

Информатика и её применения

Том 5 Выпуск 1 Год 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Двухприоритетная система с резервированием каналов и марковским входящим потоком А. В. Печинкин	2
Уточнение неравномерной оценки скорости сходимости распределений пуассоновских случайных сумм к нормальному закону С. В. Гавриленко	12
О точности приближений нормированных хи-квадрат распределений асимптотическими разложениями Эджворта–Чебышева Г. Кристоф, В. В. Ульянов	25
Устойчивость конечных смесей обобщенных гамма-распределений относительно возмущений параметров В. Ю. Королев, В. А. Крылов, В. Ю. Кузьмин	31
О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм Ю. С. Нефедова, И. Г. Шевцова	39
Информационная технология активной параметрической идентификации стохастических квазилинейных дискретных систем В. М. Чубич	46
Агентное моделирование развития территориальной системы К. С. Чиркунов	58
О двух моделях распределения ресурсов при организации инвестиционных процессов П. В. Демин	65
Алгоритм сравнения изображений радужной оболочки глаза на основе ключевых точек Е. А. Павельева, А. С. Крылов	68
Алгоритм автоматического выделения лица на термографических изображениях Н. С. Баша, Л. А. Шульга	73
Об уточнении некоторых результатов для одной байесовской модели массового обслуживания А. А. Кудрявцев, С. Я. Шоргин	78
Abstracts	80
Об авторах	84
About Authors	85

Выпускающий редактор *Т. Торжкова*; Технический редактор *Л. Кокушкина*
Художественный редактор *М. Седакова*

Сдано в набор 14.01.11. Подписано в печать 15.03.11. Формат 60 x 84 / 8
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.-печ. л. 10,75. Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 200 экз.
Заказ № 2742

Издательство «ТОРУС ПРЕСС», Москва 121614, ул. Крылатская, 29-1-43
torus@torus-press.ru; <http://www.torus-press.ru>

Отпечатано в ППП «Типография «Наука» с готовых диапозитивов, Москва 121099, Шубинский пер., д. 6.

ДВУХПРИОРИТЕТНАЯ СИСТЕМА С РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ КАНАЛОВ И МАРКОВСКИМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ

А. В. Печинкин¹

Аннотация: Рассматривается двухприоритетная система с резервированием каналов пучка (СРКП), марковским входящим потоком и различными распределениями фазового типа времен обслуживания заявок каждого приоритета. Резервирование каналов пучка означает наличие некоторого числа каналов, которые могут быть заняты только приоритетными заявками. На основе исследования базовой модели получены аналитические соотношения, позволяющие вычислять основные стационарные показатели функционирования этой системы.

Ключевые слова: система массового обслуживания; относительный приоритет; резервирование каналов пучка

1 Введение

В современных информационно-телекоммуникационных системах (ИТС) часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда требования разных приоритетов обслуживаются каналами одного пучка. При этом, как правило, требования более высоких приоритетов должны обслуживаться с более высоким качеством (под качеством обслуживания в зависимости от типа системы понимается либо вероятность потери требования, либо среднее время задержки требования, либо другая подобная характеристика), причем прерывание обслуживания даже менее приоритетных требований не допускается. Очевидно, что применение в данном случае полноступенчатых схем (даже с учетом приоритета при выборе требования из очереди) неоправданно завышает качество обслуживания менее приоритетных требований и, как следствие, ведет к увеличению такой экономической характеристики пучка, как его канальная емкость.

Один из возможных выходов из создавшейся ситуации состоит в использовании простой схемы, получившей в литературе название системы с резервированием каналов пучка. При этой схеме для требований i -го приоритета имеется свой порог n_i и требования данного приоритета принимаются к обслуживанию только в том случае, когда число занятых каналов меньше n_i .

По-видимому, впервые СРКП была описана Р. J. Burke (фирма Bell, США) в 1961 г. для обслуживания двухприоритетного пучка и впоследствии использована в ряде систем связи, в частности в системе RITA (Франция) [1, 2]. В своем первоначальном виде (без очередей) эта система нашла также применение при создании методов динами-

ческого управления потоками с ограничением нагрузки в сетях с коммутацией каналов. Так, в [3, 4] с целью ограничения использования отдельных направлений предлагалось резервировать в каждом направлении определенные каналы, по которым передача транзитной нагрузки не разрешалась. В [5] была представлена улучшенная динамическая стратегия, особенность которой состояла в том, что на каждом направлении резервировалось лишь число каналов, а не конкретные каналы, по которым запрещалось устанавливать транзитные соединения. Именно эта модификация СРКП и рассматривается в настоящей статье.

Вместе с практической реализацией СРКП началось ее исследование. В [1] система изучалась для двухприоритетного трафика при отсутствии очередей. Также для двухприоритетного потока в [6] анализировались четыре варианта СРКП (варианты отличались наличием или отсутствием бесконечной очереди для приоритетных и неприоритетных требований). Характеристики двухприоритетной СРКП для случая различных интенсивностей обслуживания требований первого и второго приоритетов рассчитывались в [7]. В [8] система с резервированием анализировалась применительно к телефонным сетям, в которых каналы пучка использовались для передачи телефонных разговоров и данных. В [9] был предложен метод приближенной оценки качества обслуживания в подобных системах на основе введенного там понятия эквивалентного трафика. Наконец, в [10] была предложена методика расчета СРКП с произвольным числом приоритетов, пуассоновскими входящими потоками и одинаковым экспоненциальным обслуживанием требований всех приоритетов. Эта

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11-07-00112).

¹ Институт проблем информатики Российской академии наук, apetchinkin@ipiran.ru

методика позволила получить в [11] легко реализуемые алгоритмы вычисления основных стационарных характеристик двухприоритетной СРКП с марковским входящим потоком и одинаковым экспоненциальным обслуживанием требований всех приоритетов.

Очевидно, однако, что предположения об экспоненциальности и одинаковой распределенности времен обслуживания заявок различных приоритетов существенно ограничивают сферу применения результатов [10, 11]. Поэтому в настоящей статье продолжено изучение вариантов СРКП. Рассмотрена двухприоритетная СРКП с марковским входящим потоком и фазовыми распределениями времен обслуживания заявок различных приоритетов, причем с разными определяющими параметрами. При этом сначала анализируется более общая модель, которая далее используется как базовая для анализа двухприоритетной СРКП.

2 Описание общей системы

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) марковского типа с входящим потоком заявок двух типов (далее заявки первого типа будем называть приоритетными, а второго — неприоритетными) и относительным приоритетом, описываемую следующим образом.

