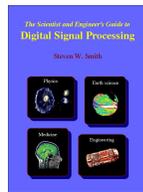
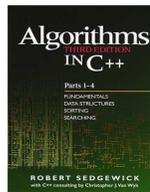
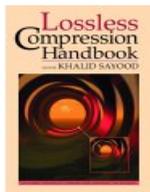
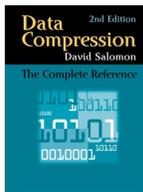


- Übersicht
- Literatur
- Klassifikation:

ausgewählte Verfahren:

- Lauflängenkodierung
- Huffman Kodierung, arithmetische Kodierung
- Lempel-Ziv Kodierung und Varianten
- Burrows-Wheeler Transformation
- Wavelets
- weitere Verfahren später (Audio, Image, Video)

Datenkompression: Literatur



David Salomon, Data Compression - The Complete Reference, Springer 2000

Khalid Sayood, Ed., Lossless Compression Handbook, Elsevier, 2003

Robert Sedgewick, Algorithms in C++, Addison-Wesley, 1998

Stephen W. Smith, Guide to Digital Signal Processing, California Technical Publ., 1997
online als PDF verfügbar: www.dspguide.com

Mark Nelson, Data Compression with the Burrows-Wheeler Transform,
Dr. Dobbs Journal, 9/1996

F. Bauernöppel, Verfahren und Techniken zur Datenkompression, c't 10/1991

M. Tamm, Packen wie noch nie - BWT-Algorithmus, c't 16/2000, 194

A	· · -	N	- · -	1	- - - -	Period	- · - · -
B	- · · ·	O	- - -	2	· · - - -	Comma	- · - · - ·
C	- · - ·	P	- · - ·	3	· · · - -	Colon	- · - · - · ·
Ch	- - - -	Q	- - · -	4	· · · · -	Question mark	- · - · - · ·
D	- · · ·	R	- · · ·	5	· · · · ·	Apostrophe	- · - · - · ·
E	- · ·	S	- · · ·	6	- · · · ·	Hyphen	- · - · - · ·
F	· · · ·	T	- · -	7	- · - · -	Dash	- · - · - · ·
G	- · - ·	U	- · -	8	- · - · -	Parentheses	- · - · - · ·
H	· · · ·	V	· · - ·	9	- - - - ·	Quotation marks	- · - · - · ·
I	- · ·	W	- · - ·	0	- - - - -		
J	- · - -	X	- · - ·				
K	- · - ·	Y	- · - ·				
L	- · · ·	Z	- · - ·				
M	- - -						

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

Table 1.1: The 26 Braille Letters.

and	for	of	the	with	ch	gh	sh	th
-----	-----	----	-----	------	----	----	----	----

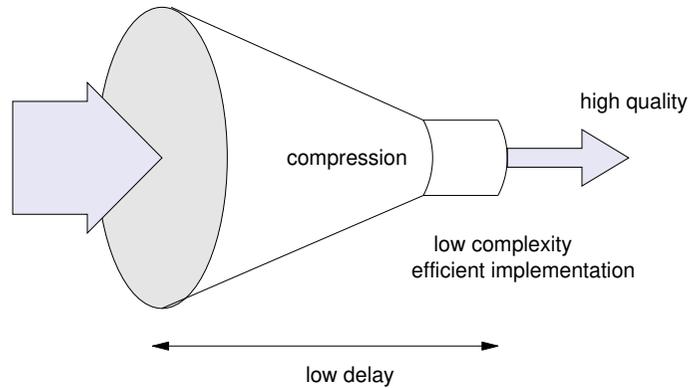
Table 1.2: Some Words and Strings in Braille.

If the duration of a dot is taken to be one unit, then that of a dash is three units. The space between the dots and dashes of one character is one unit, between characters is three units, and between words six units (five for automatic transmission). To indicate that a mistake has been made and for the receiver to delete the last word, send "· · · · · ·" (eight dots).

- zwei wichtige Beispiele für "frühe" Codes
- Morse: häufige Symbole ("e") mit kurzen Codes
- Braille: alle 64 Codes verwendet, keine Fehlererkennung

Multimedia: Datenmengen

Medium:	Datenmenge:	Komprimierung:	
Text	80 x 60 Zeichen 4.8 KB	Huffman 1:2 PKZIP 1:3	
Bild	640x480x3 = 900 KByte	Fax 1:10 JPEG 1:15	
Grafik	500 Linien		
Sprache	1 Kanal, 8Khz 64 Kbps, 480 KB/min	GSM 1:8	
MIDI	15 KB/min		
Musik	stereo, 44.1 KHz 1.44 Mbps, 10 MB/min	MP3 1:10	
Video	640x480x3x25 1.3 GB/min	MPEG2 1:60	



- gute Kompressionsrate, gute Qualität
- geringe Latenz (Verzögerung)
- geringer Bedarf an Rechenleistung und Speicherbedarf

Klassifikation:

"direct coding"		PCM
"entropy coding"	repetitive sequence suppression	zero suppression run-length encoding
	statistical encoding	pattern substitution Huffman encoding
"source coding" (e.g. speech)	transform encoding	FFT
		DCT
		...
	differential encoding	DPCM delta modulation ADPCM
	vector quantization	general / fractal / ...
"channel coding"		HDLC, ...

