopodobieństwa i momentów kilku typów procesów stochastycznych.

Opracowane modele operacji opróbowania w postaci probabilistycznych charakterystyk cech węgla w próbkach mogą być zastosowane w dalszych badaniach dotyczących optymalizacji systemów pomiarowych opartych na pobieraniu próbek materiałów. Ponadto losowy charakter zmian cech węgla określony na drodze opróbowania musi być brany pod uwagę przy tworzeniu algorytmów identyfikacji i sterowania procesów wzbogacania węgla.

Резюме

Основной целью работы является создание пробабиллистического описания отбора проб угля, как процесса составляющего неотъемлемую часть идентификации и управления процессов обогащения угля.

Принято, что наиболее соответствующей формой описания погрешности, являющейся случайной величиной, будет вероятностное распределение соответствующих свойств угля в пробах.

Цель работы осуществлена в следующих этапах

- в главе 3 определены детерминистические зависимости выходов плотностных и зерновых фракций в пробе угля. Данные формулы получены на основе баланса зерновой массы в пробе и принятых средних величин плотности и объема зерен. Выведена зависимость, связывающая массовой выход с относительным количеством зерен в исследуемой фракции.
- в главе 4 определено понятие пробабиллистического пространства для различных видов опытов, т.е. когда выборка зерен рассматривается в категориях элементарных случайностей или когда свойства зерна считаются случайными переменными, а также, когда выходы фракций зерен, определенные из проб, являются случайными переменными. В главе 6.1 это рассуждение развивается с учетом изменения свойств угля во времени предложено несколько видов стохастических процессов.
- в главе 5 выведены общие формулы вероятностного распределения количества зерен и выходов фракций, полученные путем применения схем случайной выборки. Параметры распределения определены соответственно для отдельных фракций зерен.

Приведены также принципы аппроксимации распределений биномиальных и полиномиальных распределением Пуассона или нормальным.

- в главе 6 получено описание динамического отбора проб в форме вероятностных распределений и моментов нескольких типов стохастических процессов.

Разработанные модели операции отбора проб в форме пробабилистических характеристик свойств угля в пробах могут найти применение в дальнейших исследованиях по оптимизации измерительных систем основанных на отборе проб материалов.

Кроме того представленный характер изменения свойств угля, полученный путем пробоотбора, должен приниматься во внимание при создании алгоритма идентификации и управления в процессах обогащения угля.

STOCHASTIC MODELS OF COAL SAMPLING

Summary

It is a basic purpose of the paper to present a probabilistic description of coal sampling as a process inherent in identification and control processes of coal beneficiation.

Nowadays, plants for beneficiation of raw materials, all over the world, have at their disposal a variety of the equipment for drawing of samples and samples analysis. The work has been also continued on searching for new quick methods to determine qualitative parameters of raw materials. But the interpretation of the obtained results of measurements is conditioned by the state of theory in a given branch of knowledge as well as by requirements evolving from their various applications.

Treating of coal preparation plants as systems of optimum control needs also treating of qualitative and quantitative measurements of coal as a measuring system. Determination of an error of a measuring system needs forming of models of detailed operations.

The present work presents description of an error arising when a sample is being separated from general population (the so called static sampling) and when a sample is being drawn from the material transported with a conveyor (the so called dynamic sampling). It has been assumed that probability distribution is the most suitable form to describe the error which is a random variable.

These are stages of realization of the work purpose.

- The assumption has been made in section 3, that volume and density are to be the distinguished physical characteristics of coal grains. Certain conventional average values of grain density and volume within narrow fractions have been assumed and mass balance of grains in a coal sample has been formulated. Then formulas showing the connection of weight yields of density and size fractions in a sample with a number of grains of corresponding properties have been derived. Ditto for ash content in particular fractions. The number of grains of corresponding properties related to the total number of grains in a sample makes a probability of drawing by lot a single grain of a given type and is a parameter of essential importance for considerations regarding the type of distribution (section 5 and 6).
- A definition of the notion of probability for the cases when drawing by lot of grains is examined in categories of elementary events or when grain characteristics are recognized as random variables as well as when yields of size fraction determined from a sample are random variables is given in section 4. Such an approach to the problem seems to be necessary seeing that there is plenty of publications which often differ from each in fundamental notions used as well as in the methodology applied and which thus are hard to compare.
- Section 5 presents description of static sampling in a form of probability distributions of the number of grains of a given type as well as probability distributions of yields of grains fractions. When using corresponding schemes of sampling by lot it has been indicated that:
 - the yield of each of grains fraction in a coal sample treated as a random variable has a binomial probability distribution,
 - the distribution form depends on quantity of grains sampled and on probability of drawing by lot a single grain of given properties from the population being subject to sampling,

- the total probability distribution of yields of several fractions is determined by a formula of multinomial distribution,
 - the probability distribution of a summary yield of two fractions is a composition of distributions of each fraction,
 - the variance of distribution of a given random variable is inversely proportional to the number of grains in a sample and depends on the parameter representing the size and density of a grain and on the probability of drawing by lot a single grain of a given type,
 - the yields of particular fractions are correlated random variables and the covariance as well as correlation coefficient are dependent on probability of drawing by lot a single grain of each of the fractions,
 - if the number of grains in a sample is great it is possible to approximate binomial distributions with a normal distribution and a multinomial distribution with a normal multidimensional distribution; the approximation being the most accurate in the neighbourhood of the expected value,
 - if the number of grains is great and at the same time the probability of drawing by lot a grain of a given type is low so that their product is low, a binomial distribution of particular fractions can be approximated with the Poisson distribution and a multinomial distribution with the Poisson multivariate distribution.
- Models of dynamic sampling elaborated in section 6 have been based on the assumption that arrangement in which coal grains of a defined type are situated on a conveyor is the Poisson flow of events with a constant or time dependent probability of drawing by lot a single grain. The operation of drawing a sample at any moment t for the time τ has been described by means of corresponding Poisson processes. It has been proved that the

probability distribution, the expected value and moments of the second order of stochastic processes describing the number of grains sampled are dependent on time τ of drawing a sample and on probability of drawing by lot a single grain and in the case of a nonhomogeneous process also on the time t . The description of sampling of grains in a form of a signal process taking into account appearance and disappearance of grains within the reach of a sampling device has allowed to obtain the probability distribution and the parameters of the distribution functions for a number of specific cases.

It has been proved, that the characteristics of feed material cannot be identified with characteristics obtained as a result of static or dynamic sampling. Sources and magnitude of errors have been indicated.

Some of results obtained in the work are applicable to description of sampling of other materials also non-grained materials.

The elaborated models of sampling operations can be used as the basis for examination aimed at optimization of systems for qualitative and quantitative measurements of coal in coal preparation plants.

The shown stochastic character of yields of grains fractions in samples must be taken into account when formulating the algorithms of modelling, identifying and controlling of coal beneficiation processes.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej

P. 3351 / 92 / 203