Имеются неотрицательные целые числа $n_0 \geq 1$, $n_1 \geq n_0$ и $n_2 \geq 0$. Эти числа интерпретируются так:

n_0 — число приборов, доступных всем заявкам (иными словами, если занято менее n_0 приборов, то любая поступающая заявка немедленно начинает обслуживаться);

n_1 — максимальное суммарное число неприоритетных заявок, находящихся на приборах, и приоритетных заявок, находящихся в системе;

n_2 — число мест ожидания для неприоритетных заявок, т. е. максимальное число неприоритетных заявок, которые могут находиться в системе дополнительно к заявкам на приборах.

Далее в этой статье будем предполагать, что $n_1 > n_0$ и $n_2 \geq 1$, поскольку в случае $n_1 = n_0$ и/или $n_2 = 0$ некоторые уравнения будут иметь несколько другой (более простой) вид.

Процесс поступления и обслуживания заявок определяется матрицами $\Lambda_n^{(u)}$, $n = \overline{0, n_1}$, $u = 1, 2$, M_n , $n = \overline{1, n_1}$, N_n , $n = \overline{0, n_1}$, и Ω (размеры матриц определяются далее и задаются числами I_n , $n = \overline{0, n_1}$, которые будем называть числами фаз процесса поступления-обслуживания заявок в слоях n , или просто числами фаз) и протекает таким образом.

Если в системе находится n , $n = \overline{0, n_0 - 1}$, заявок (далее будем говорить, что процесс поступления-обслуживания находится в слое n) и фаза равна i , $i = \overline{1, I_n}$, то с интенсивностью $(\Lambda_n^{(u)})_{ij}$, $u = 1, 2$, $j = \overline{1, I_{n+1}}$, в систему поступает новая заявка u -го типа (процесс поступления-обслуживания переходит в слой $n + 1$), которая тут же начинает обслуживаться, и фаза становится равной j . Кроме того, с интенсивностью $(N_n)_{ij}$, $j = \overline{1, I_n}$, $j \neq i$, в систему не поступают заявки и не заканчивается обслуживание ни одной из n заявок (процесс поступления-обслуживания остается в том же слое n), но фаза становится равной j . Наконец, если дополнительно $n \geq 1$, то с интенсивностью $(M_n)_{ij}$, $j = \overline{1, I_{n-1}}$, заканчивается обслуживание одной из n заявок (это может быть заявка любого типа), процесс поступления-обслуживания переходит в слой $n - 1$ и фаза становится равной j .

При $n = \overline{n_0 + 1, n_1 - 1}$ будем говорить, что процесс поступления-обслуживания находится в слое n в том случае, когда суммарное число неприоритетных заявок, находящихся на приборах, и приоритетных заявок, находящихся в системе, равно n и, возможно, имеется еще какое-то число (но не более n_2) неприоритетных заявок в очереди. При этом если фаза процесса поступления-обслуживания равна i , $i = \overline{1, I_n}$, то с интенсивностью $(\Lambda_n^{(1)})_{ij}$, $j = \overline{1, I_{n+1}}$, в систему поступает приоритетная заявка, причем, как и прежде, процесс поступления-обслуживания переходит в слой $n + 1$ и фаза становится равной j . С интенсивностью $(N_n)_{ij}$, $j = \overline{1, I_n}$, $j \neq i$, в систему не поступают заявки и не заканчивается обслуживание заявок (процесс поступления-обслуживания остается в том же слое n), но с i -й на j -ю изменяется фаза, а с интенсивностью $(M_n)_{ij}$, $j = \overline{1, I_{n-1}}$, заканчивается обслуживание одной из заявок (процесс поступления-обслуживания переходит в слой $n - 1$) и фаза становится равной j . Однако, если в систему поступает неприоритетная заявка (с интенсивностью $(\Lambda_n^{(2)})_{ij}$, $j = \overline{1, I_n}$), то слой n не меняется, а фаза становится равной j . Поступающая неприоритетная заявка либо становится в очередь неприоритетных заявок (если там имеются свободные места), либо теряется.

Единственным отличием случая $n = n_1$ от предыдущего является то, что поступающая приоритетная заявка теряется, изменяя фазу в том же слое. Естественно, матрица $\Lambda_{n_1}^{(1)}$ в этом случае является квадратной порядка I_{n_1} .

Обратимся к последнему случаю: $n = n_0$. Здесь возможны два варианта, связанных с окончанием обслуживания.

Первый вариант появляется, если в системе в очереди отсутствуют неприоритетные заявки. Тогда, как и раньше, с интенсивностью $(M_{n_0})_{ij}$, $i = \overline{1, I_{n_0}}$, $j = \overline{1, I_{n_0-1}}$, заканчивается обслуживание одной из заявок, процесс поступления-обслуживания переходит в слой $n_0 - 1$ и фаза становится равной j . Прежний смысл имеют также матрицы $\Lambda_{n_0}^{(u)}$, $u = 1, 2$, и N_{n_0} .

Если же в системе в очереди имеются неприоритетные заявки (второй вариант), то с интенсивностью $(M_{n_0})_{ij}$, $i = \overline{1, I_{n_0}}$, $j = \overline{1, I_{n_0-1}}$, заканчивается обслуживание заявки, но на освободившийся прибор мгновенно поступает заявка из очереди неприоритетных заявок, с вероятностью Ω_{jl} , $l = \overline{1, I_{n_0}}$, меняя фазу с j -й на l -ю и возвращая процесс поступления-обслуживания в слой n_0 . В этом варианте формально изменение фазы без изменения слоя определяется матрицей интенсивностей $N_{n_0}^* = N_{n_0} + M_{n_0}\Omega$, а матрица $M_{n_0}^* = 0$. Матрицы $\Lambda_{n_0}^{(u)}$ имеют прежний смысл.

Как обычно, диагональные элементы матриц N_n , $n = \overline{0, n_1}$, определяются таким образом, чтобы

$$N_0 \vec{1} + \Lambda_0^{(1)} \vec{1} + \Lambda_0^{(2)} \vec{1} = \vec{0},$$

$$N_n \vec{1} + \Lambda_n^{(1)} \vec{1} + \Lambda_n^{(2)} \vec{1} + M_n \vec{1} = \vec{0}, \quad n = \overline{1, n_1}.$$

Здесь и далее через $\vec{1}$ обозначается вектор-столбец $(1, \dots, 1)^T$, размерность которого определяется размером умножаемой на него слева матрицы.

В тех случаях, когда суммирование возможно, положим

$$N_n^{(0)} = N_n + \Lambda_n^{(1)} + \Lambda_n^{(2)},$$

$$N_n^{(1)} = N_n + \Lambda_n^{(2)},$$

$$N_n^{(2)} = N_n + \Lambda_n^{(1)}.$$

Очевидно, что функционирование рассматриваемой системы можно описать марковским процессом с конечным числом состояний. В дальнейшем, не останавливаясь на деталях, будем предполагать выполненным естественное условие: этот процесс является неприводимым.