Entropiekodierung:

- Eigenschaften der Datenquelle werden ignoriert
- Signalwiederholungen entfernen
- statistische Verfahren, z.B. Huffman-Kodierung
- verlustfrei und reversibel
- geringe Kompressionsfaktoren (z.B. ca. 2 für Audiodaten)

Quellenkodierung (source encoding):

- Eigenheiten der Datenquelle / -senke berücksichtigen
- z.B. Frequenzgang / Maskierung / Rauschschwellen des Ohrs
- verlustfrei
- verlustbehaftet für bessere Kompression (z.B. MP3 bis ca 10:1)

Codec

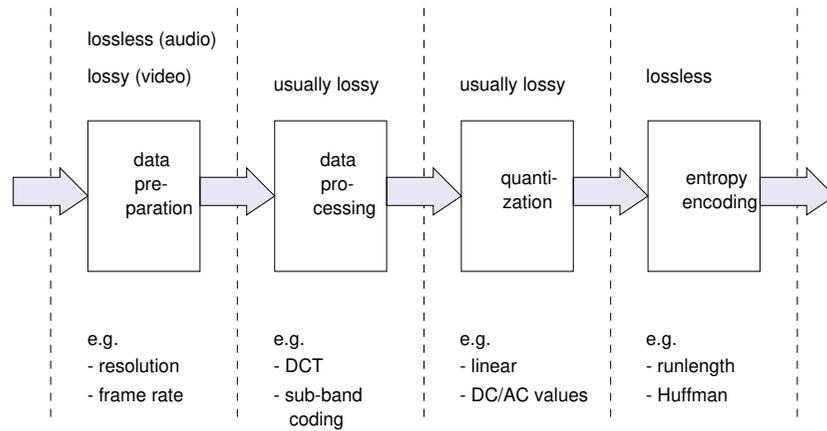
- verlustlose Datenkompression:

$$\text{decode}(\text{encode}(x)) = x$$

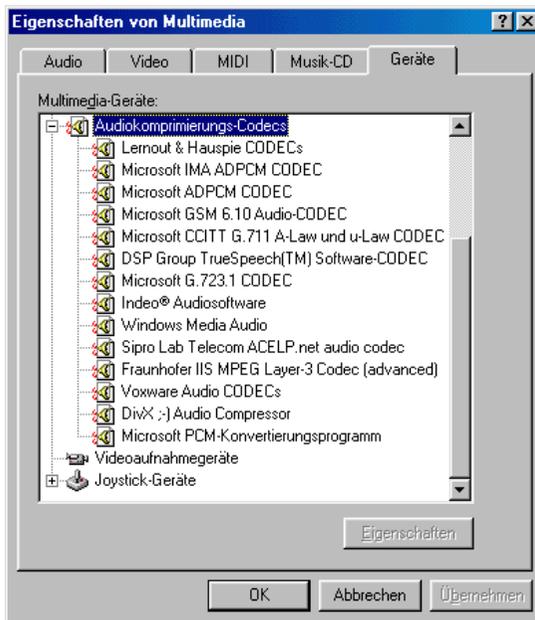
- jedes Verfahren benötigt Paar aus Coder und Decoder
:= "CODEC"

vollständige Abstraktion und Kapselung möglich:

- $\text{decode1}(\text{decode2}(\text{kanal}(\text{encode2}(\text{encode1}(x)))) = x$
- äußere / innere Schichten brauchen nicht vom Codec zu wissen
- beliebig tiefe Schachtelung
- Beispiele: Windows / Java Media Framework



Codecs: Beispiel Windows 9x



Windows-Systemsteuerung:

- Liste installierter Codecs (*.ax Dateien)
- Audio, Video, MIDI
- je nach installierter SW
- hier: 14 Audio-Codecs
- Sprache vs. Musik

- komprimierte Daten beliebig weiter komprimierbar?
 - diverse Patentanmeldungen dazu :-)
 - aber nicht möglich (sonst jede Datei auf 1 Bit komprimierbar...)
 - nur mit "Tricks" (z.B. Daten in Dateinamen speichern)
- => jeder Algorithmus expandiert bestimmte Dateien