3 Вспомогательные матрицы

Пусть $\nu(t)$ обозначает слой, в котором находится процесс поступления-обслуживания в момент t (т. е. $\nu(t)$ равно при $\nu(t) \leq n_0$ числу заявок в системе, или, что то же самое, числу заявок на приборе, а при $n_0 < \nu(t) \leq n_1$ сумме чисел неприоритетных заявок, находящихся на приборах, и приоритетных заявок, находящихся в системе).

Предположим, что в начальный момент значение процесса $\nu(t)$ равнялось n , $n = \overline{n_0, n_1}$, отсутствовала очередь неприоритетных заявок и фаза была i . Введем матрицы $F_k(n)$, $k = \overline{0, n_2 - 1}$, и $\tilde{F}_k(n)$, $k = \overline{0, n_2}$. Элементы $(F_k(n))_{ij}$ и $(\tilde{F}_k(n))_{ij}$, $i = \overline{1, I_n}$, $j = \overline{1, I_{n-1}}$, матриц $F_k(n)$ и $\tilde{F}_k(n)$ представляют собой вероятности того, что непосредственно после момента, когда впервые значение процесса $\nu(t)$ станет равным $n - 1$ (в случае $n = n_0$ таким может быть также момент, когда на прибор впервые поступит неприоритетная заявка из очереди неприоритетных заявок, однако эта неприоритетная заявка пока еще не учитывается как поступившая на прибор), фаза будет j и в системе в очереди неприоритетных заявок будет находиться ровно k и, соответственно, не менее k заявок.

Следующие соотношения позволяют рекуррентно по n и k , начиная с $n = n_1$ и $k = 0$, вычислять матрицы $F_k(n)$ и $\tilde{F}_k(n)$:

$$F_0(n_1) = (-N_{n_1}^{(2)})^{-1} M_{n_1};$$

$$\tilde{F}_0(n_1) = (-N_{n_1}^{(0)})^{-1} M_{n_1};$$

$$F_k(n_1) = (-N_{n_1}^{(2)})^{-1} \Lambda_{n_1}^{(2)} F_{k-1}(n_1), \quad k = \overline{1, n_2 - 1};$$

$$\tilde{F}_k(n_1) = (-N_{n_1}^{(2)})^{-1} \Lambda_{n_1}^{(2)} \tilde{F}_{k-1}(n_1), \quad k = \overline{1, n_2};$$

$$F_0(n) = -N_n^{-1} \left[\Lambda_n^{(1)} F_0(n+1) F_0(n) + M_n \right],$$

$$n = \overline{n_0, n_1 - 1};$$

$$\tilde{F}_0(n) = (-N_n^{(1)})^{-1} \left[\Lambda_n^{(1)} \tilde{F}_0(n+1) \tilde{F}_0(n) + M_n \right],$$

$$n = \overline{n_0, n_1 - 1};$$

$$F_k(n) = -N_n^{-1} \left[\Lambda_n^{(1)} \sum_{i=0}^k F_i(n+1) F_{k-i}(n) + \Lambda_n^{(2)} F_{k-1}(n) \right],$$

$$k = \overline{1, n_2 - 1}, \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1};$$

$$\tilde{F}_k(n) = -N_n^{-1} \left[\Lambda_n^{(1)} \left(\sum_{i=0}^{k-1} F_i(n+1) \tilde{F}_{k-i}(n) + \tilde{F}_k(n+1) \tilde{F}_0(n) \right) + \Lambda_n^{(2)} \tilde{F}_{k-1}(n) \right],$$

$$k = \overline{1, n_2}, \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}.$$

Положим $F_k = F_k(n_0)$, $k = \overline{0, n_2 - 1}$, и $\tilde{F}_k = \tilde{F}_k(n_0)$, $k = \overline{0, n_2}$.

Далее понадобятся также некоторые характеристики, связанные со средними временами пребывания системы в определенных состояниях.

Предположим, что в начальный момент значение процесса $\nu(t)$ равнялось n , $n = \overline{n_0, n_1}$, и фаза была i , $i = \overline{1, I_n}$. Обозначим через $S_k(n)$, $k = \overline{n, n_1}$, матрицу, элементом $(S_k(n))_{ij}$, $j = \overline{1, I_k}$,

которой является среднее время, проведенное системой в состояниях, когда значение процесса $\nu(t)$ равнялось k и фаза была j , до того момента, когда впервые значение процесса $\nu(t)$ стало равным $n - 1$ (как и прежде, в случае $n = n_0$ таковым может быть также момент, когда на прибор впервые поступит неприоритетная заявка из очереди неприоритетных заявок).

Матрицы $S_k(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$S_{n_1}(n_1) = (-N_{n_1}^{(0)})^{-1}; \quad (1)$$

$$S_n(n) = (-N_n^{(1)})^{-1} \left[E + \Lambda_n^{(1)} \tilde{F}_0(n+1) S_n(n) \right], \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}; \quad (2)$$

$$S_k(n) = (-N_n^{(1)})^{-1} \Lambda_n^{(1)} \left[S_k(n+1) + \tilde{F}_0(n+1) S_k(n) \right], \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}, \quad k = \overline{n+1, n_1}. \quad (3)$$

Соотношения (1)–(3) дают возможность применить для нахождения матриц $S_k(n)$ рекуррентную по n и k процедуру начиная с $n = n_1$ и $k = n_1$.

Положим $S_k = S_k(n_0)$, $k = \overline{n_0, n_1}$.

Предположим теперь, что в начальный момент значение процесса $\nu(t)$ равнялось n , $n = \overline{n_0, n_1}$, отсутствовала очередь неприоритетных заявок и фаза была i . Обозначим через $\vec{t}_k(n)$, $k = \overline{0, n_2 - 1}$, и $\vec{T}_k(n)$, $k = \overline{0, n_2}$, вектор-столбцы, координатами $(\vec{t}_k(n))_i$ и $(\vec{T}_k(n))_i$, $i = \overline{1, I_n}$, которых являются средние времена, проведенные системой в состояниях, когда в очереди неприоритетных заявок имелось ровно k и не менее k заявок (без учета фазы), до того момента, когда впервые значение процесса $\nu(t)$ стало равным $n - 1$ (с прежним замечанием относительно случая $n = n_0$).

Векторы $\vec{t}_k(n)$ и $\vec{T}_k(n)$ определяются рекуррентными формулами

$$\vec{t}_0(n_1) = (-N_{n_1}^{(2)})^{-1} \vec{1}; \quad (4)$$

$$\vec{T}_0(n_1) = (-N_{n_1}^{(0)})^{-1} \vec{1}; \quad (5)$$

$$\vec{t}_k(n_1) = (-N_{n_1}^{(2)})^{-1} \Lambda_{n_1}^{(2)} \vec{t}_{k-1}(n_1), \quad k = \overline{1, n_2 - 1}; \quad (6)$$

$$\vec{T}_k(n_1) = (-N_{n_1}^{(2)})^{-1} \Lambda_{n_1}^{(2)} \vec{T}_{k-1}(n_1), \quad k = \overline{1, n_2}; \quad (7)$$

$$\vec{t}_0(n) = -N_n^{-1} \left[\vec{1} + \Lambda_n^{(1)} \vec{t}_0(n+1) + \Lambda_n^{(1)} F_0(n+1) \vec{t}_0(n) \right], \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}; \quad (8)$$

$$\vec{T}_0(n) = (-N_n^{(1)})^{-1} \left[\vec{1} + \Lambda_n^{(1)} \vec{T}_0(n+1) + \Lambda_n^{(1)} \tilde{F}_0(n+1) \vec{T}_0(n) \right], \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}; \quad (9)$$

$$\vec{t}_k(n) = -N_n^{-1} \left[\Lambda_n^{(1)} \left(\vec{t}_k(n+1) + \sum_{i=0}^k F_i(n+1) \vec{t}_{k-i}(n) \right) + \Lambda_n^{(2)} \vec{t}_{k-1}(n) \right], \quad k = \overline{1, n_2 - 1}, \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}; \quad (10)$$

$$\vec{T}_k(n) = -N_n^{-1} \left[\Lambda_n^{(1)} \left(\vec{T}_k(n+1) + \sum_{i=0}^{k-1} F_i(n+1) \vec{T}_{k-i}(n) + \tilde{F}_k(n+1) \vec{T}_0(n) \right) + \Lambda_n^{(2)} \vec{T}_{k-1}(n) \right], \quad k = \overline{1, n_2}, \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}. \quad (11)$$

Введем обозначения $\vec{t}_k = \vec{t}_k(n_0)$, $k = \overline{0, n_2 - 1}$, и $\vec{T}_k = \vec{T}_k(n_0)$, $k = \overline{0, n_2}$.

Наконец, предполагая, что в начальный момент значение процесса $\nu(t)$ равнялось n , $n = \overline{n_0, n_1}$, число неприоритетных заявок в очереди было m , $m = \overline{0, n_2}$, и фаза была i , $i = \overline{1, I_n}$, обозначим через $S_{kl}(n, m)$, $k = \overline{n, n_1}$, $l = \overline{m, n_2}$, матрицу, элементом $(S_{kl}(n, m))_{ij}$, $j = \overline{1, I_k}$, которой является среднее время, проведенное системой в состояниях, когда значение процесса $\nu(t)$ равнялось k , число неприоритетных заявок в очереди было l и фаза была j , до того момента, когда впервые значение процесса $\nu(t)$ стало равным $n - 1$ (как и прежде, в случае $n = n_0$ таковым может быть также момент, когда на прибор впервые поступит неприоритетная заявка из очереди неприоритетных заявок).

Матрицы $S_{kl}(n, m)$ удовлетворяют соотношениям:

$$S_{n_1 n_2}(n_1, n_2) = (-N_{n_1}^{(0)})^{-1}; \quad (12)$$

$$S_{nn_2}(n, n_2) = (-N_n^{(1)})^{-1} \left[E + \Lambda_n^{(1)} \tilde{F}_0(n+1) S_{nn_2}(n, n_2) \right], \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}; \quad (13)$$

$$S_{kn_2}(n, n_2) = (-N_n^{(1)})^{-1} \Lambda_n^{(1)} \left[S_{kn_2}(n+1, n_2) + \tilde{F}_0(n+1) S_{kn_2}(n, n_2) \right], \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}, \quad k = \overline{n+1, n_1}; \quad (14)$$

$$S_{n_1 m}(n_1, m) = (-N_{n_1}^{(2)})^{-1}, \quad m = \overline{0, n_2 - 1}; \quad (15)$$

$$S_{n_1 l}(n_1, m) = (-N_{n_1}^{(2)})^{-1} \Lambda_{n_1}^{(2)} S_{n_1 l}(n_1, m+1), \quad m = \overline{0, n_2 - 1}, \quad l = \overline{m+1, n_2}; \quad (16)$$

$$S_{nm}(n, m) = -N_n^{-1} \left[E + \Lambda_n^{(1)} F_0(n+1) S_{nm}(n, m) \right], \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}, \quad m = \overline{0, n_2 - 1}; \quad (17)$$

$$S_{km}(n, m) = -N_n^{-1} \Lambda_n^{(1)} [S_{km}(n+1, m) + F_0(n+1)S_{km}(n, m)], \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}, \\ m = \overline{0, n_2 - 1}, \quad k = \overline{n+1, n_1}; \quad (18)$$

$$S_{nl}(n, m) = -N_n^{-1} \left(\Lambda_n^{(2)} S_{nl}(n, m+1) + \Lambda_n^{(1)} \sum_{i=0}^{l-m} F_i(n+1) S_{nl}(n, m+i) \right), \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}, \\ m = \overline{0, n_2 - 1}, \quad l = \overline{m+1, n_2 - 1}; \quad (19)$$

$$S_{nn_2}(n, m) = -N_n^{-1} \left(\Lambda_n^{(2)} S_{nn_2}(n, m+1) + \Lambda_n^{(1)} \left[\sum_{i=0}^{n_2-m-1} F_i(n+1) S_{nn_2}(n, m+i) + \tilde{F}_{n_2-m}(n+1) S_{nn_2}(n, n_2) \right] \right), \\ n = \overline{n_0, n_1 - 1}, \quad m = \overline{0, n_2 - 1}; \quad (20)$$

$$S_{kl}(n, m) = -N_n^{-1} \left(\Lambda_n^{(2)} S_{kl}(n, m+1) + \Lambda_n^{(1)} \left[S_{kl}(n+1, m) + \sum_{i=0}^{l-m} F_i(n+1) S_{kl}(n, m+i) \right] \right), \\ n = \overline{n_0, n_1 - 1}, \quad m = \overline{0, n_2 - 1}, \\ k = \overline{n+1, n_1}, \quad l = \overline{m+1, n_2 - 1}; \quad (21)$$

$$S_{kn_2}(n, m) = -N_n^{-1} \left(\Lambda_n^{(2)} S_{kn_2}(n, m+1) + \Lambda_n^{(1)} \left[S_{kn_2}(n+1, m) + \sum_{i=0}^{n_2-m-1} F_i(n+1) S_{kn_2}(n, m+i) + \tilde{F}_{n_2-m}(n+1) S_{kn_2}(n, n_2) \right] \right), \\ n = \overline{n_0, n_1 - 1}, \quad m = \overline{0, n_2 - 1}, \\ k = \overline{n+1, n_1}. \quad (22)$$

Соотношения (12)–(22) позволяют вычислять эти матрицы рекуррентно по n и m , начиная с $n = n_1$ и $k = n_2$, и рекуррентно по k и l , начиная с $k = n_1$ и $l = n_2$.