Achtung: Verschlüsselung beseitigt Redundanzen der Daten:

- Verschlüsselung nur als letzter Schritt
- nach allen Kodierungsschritten
- verschlüsselte Daten nicht komprimierbar

Compression Challenge

- komprimierte Daten beliebig weiter komprimierbar?
- Mike Goldman's Angebot:

I will attach a prize of \$5,000 to anyone who successfully meets this challenge. First, the contestant will tell me HOW LONG of a data file to generate. Second, I will generate the data file, and send it to the contestant. Last, the contestant will send me a decompressor and a compressed file, which will together total in size less than the original data file, and which will be able to restore the compressed file to the original state.

With this offer, you can tune your algorithm to my data. You tell me the parameters of size in advance. All I get to do is arrange the bits within my file according to the dictates of my whim. As a processing fee, I will require an advance deposit of \$100 from any contestant. This deposit is 100% refundable if you meet the challenge.

Compression Challenge

- komprimierte Daten beliebig weiter komprimierbar?
- mittlerweile verbesserte Version der Challenge:

Aufgabe:

- Erstellen eines Programms (Linux binary / sources)
- Ausführen des Programms erzeugt die 14 Dateien aus dem "calgary corpus" (1107225 bytes als Zip-Archiv)
- möglichst geringe Größe des Programms
- Gewinnsumme abhängig von der erzielten Verbesserung

derzeitiger Wert: 637116 Bytes

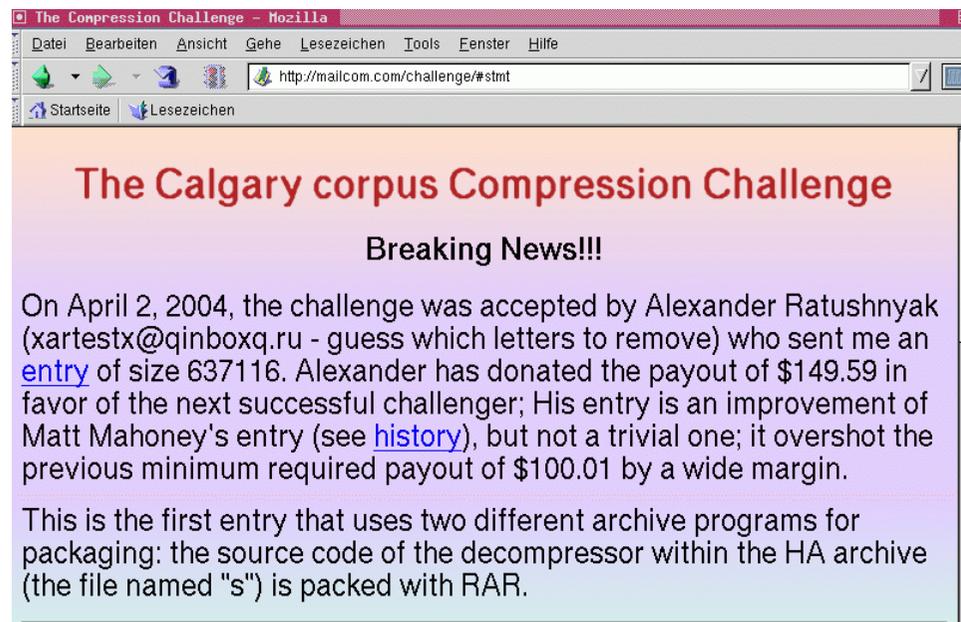
"corpus"-Dateien mit zwei Algorithmen komprimiert,

Packprogramm selbst komprimiert

(www.mailcom.com/ch

Medientechnik | SS 2004

Compression Challenge



The Calgary corpus Compression Challenge

Breaking News!!!

On April 2, 2004, the challenge was accepted by Alexander Ratushnyak (xartestx@qinboxq.ru - guess which letters to remove) who sent me an [entry](#) of size 637116. Alexander has donated the payout of \$149.59 in favor of the next successful challenger; His entry is an improvement of Matt Mahoney's entry (see [history](#)), but not a trivial one; it overshoot the previous minimum required payout of \$100.01 by a wide margin.

This is the first entry that uses two different archive programs for packaging: the source code of the decompressor within the HA archive (the file named "s") is packed with RAR.

Medientechnik | SS 2004

Datenkompression: Szenarien

Backup, Archivierung:

- möglichst gute Kompression, schneller Encoder
- Komplexität und Geschwindigkeit des Decoders egal

Software-Archive (JAR, Zip):

- möglichst schneller Decoder, gute Kompression
- Encoder wird selten benutzt,

Datenübertragung (Modem):

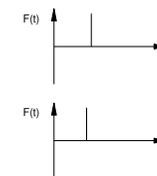
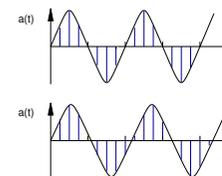
- Echtzeitanforderungen, möglichst gute Performance
- Notwendigkeit zum Umgang mit bereits komprimierten Daten

CD/DVD, weak-signal Kommunikation:

- möglichst gute Fehlererkennung und -korrektur

Medientechnik | SS 2004

Transformationen



- Sinuston, Darstellung im Zeitbereich und Frequenzbereich
- Darstellung im Frequenzbereich offenbar weit effizienter

wichtige Beispiele für Transformationen:

- Burrows-Wheeler (für Textdateien)
- Fouriertransformation (Audio, Bilder)
- Cosinustransformation
- Wavelet-Transformation

Medientechnik | SS 2004

The entropy of the data depends on the individual probabilities P_i , and is smallest when all n probabilities are equal. This fact is used to define the redundancy R in the data. It is defined as the difference between the entropy and the smallest entropy. Thus

$$R = \left(- \sum_1^n P_i \log_2 P_i \right) - \log_2(1/P) = - \sum_1^n P_i \log_2 P_i + \log_2 n.$$

The test for fully compressed data (no redundancy) is thus $\sum_1^n P_i \log_2 P_i = \log_2 n$.

- kann bei bekannter Nachricht leicht berechnet werden
- oder aus bisherigen Symbolen schätzen
- gute Kodierung erreicht $R \sim 0$

Run-Length Kodierung

- all is too well
- a2l is t2o we2l
- a@2l is t@2l we@l

"Laufängenkodierung"

- Ersetzen von wiederholten Symbolen durch Marke+Anzahl+Symbol
- lohnt erst ab Lauflänge 3
- diverse Varianten zur Kodierung des Zählers
- sehr einfach, sehr schnell
- nur für bestimmte Daten geeignet
- z.B. für S/W-Bilder
- aber nicht für normalen Text, Audio, Grauwert- oder Farbbilder

Run length	White code-word	Black code-word	Run length	White code-word	Black code-word
0	00110101	000011011	32	00011011	00000101010
1	000111	010	33	00010010	00000101011
2	0111	11	34	00010011	0000010101010
3	1000	10	35	00010100	000001010011
4	1011	011	36	00010101	0000010101000
5	1100	0011	37	00010110	0000010101010
6	1110	0010	38	00010111	00000101010110
7	1111	00011	39	00010100	00000101011011
8	10011	000101	40	00101001	00000101100
9	10100	000100	41	00101010	00000101101
10	10111	0000100	42	00101011	0000010110101
11	10000	0000101	43	00101100	000001011011
12	001000	000011	44	00101101	0000010110100
13	000011	00000100	45	00000100	000001010101
14	110100	0000011	46	00000101	000001010110
15	110101	00001000	47	000001010	0000010101101
16	101010	000001011	48	000001011	000001100100
17	101011	000001000	49	01010101	000001100101
18	0100111	0000001000	50	01010011	00000100010
19	0001100	0000110011	51	01010100	000001000101
20	00011000	00001101000	52	01010101	0000010001000
21	0010111	00000110110	53	00100100	00000110111
22	00000011	0000010111	54	00100101	00000110100
23	00000100	00000101000	55	01010000	00000110111
24	0101000	00000010111	56	01011001	000000101000
25	0101011	00000011000	57	01011010	000001010000
26	0010011	0000011001010	58	01011011	000001011001
27	0100100	000011001011	59	010101010	000001010101
28	0011000	0000011001100	60	01001011	000000101100
29	00000010	0000011001101	61	00110010	0000010101010
30	00000011	000001101000	62	00110011	000001001101
31	00011010	000001101001	63	00110100	000001100111

Run length	White code-word	Black code-word	Run length	White code-word	Black code-word
64	11011	0000001111	1344	011011010	000000100011
128	10010	000011001000	1408	011011011	0000001010100
192	010111	000011001001	1472	011011000	0000001010101
256	0110111	000000110101	1536	01011001	0000001011010
320	0011010	000000110011	1600	01010100	0000001011011
384	00110111	00000010100	1664	011000	0000001100100
448	0110010	000000110101	1728	010011011	0000001100101
512	01100101	000000110100	1792	0000001000	same as
576	01101000	000000110101	1856	0000000100	white
640	01100111	0000001101010	1920	0000000101	from this
704	011001100	000000100101	1984	000000010010	point.
768	011001101	0000001001100	2048	000000010011	
832	011010010	000000100101	2112	000000010100	
896	011010011	0000001100101	2176	000000010101	
960	011010100	000000110011	2240	0000000110	
1024	011010101	000000110100	2304	00000001011	
1088	011010110	0000001110101	2368	00000001100	
1152	011010111	0000001101010	2432	00000001101	
1216	011011000	0000001110111	2496	00000001110	
1280	011011001	0000001101010	2560	00000001111	

(Shannon)

Table 2.30: Group 3 and 4 Fax Codes: (a) Termination Codes. (b) Make-Up Codes.