Положим $S_{kl}(m) = S_{kl}(n_0, m)$, $m = \overline{0, n_2 - 1}$, $k = \overline{n_0, n_1}$, $l = \overline{0, n_2}$.

Отметим, что матрицы $S_k(n)$ и векторы $\vec{t}_k(n)$ и $\vec{T}_k(n)$ могут быть легко найдены из матриц $S_{kl}(n, m)$. Однако вычисление матриц $S_{kl}(n, m)$ требует весьма больших объемов памяти и вычислений, что делает во многих случаях такой способ неприемлемым.

4 Вложенная цепь Маркова

Вложенную цепь Маркова для данной системы можно ввести различными способами. Здесь удобно определить ее таким образом.

Рассмотрим следующие моменты:

- моменты освобождения каких-либо приборов или поступления заявок в систему в случае, когда перед этими моментами было занято менее n_0 приборов;
- моменты освобождения каких-либо приборов в случае, когда перед этими моментами было занято ровно n_0 приборов.

Последовательность таких моментов обозначим через $\{\tau_l, l \geq 1\}$.

Отметим, что непосредственно после момента второго типа либо в системе остается ровно $n_0 - 1$ заявок (все они обслуживаются на приборах), либо на прибор поступает неприоритетная заявка из очереди.

Множество состояний вложенной цепи Маркова представляет собой пару (i, m) , $m = \overline{0, n_0 + n_2 - 1}$. Здесь i – фаза (процесса поступления-обслуживания) соответствующего слоя. Более хитро определяется второй компонент m множества состояний. А именно, если $m = \overline{0, n_0 - 1}$, то, как обычно, m – число заявок в системе (оно же номер слоя, или число занятых приборов). Однако если $m = \overline{n_0, n_0 + n_2 - 1}$, то число занятых приборов равно n_0 , а $m - n_0$ – число неприоритетных заявок в очереди. Саму цепь Маркова образуют фаза и число занятых приборов (номер слоя) или число занятых приборов (номер слоя) плюс число неприоритетных заявок в очереди непосредственно после моментов τ_l .

Матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова будем обозначать через $P = (P_{m_1 m_2})$, $m_1, m_2 = \overline{0, n_0 + n_2 - 1}$. Отметим, что в силу принятого соглашения элементы $P_{m_1 m_2}$ матрицы P сами являются матрицами размеров, определяемых числами фаз соответствующих слоев.

Матрицы $P_{m_1 m_2}$ определяются формулами:

$$P_{m, m-1} = -N_m^{-1} M_m, \quad m = \overline{1, n_0 - 1}; \\ P_{m, m+1} = -N_m^{-1} (\Lambda_m^{(1)} + \Lambda_m^{(2)}), \quad m = \overline{0, n_0 - 1}; \\ P_{m_1 m_2} = F_{m_2 - m_1 + 1} \Omega, \quad m_1 = \overline{n_0, n_0 + n_2 - 1}, \\ m_2 = \overline{m_1 - 1, n_0 + n_2 - 2}, \quad m_2 \neq n_0 - 1; \\ P_{n_0, n_0 - 1} = F_0; \\ P_{m, n_0 + n_2 - 1} = \tilde{F}_{n_0 + n_2 - m} \Omega, \quad m = \overline{n_0, n_0 + n_2 - 1}.$$

Остальные матрицы $P_{m_1 m_2}$ являются нулевыми.

Обозначим через \vec{p}^* вектор-строку стационарных вероятностей вложенной цепи Маркова. Естественно, координаты \vec{p}_m^* , $m = \overline{0, n_0 + n_2 - 1}$, вектора \vec{p}^* сами являются вектор-строками с координатами $(\vec{p}_m^*)_i$, где индекс i означает фазу.

Вектор \vec{p}^* удовлетворяет системе уравнений равновесия (СУР) $\vec{p}^* = \vec{p}^* P$ с условием нормировки

$$\sum_{m=0}^{n_0+n_2-1} \vec{p}_m^* \vec{1} = 1.$$

Для решения СУР удобно применить алгоритм, основанный на последовательном упрощении цепи Маркова с помощью исключения множеств состояний (см. [12], с. 22).

5 Стационарные характеристики системы

В этом разделе будут найдены основные стационарные характеристики функционирования общей системы.

Предположим, что в начальный момент времени вложенная цепь Маркова находилась в состоянии (i, n) , $n = \overline{0, n_0 + n_2 - 1}$. Обозначим через \vec{m}_n вектор-столбец, координатой $(\vec{m}_n)_i$ которого является среднее время до следующего момента изменения состояния вложенной цепи Маркова. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{m}_n &= -N_n^{-1} \vec{1}, \quad n = \overline{0, n_0 - 1}; \\ \vec{m}_n &= \vec{T}_0, \quad n = \overline{n_0, n_0 + n_2 - 1}. \end{aligned}$$

Среднее время \bar{m} между соседними моментами изменения вложенной цепи Маркова системы, функционирующей в стационарном режиме, равно

$$\bar{m} = \sum_{n=0}^{n_0+n_2-1} \vec{p}_n^* \vec{m}_n.$$

Введем следующие обозначения:

\vec{p}_n , $n = \overline{0, n_1}$, — вектор-строка с координатами $(\vec{p}_n)_i$, $i = \overline{1, I_n}$, представляющими собой стационарные вероятности того, что значение процесса $\nu(t)$ равно n и фаза равна i ;

$p_n^{(2)}$, $n = \overline{0, n_2}$, — стационарная вероятность того, что в системе в очереди неприоритетных заявок имеется n заявок (фаза не учитывается);

\vec{p}_{nm} , $n = \overline{0, n_1}$, $m = \overline{0, n_2}$, — вектор-строка с координатами $(\vec{p}_{nm})_i$, $i = \overline{1, I_n}$, представляющими собой стационарные вероятности того, что значение процесса $\nu(t)$ равно n , в очереди неприоритетных заявок находится m заявок и фаза равна i .