Buchstabenhäufigkeiten . . .

53+!305) 6*;4826) 4+.) 4+); 806*;48!8'60)) 85;] 8*:+*8!83 (88) 5*!;
 46 (; 88*96*?; 8) ** (; 485); 5*!2:*+ (; 4956*2 (5*) 8'8*; 4069285);) 6
 !8) 4++; 1 (+9; 48081; 8: 8+1; 48!85; 4) 485!528806*81 (+9; 48; (88; 4 (+?3
 4; 48) 4+; 161; : 188; +?;

"Here, then, we have, in the very beginning, the groundwork for something more than a mere guess. The general use which may be made of the table is obvious - but, in this particular cipher, we shall only very partially require its aid. As our predominant character is 8, we will commence by assuming it as the "e" of the natural alphabet. To verify the supposition, let us observe if the 8 be seen often in couples - for "e" is doubled with great frequency in English - in such works, for example, as "meet", "fleet", "speed", "seen", "been", "agree", etc. In the present instance we see it double no less than five times, although the cyrptograph is brief.

- Edgar Allen Poe, The Gold Bug

Shannon-Fano Kodierung

Prob.	Steps			Final
1. 0.25	1	1		:11
2. 0.20	1	0		:10
3. 0.15	0	1	1	:011
4. 0.15	0	1	0	:010
5. 0.10	0	0	1	:001
6. 0.10	0	0	0	:0001
7. 0.05	0	0	0	:0000

Table 2.9: Shannon-Fano Example.

- Symbole in möglichst gleichgroße Mengen einteilen
- linke (im Bild: obere) Menge bekommt Bit 1, andere Menge Bit 0
- für alle Teilmengen mit mehr als 2 Elementen wiederholen
- Verfahren ähnlich zur Huffman-Konstruktion
- aber nur optimal, wenn in jedem Schritt gleichgroße Mengen

Prob.	Steps			Final
1. 0.25	1	1		:11
2. 0.25	1	0		:10
3. 0.125	0	1	1	:011
4. 0.125	0	1	0	:010
5. 0.125	0	0	1	:001
6. 0.125	0	0	0	:000

Table 2.10: Shannon-Fano Balanced Example.

Dictionary-Methoden

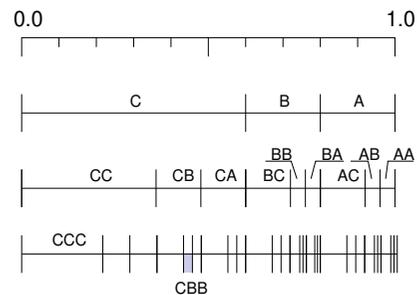
- warum Beschränkung auf Einzelsymbole?
- Verzeichnis mit häufigen Worten (Symbolfolgen) aufbauen
- Index in dieses Verzeichnis kodieren
- unbekannte Symbolfolgen in das Verzeichnis aufnehmen
- Lempel-Ziv Verfahren, Dutzende Varianten
- universell anwendbar: Texte, Programme, Bilder, ...
- sehr gute Kompressionsraten (für verlustfreie Algorithmen)

Arithmetic Coding

- Huffman-Kodierung ist nur in Spezialfällen optimal
- weil jedem einzelnen Symbol ein Code zugeordnet wird

arithmetische Kodierung:

- Zuordnung von Zeichen zu arith. Intervallen
- entsprechend der Zeichenhäufigkeiten
- rekursiv für Zeichenfolgen
- Verfahren patentiert und lizenzpflichtig



$$p(C) = 0.6 \quad p(B) = 0.2 \quad p(A) = 0.2$$

Beispiel-Intervall für Folge "cbb":

$$0.6 * 0.6 + 0.8 * (0.48 - 0.36) = 0.456$$

$$0.6 * 0.6 + 0.6 * (0.48 - 0.36) = 0.432$$

$$0.432 = 0.0110 \quad 0.456 = 0.0111$$

Binärcode für "cbb" = 0111

LZ77

sir sid eastman easily sea sick seals

	sir sid eastman ...	(0,0,"s")
s	ir sid eastman	(0,0,"i")
si	r sid eastman	(0,0,"r")
sir	sid eastman eas...	(0,0,"")
sir	sid eastman	(4,2,"d")

_____ sir sid eastman easily sea sick seals (16,3,"e")

"sliding window" Methode:

- "search buffer" (links) als Dictionary, einige KByte
- Tokens mit Index ins Dictionary und nächstes Symbol schreiben

- Welsh, 1984
- Dictionary mit Einzelsymbolen (z.B. 256 Bytes) initialisieren
- unbekannte Strings in Dictionary aufnehmen
- dabei Strings maximaler Länge versuchen

- was passiert bei vollem Dictionary?
- diverse Varianten: Dictionary löschen, LRU, ...
- Einsatz u.a. für ZIP, gzip, GIF, TIFF; ...

LZW-Algorithmus

```
for (i=0; i < 255; i++) {
    append i as a 1-symbol to the dictionary
}
append null to the dictionary;
di = dictionary index of null;
repeat
    read(ch);
    if <<<di,ch>> is in the dictionary then
        di = dictionary index of <<<di,ch>>;
    else
        output(di);
        append <<di,ch>> to the dictionary;
        di = dictionary index of ch;
    endif;
until end-of-input;
```

0	NULL	256	si
1	SOH	257	ir
...	...	258	r_
32	space	259	_s
...	...	260	sid
97	a	261	d_
98	b	262	_e
99	c	263	ea
...
255	255	4095	

- Strings wachsen nur langsam (max. 1 Zeichen)

BWT: Burrows-Wheeler Transformation

- Eingangsdaten in (großen) Blöcken bearbeiten
- z.B. bzip2: 100 .. 900 KByte Blockgröße

- Daten so umordnen daß ähnliche Strings entstehen
- anschließend normale statistische Kodierung
- völlig neuartiges Prinzip, ursprüngliche Idee (Wheeler 1983)

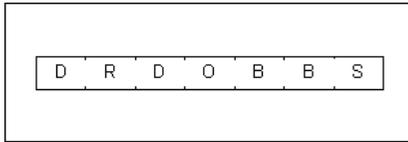
- adaptiert automatisch an statistische Eigenschaften der Daten
- Algorithmus funktioniert für Texte, Programme, beliebige Daten

gute Beschreibungen:

M. Nelson, Data compression with the BWT, Dr. Dobbs. 9/1996

M. Tamm, Packen wie noch nie, c't 16/2000

BWT: Aufbau der Matrix

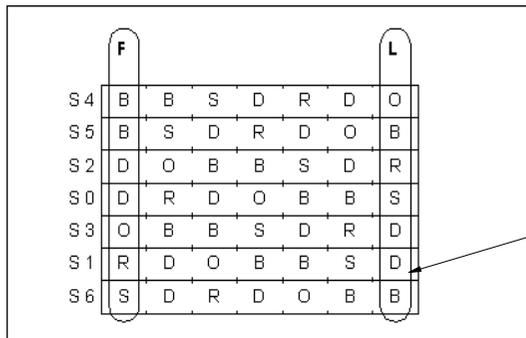


- Eingabedaten zu einer Matrix anordnen
- jede Zeile der Matrix um ein Zeichen rotiert

String 0	D	R	D	O	B	B	S
S 1	R	D	O	B	B	S	D
S 2	D	O	B	B	S	D	R
S 3	O	B	B	S	D	R	D
S 4	B	B	S	D	R	D	O
S 5	B	S	D	R	D	O	B
S 6	S	D	R	D	O	B	B

(aber 100000 x 100000 Matrix ist unhandlich)

BWT: Puffer, Rotation



- Sortieren der Matrix, Aufbau eines Indexvektors
- geeignete Vergleichsfunktion wie strcmp() mit wrap-around
- markierte Spalten F (first) und L (last) der Originaldaten
- Zeichen in L sind jeweils die Vorgänger der Zeichen in F
- Ausgabe der BWT: Spalte L und "Primärindex" (hier 5)

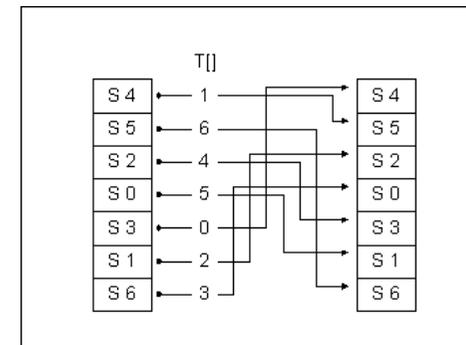
BWT: Puffer, sortiert

L: F.....

```
t: hat redistributors of a free
t: hat refer to this License an
t: hat system in reliance on co
w: hat the Program does.\n\n 1
t: hat there is no warranty (or
t: hat there is no warranty for
w: hat they have is not the ori
t: hat they, too, receive or ca
t: hat users may redistribute t
t: hat version or of any later
t: hat what they have is not th
t: hat work are not derived fro
```