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{p}_n &= -\frac{1}{\bar{m}} \vec{p}_n^* N_n^{-1}, \quad n = \overline{0, n_0 - 1}; \\ \vec{p}_n &= \frac{1}{\bar{m}} \sum_{k=n_0}^{n_0+n_2-1} \vec{p}_k^* S_n, \quad n = \overline{n_0, n_1}; \\ p_0^{(2)} &= \frac{1}{\bar{m}} \left(-\sum_{k=0}^{n_0-1} \vec{p}_k^* N_k^{-1} \vec{1} + \vec{p}_{n_0}^* \vec{t}_0 \right); \\ p_n^{(2)} &= \frac{1}{\bar{m}} \sum_{k=0}^n \vec{p}_{n_0+k}^* \vec{t}_{n-k}, \quad n = \overline{1, n_2 - 1}; \\ p_{n_2}^{(2)} &= \frac{1}{\bar{m}} \sum_{k=0}^{n_2-1} \vec{p}_{n_0+k}^* \vec{T}_{n_2-k}; \\ \vec{p}_{n_0} &= \vec{p}_n, \quad n = \overline{0, n_0 - 1}; \\ \vec{p}_{nm} &= \vec{0}, \quad n = \overline{0, n_0 - 1}, \quad m = \overline{1, n_2}; \\ \vec{p}_{nm} &= \frac{1}{\bar{m}} \sum_{k=0}^m \vec{p}_{n_0+k}^* S_{nm}(m-k), \quad n = \overline{n_0, n_1}, \\ & \quad m = \overline{0, n_2 - 1}; \\ \vec{p}_{nn_2} &= \frac{1}{\bar{m}} \sum_{k=0}^{n_2-1} \vec{p}_{n_0+k}^* S_{nm}(m-k), \quad n = \overline{n_0, n_1}. \end{aligned}$$

Интенсивность поступления приоритетных заявок в стационарном режиме функционирования определяется формулой

$$\lambda^{(1)} = \sum_{n=0}^{n_1} \vec{p}_n \Lambda_n^{(1)} \vec{1},$$

а неприоритетных — формулой

$$\lambda^{(2)} = \sum_{n=0}^{n_1} \vec{p}_n \Lambda_n^{(2)} \vec{1}.$$

Стационарная вероятность потери приоритетной заявки определяется выражением

$$p_{\text{loss}}^{(1)} = \frac{1}{\lambda^{(1)}} \vec{p}_{n_1} \Lambda_{n_1}^{(1)} \vec{1},$$

а неприоритетной — выражением

$$p_{\text{loss}}^{(2)} = \frac{1}{\lambda^{(2)}} \sum_{n=n_0}^{n_1} \vec{p}_{n,n_2} \Lambda_n^{(2)} \vec{1}.$$

Пусть в начальный момент значение процесса $\nu(t)$ равнялось n , $n = \overline{n_0, n_1}$, и фаза была i , $i = \overline{1, I_n}$. Обозначим через $W(x; n)$ матрицу, элементом $W_{ij}(x; n)$, $j = \overline{1, I_{n-1}}$, которой является вероятность того, что время до первого момента, когда значение процесса $\nu(t)$ станет равным $n-1$,

будет меньше x и фаза в этот момент будет j . Положим

$$w(\omega; n) = \int_0^{\infty} e^{-\omega x} dW(x; n) \quad n = \overline{n_0, n_1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} w(\omega; n_1) &= (\omega E - N_{n_1}^{(0)})^{-1} M_{n_1}; \\ w(\omega; n) &= (\omega E - N_n^{(1)})^{-1} \left[M_n + \right. \\ &\quad \left. + \Lambda_n^{(1)} w(\omega; n+1) w(\omega; n) \right], \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\omega; n) &= w(\omega; n) \cdots w(\omega; n_0), \quad n = \overline{n_0, n_1}; \\ w^*(\omega) &= w(\omega; n_0). \end{aligned}$$

Преобразование Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) стационарного распределения времени ожидания начала обслуживания принятой в систему неприоритетной заявки (предполагается, что неприоритетные заявки обслуживаются в порядке поступления) определяется формулой:

$$\begin{aligned} w^{(2)}(\omega) &= \frac{1}{\lambda^{(2)}(1 - p_{\text{loss}})} \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} \tilde{p}_n \Lambda_n^{(2)} \tilde{\Gamma} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=n_0}^{n_1} \sum_{m=0}^{n_2-1} \tilde{p}_{nm} \Lambda_n^{(2)} \tilde{w}(\omega; n) [\Omega w^*(\omega)]^m \tilde{\Gamma} \right). \end{aligned}$$

Стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания принятой в систему приоритетной заявки (в предположении, что и приоритетные заявки обслуживаются в порядке поступления) здесь будет вычислено для несколько упрощенного варианта общей системы. А именно, будем предполагать, что общее число приборов в системе равно n^* , $n_0 \leq n^* \leq n_1$. Тогда если суммарное число $\nu(t)$ неприоритетных заявок на приборах и приоритетных заявок в системе в момент t меньше n^* , то поступающая в систему в этот момент приоритетная заявка попадает на прибор, а если $\nu(t)$ не меньше n^* , то становится в очередь и ждет, пока не обслужатся $\nu(t) - n^* + 1$ заявок. Кроме того, предполагается, что $I_n = \tilde{I}$, $\Lambda_n^{(u)} = \tilde{\Lambda}^{(u)}$, $u = 1, 2$, $M_n = \tilde{M}$ и $N_n = \tilde{N}$ для всех n , $n^* \leq n \leq n_1$. Тогда ПЛС стационарного распределения времени ожидания принятой к обслуживанию приоритетной заявки определяется формулой:

$$\begin{aligned} w^{(1)}(\omega) &= \frac{1}{\lambda^{(1)}(1 - p_{\text{loss}})} \left[\sum_{n=0}^{n^*-1} \tilde{p}_n \Lambda_n^{(1)} \tilde{\Gamma} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=n^*}^{n_1-1} \tilde{p}_n \tilde{\Lambda}^{(1)} \left[(\omega E - \tilde{N}^{(0)})^{-1} \tilde{M} \right]^{n-n^*+1} \tilde{\Gamma} \right], \end{aligned}$$

где $\tilde{N}^{(0)} = \tilde{N} + \tilde{\Lambda}^{(1)} + \tilde{\Lambda}^{(2)}$.

Отметим, что приведенное выше описание общей системы является недостаточным для вычисления распределений, связанных с временами обслуживания на приборах и пребывания заявок в системе.

6 Двухприоритетная СРКП

Рассмотрим теперь двухприоритетную СРКП с марковским входящим потоком, фазовыми распределениями времен обслуживания заявок каждого типа и относительным приоритетом. Эта система описывается следующим образом.

В систему поступает марковский поток заявок двух типов, определяемый квадратными матрицами $\Lambda^{(u)}$, $u = 1, 2$, и N порядка J , представляющими собой матрицы интенсивностей переходов процесса генерации заявок с поступлением заявки u -го типа и без поступления заявок.

Время обслуживания заявки u -го типа имеет *PH*-распределение с параметрами $(\vec{b}^{(u)}, M^{(u)})$, где $\vec{b}^{(u)}$ и $M^{(u)}$ — вектор-строка размерности J_u и матрица того же порядка.