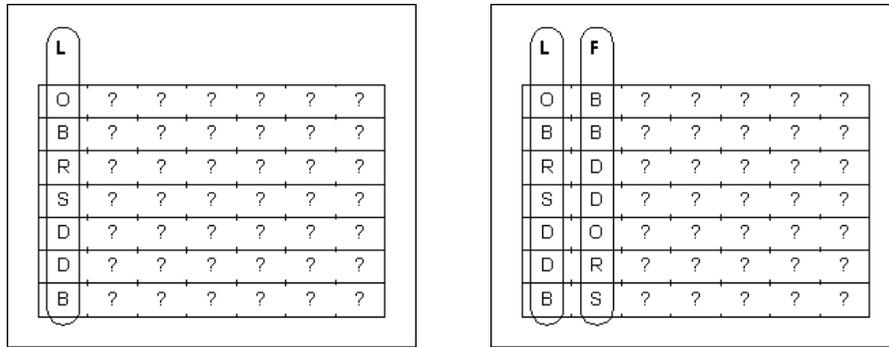
- (BWT eines Ausschnitts aus der GPL)

BWT: Transformationsvektor



- $T[i]$ enthält die Zeile, die $S[i+1]$ enthält
- Zeile 3 enthält S0, Zeile 5 enthält S1, also $T[3] = 5$
- Zeile 2 enthält S2, also $T[5] = 2$, usw.
- im Beispiel also $T = \{ 1, 6, 4, 5, 0, 2, 3 \}$
- aber: Berechnung von T aus L ?

BWT: Rekonstruktion von T



- Wiederherstellung von F:
- L ist gegeben, F war sortiert: einfach die Zeichen in L sortieren
- Zeichen "O": offenbar gilt $T[4] = 0$
- F sortiert: $T[1] = 0$, $T[6] = 1$, usw.

BWT: Move-to-Front Kodierung

- verwaltet Liste mit 256 Werten
- Ausgabe eines Zeichens:
Index des Zeichens in der Liste ausgeben
und Zeichen nach vorne (Index 0) verschieben
- Beispiel: "tttWtwttt" (aus sortierter GPL)
Ausgabe: { 116, 0, 0, 88, 1, 119, 1, 0, 0 }
- anschließend noch Huffman- oder arithmetische Kodierung

BWT: Gesamtablauf

Compressing a file using the demo programs:

```
RLE input-file | BWT | MTF | RLE | ARI > output-file
```

A brief description of each of the programs follows:

RLE.CPP

This program implements a simple run-length encoder. If the input file has many long runs of identical characters, the sorting procedure in the BWT can be degraded dramatically.

BWT.CPP

The standard Burrows-Wheeler transform is done here. This program outputs repeated blocks consisting of a block size integer, a copy of L, the primary index, and a special last character index. This is repeated until BWT.EXE runs out of input data.

MTF.CPP

The Move to Front encoder.

RLE.CPP

The fact that the output file is top-heavy with runs containing zeros means that applying another RLE pass to the output can improve overall compression.

ARI.CPP

This is an order-0 adaptive arithmetic encoder, directly derived from the code published by Witten and Cleary in their 1987 CACM article.

BWT: Vergleich mit anderen Verfahren

Performance Figures

The table below shows obtained bit/byte for some different universal coding utilities and files. I have chosen pretty large files to lessen the boundary-effects at the start.

File x Utility -> bit/byte	bzip	dmc	gzip	zip	arj	lha	lharc	compress
bible.tar (5140480 bytes)	1.80	1.83	2.53	2.53	2.60	2.80	2.97	2.89
netscape (4501956 bytes)	3.29	3.45	3.51	3.51	3.51	3.58	3.72	4.89
gcc-2.7.2.1.tar (7090289 bytes)	1.49	1.61	2.02	2.01	2.02	N/A	N/A	2.99

The file *bible.tar* consists of selected texts from the bible (In swedish). See [Project Runeberg](#). Notice the superior performance of bzip and dmc for this kind of source! The perhaps not so well-known coder *dmc* uses dynamic markov modelling and arithmetic coding and was written by [Gordon V. Cormack](#). It performs almost as good as bzip but is slower.

The file *netscape* is a stripped binary. bzip performs best also here but the difference is not so big, although note the lousy performance of the standard UNIX utility compress. (Uses LZW technique).

The file *gcc-2.7.2.1.tar* consists of lot of C-code. Also here bzip is outstanding. UNIX compress has to use double as many bits as bzip..