В системе имеется n^* приборов. Однако заявки второго типа (неприоритетные) принимаются к обслуживанию только в том случае, если число занятых приборов меньше $n_0 \leq n^*$; в противном случае они становятся в очередь неприоритетных заявок с числом мест ожидания n_2 . Заявки первого типа (приоритетные) поступают на обслуживание, если имеется хотя бы один свободный прибор, а иначе становятся в очередь приоритетных заявок с числом мест ожидания $n_1 - n^*$. Заявка u -го типа, поступившая при отсутствии свободных мест ожидания в соответствующей очереди, теряется. Прерывание обслуживания заявки любого типа не допускается.

Естественно, при $n^* = n_0$ неприоритетные заявки могут поступать из очереди на освободившийся прибор только в том случае, когда нет заявок в очереди приоритетных заявок, т.е. имеет место стандартная СМО *MAP/PH₂/n₀/(n₁ - n₀, n₂)* с относительным приоритетом.

Покажем, как двухприоритетную СРКП можно привести к общей рассматриваемой марковской модели (упрощенный вариант). При этом сразу же заметим, что предлагаемый способ не является наилучшим, поскольку приводит к матрицам большой размерности. Применение более рациональных способов, основанных на фиксации только числа заявок, обслуживаемых на разных фазах (см., например, [13]), технически более сложно, и такие способы здесь не описываются.

Введем обозначения:

E_J — единичная матрица порядка J ;

$E^{(n)}$ — единичная матрица порядка $(J_1 + J_2)^n$;

$E_1^{(n)}$ — единичная матрица порядка J_1^n ;

$\vec{\beta}_1 = (b_1^{(1)}, \dots, b_{J_1}^{(1)}, 0, \dots, 0)$ — вектор-строка порядка $J_1 + J_2$;

$\vec{\beta}_2 = (0, \dots, 0, b_1^{(2)}, \dots, b_{J_2}^{(2)})$ — вектор-строка порядка $J_1 + J_2$;

$\vec{\beta} = (b_1^{(1)}, \dots, b_{J_1}^{(1)}, b_1^{(2)}, \dots, b_{J_2}^{(2)})$ — вектор-строка порядка $J_1 + J_2$;

$$M = \begin{pmatrix} M^{(1)} & 0 \\ 0 & M^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Положим

$$I_n = \begin{cases} J(J_1 + J_2)^{n_0} J_1^{n^* - n_0}, & n = \overline{n^* + 1, n_1}, \\ J(J_1 + J_2)^{n_0} J_1^{n - n_0}, & n = \overline{n_0 + 1, n^*}, \\ J(J_1 + J_2)^n, & n = \overline{0, n_0}; \end{cases}$$

$$\mu_i^{(u)} = - \sum_{j=1}^{J_u} M_{ij}^{(u)}; \quad \vec{\mu}^{(1)} = (\mu_1^{(1)}, \dots, \mu_{J_1}^{(1)})^T;$$

$$\vec{\mu}^{(2)} = (\mu_1^{(2)}, \dots, \mu_{J_2}^{(2)})^T;$$

$$\vec{\mu} = (\mu_1^{(1)}, \dots, \mu_{J_1}^{(1)}, \mu_1^{(2)}, \dots, \mu_{J_2}^{(2)})^T;$$

$$\Lambda_n^{(1)} = \begin{cases} \Lambda^{(1)} \otimes E_1^{(n^* - n_0)} \otimes E^{(n_0)}, & n = \overline{n^*, n_1}, \\ \Lambda^{(1)} \otimes \vec{b}^{(1)} \otimes E_1^{(n - n_0)} \otimes E^{(n_0)}, & n = \overline{n_0, n^* - 1}, \\ \Lambda^{(1)} \otimes \vec{\beta}_1 \otimes E^{(n)}, & n = \overline{0, n_0 - 1}; \end{cases}$$

$$\Lambda_n^{(2)} = \begin{cases} \Lambda^{(2)} \otimes E_1^{(n^* - n)} \otimes E^{(n_0)}, & n = \overline{n^*, n_1}, \\ \Lambda^{(2)} \otimes E_1^{(n - n_0)} \otimes E^{(n_0)}, & n = \overline{n_0, n^* - 1}, \\ \Lambda^{(2)} \otimes E^{(n)} \otimes \vec{\beta}_2, & n = \overline{0, n_0 - 1}; \end{cases}$$

$$M_n = \begin{cases} E_J \otimes \vec{b}^{(1)} \otimes \left(\sum_{k=0}^{n^* - n_0 - 1} E_1^{(k)} \otimes \vec{\mu}^{(1)} \otimes \right. \\ \left. \otimes E_1^{(n^* - n_0 - k - 1)} \otimes E^{(n_0)} + E_1^{(n^* - n_0)} \otimes \right. \\ \left. \otimes \sum_{k=0}^{n_0 - 1} E^{(k)} \otimes \vec{\mu} \otimes E^{(n_0 - k - 1)} \right), & n = \overline{n^* + 1, n_1}, \\ E_J \otimes \left(\sum_{k=0}^{n - n_0 - 1} E_1^{(k)} \otimes \vec{\mu}^{(1)} \otimes E_1^{(n - n_0 - k - 1)} \otimes \right. \\ \left. \otimes E^{(n_0)} + E_1^{(n - n_0)} \otimes \sum_{k=0}^{n_0 - 1} E^{(k)} \otimes \vec{\mu} \otimes \right. \\ \left. \otimes E^{(n_0 - k - 1)} \right), & n = \overline{n_0 + 1, n^*}, \\ E_J \otimes \sum_{k=0}^{n - 1} E^{(k)} \otimes \vec{\mu} \otimes E^{(n - k - 1)}, & n = \overline{1, n_0}; \end{cases}$$

$$N_n = \begin{cases} N \otimes E_1^{(n^* - n_0)} \otimes E^{(n_0)} + \\ + E_J \otimes \left(\sum_{k=0}^{n^* - n_0 - 1} E_1^{(k)} \otimes M^{(1)} \otimes \right. \\ \left. \otimes E_1^{(n^* - n_0 - k - 1)} \otimes E^{(n_0)} + E_1^{(n^* - n_0)} \otimes \right. \\ \left. \otimes \sum_{k=0}^{n_0 - 1} E^{(k)} \otimes M \otimes E^{(n_0 - k - 1)} \right), & n = \overline{n^* + 1, n_1}, \\ N \otimes E_1^{(n - n_0)} \otimes E^{(n_0)} + \\ + E_J \otimes \left(\sum_{k=0}^{n - n_0 - 1} E_1^{(k)} \otimes M^{(1)} \otimes \right. \\ \left. \otimes E_1^{(n - n_0 - k - 1)} \otimes E^{(n_0)} + E_1^{(n - n_0)} \otimes \right. \\ \left. \otimes \sum_{k=0}^{n_0 - 1} E^{(k)} \otimes M \otimes E^{(n_0 - k - 1)} \right), & n = \overline{n_0 + 1, n^*}, \\ N \otimes E^{(n)} + E_J \otimes \sum_{k=0}^{n - 1} E^{(k)} \otimes M \otimes \\ \otimes E^{(n - k - 1)}, & n = \overline{1, n_0}, \\ N, & n = 0; \end{cases}$$