The following programs and flags were used to generate the different codes:

- *bzip -9* ver. 0.21
- *dmc 50000000* (That's a large buffer in case you wondered) ver 0.0.0
- *gzip -9* ver 1.2.4
- *zip -9* ver 2.0.1 for UNIX (performs better than *pkzip -ex*)
- *arj -em* ver 2.30
- *lha* LHa ver. 1.00 for UNIX
- *lha o* LHarc ver. 1.02 for UNIX
- *compress* UNIX (N)compress ver. 4.2.4

Wavelet-Transformation

- Wavelets := "kleine Wellen"
- "lokalisierte", skalierbare Basisfunktionen

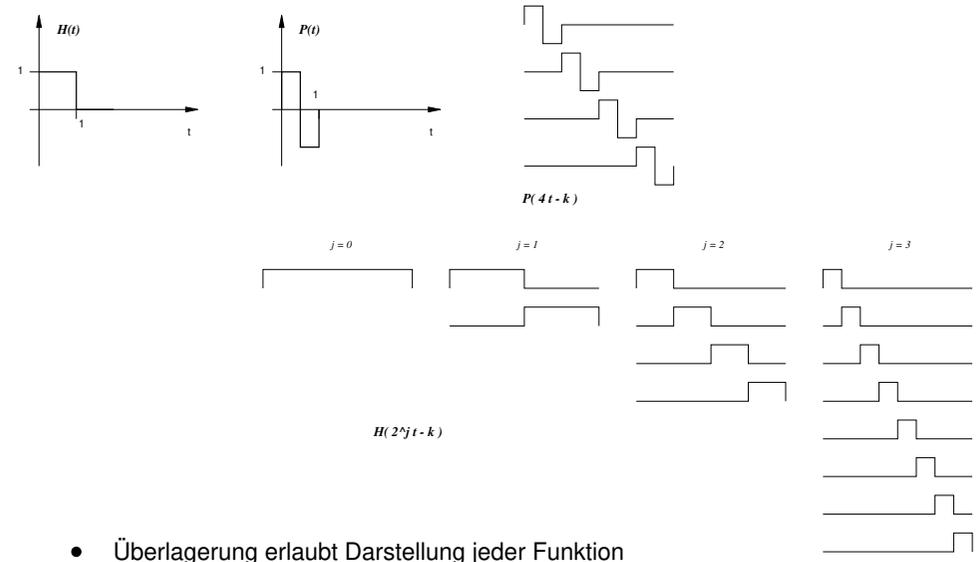
$$\Phi_{(s,l)}(x) = 2^{-\frac{s}{2}} \Phi(2^{-s}x - l)$$

- diverse Basisfunktionen möglich
- Eigenschaften können "maßgeschneidert" werden:
- lineare Transformation:

$$W(x) = \sum_{k=-1}^{N-2} (-1)^k c_{k+1} \Phi(2x + k)$$

- Normierungsbedingung: $\sum_{k=0}^{N-1} c_k = 2, \quad \sum_{k=0}^{N-1} c_k c_l = 2\delta_{l,0}$

Wavelets: Haar-Wavelet



- Überlagerung erlaubt Darstellung jeder Funktion

Wavelets: Beispielfunktionen

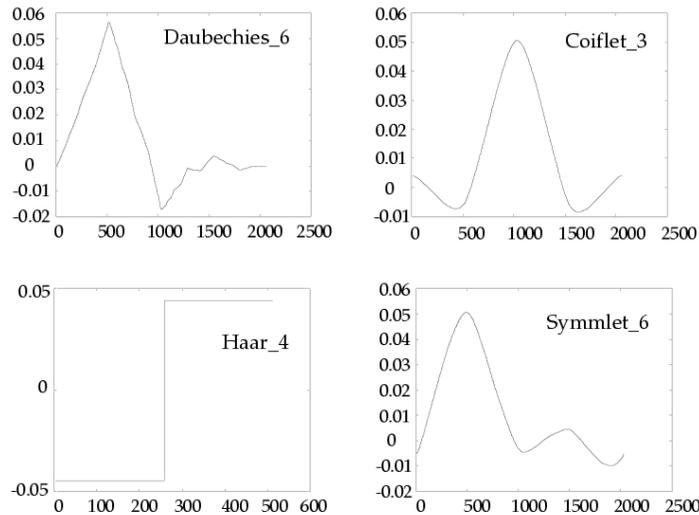


Fig. 4. Several different families of wavelets. The number next to the wavelet name represents the number of vanishing moments (A stringent mathematical definition related to the number of wavelet coefficients) for the subclass of wavelet. These figures were generated using WaveLab.