$$\Omega = E_J \otimes E^{(n_0 - 1)} \otimes \vec{\beta}_2.$$

Определив таким образом исходные параметры рассмотренной в предыдущих разделах общей марковской системы, приходим к двухприоритетной СРКП, описанной в настоящем разделе. При этом принята следующая нумерация приборов: прибору, на который поступает новая приоритетная заявка, присваивается первый номер (номера остальных приборов увеличиваются на единицу), а неприоритетная заявка — последний номер. Ясно, что если число n обслуживаемых заявок больше n_0 , то на приборах с номерами от одного до $n - n_0$ обязательно находятся приоритетные заявки.

Кратко остановимся на тех показателях функционирования СРКП, которые можно вычислить с помощью более простых, чем для общей системы, формул.

Прежде всего, стационарная вероятность $p_n^{(1)}$, $n = \overline{0, n_1 - n^*}$, того, что в системе в очереди приоритетных заявок имеется n заявок (без учета фазы), определяется формулами:

$$p_0^{(1)} = \sum_{k=0}^{n^*} \vec{p}_k \vec{1};$$

$$p_n^{(1)} = \vec{p}_{n^* + n} \vec{1}, \quad n = \overline{1, n_1 - n^*}.$$

Далее обозначим через $\vec{\pi}$ вектор-строку стационарных вероятностей состояний процесса генерации заявок. Для $\vec{\pi}$ справедлива СУР

$$\vec{\pi}(\Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} + N) = \vec{0}$$

с условием нормировки $\vec{\pi} \vec{1} = 1$. Тогда стационарную интенсивность поступления заявок u -го типа можно записать в форме:

$$\lambda^{(u)} = \vec{\pi} \Lambda^{(u)} \vec{1}, \quad u = 1, 2.$$

Введем матрицы $t_k(n)$, $k = \overline{1, n_2 - 1}$, $n = \overline{n_0, n_1}$, и $T_k(n)$, $k = \overline{1, n_2}$, $n = \overline{n_0, n_1}$, размерности $I_{n_0+n} \times J$, отличающиеся от векторов $\vec{t}_k(n)$ и $\vec{T}_k(n)$, определенных в разд. 2, только тем, что второй индекс j элементов $(t_k(n))_{ij}$ и $(T_k(n))_{ij}$, $i = \overline{1, I_{n_0+n}}$, $j = \overline{1, J}$, этих матриц фиксирует состояние процесса генерации. Для матриц $t_k(n)$ и $T_k(n)$ справедливы формулы:

$$\begin{aligned} t_0(n_1) &= (-N_{n_1}^{(2)})^{-1} (E_J \otimes \vec{1}); \\ T_0(n_1) &= (-N_{n_1}^{(0)})^{-1} (E_J \otimes \vec{1}); \\ t_k(n_1) &= (-N_{n_1}^{(2)})^{-1} \Lambda_{n_1}^{(2)} t_{k-1}(n_1), \quad k = \overline{1, n_2 - 1}; \\ T_k(n_1) &= (-N_{n_1}^{(2)})^{-1} \Lambda_{n_1}^{(2)} T_{k-1}(n_1), \quad k = \overline{1, n_2}; \\ t_0(n) &= -N_n^{-1} [(E_J \otimes \vec{1}) + \Lambda_n^{(1)} t_0(n+1) + \\ &\quad + \Lambda_n^{(1)} F_0(n+1) t_0(n)], \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}; \\ T_0(n) &= (-N_n^{(1)})^{-1} [(E_J \otimes \vec{1}) + \Lambda_n^{(1)} T_0(n+1) + \\ &\quad + \Lambda_n^{(1)} \tilde{F}_0(n+1) T_0(n)], \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}; \\ t_k(n) &= -N_n^{-1} \left[\Lambda_n^{(1)} \left(t_k(n+1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=0}^k F_i(n+1) t_{k-i}(n) \right) + \Lambda_n^{(2)} t_{k-1}(n) \right], \\ &\quad k = \overline{1, n_2 - 1}, \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}; \\ T_k(n) &= -N_n^{-1} \left[\Lambda_n^{(1)} \left(T_k(n+1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=0}^{k-1} F_i(n+1) T_{k-i}(n) + \tilde{F}_k(n+1) T_0(n) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Lambda_n^{(2)} T_{k-1}(n) \right], \quad k = \overline{1, n_2}, \quad n = \overline{n_0, n_1 - 1}. \end{aligned}$$

Эти формулы фактически не отличаются от формул (4)–(11).

Вводя обозначения $t_k = t_k(0)$, $T_k = T_k(0)$, получаем для вектор-строк $\vec{p}_n^{(2)}$, $n = \overline{0, n_2}$, стационарных вероятностей того, что в системе в очереди неприоритетных заявок имеется n заявок (теперь уже с учетом фазы генерации), соотношения

$$\vec{p}_0^{(2)} = \frac{1}{\vec{m}} \left(- \sum_{k=0}^{n_0-1} \vec{p}_k^* N_k^{-1} (E_J \otimes \vec{1}) + \vec{p}_{n_0}^* t_0 \right);$$

$$\vec{p}_n^{(2)} = \frac{1}{\vec{m}} \sum_{k=0}^n \vec{p}_{n_0+k}^* t_{n-k}, \quad n = \overline{1, n_2 - 1};$$

$$\vec{p}_{n_2}^{(2)} = \frac{1}{\vec{m}} \sum_{k=0}^{n_2-1} \vec{p}_{n_0+k}^* T_{n_2-k}.$$

Стационарная вероятность потери неприоритетной заявки определяется формулой

$$p_{\text{loss}}^{(2)} = \frac{1}{\lambda^{(2)}} \vec{p}_{n_2}^{(2)} \Lambda^{(2)} \vec{1}.$$

Наконец, учитывая, что ПЛС $\beta^{(1)}(\omega)$ и $\beta^{(2)}(\omega)$ времен обслуживания приоритетной и неприоритетной заявок задаются выражениями $\beta^{(1)}(\omega) = \vec{b}^{(1)}(\omega E - M^{(1)})^{-1} \vec{\mu}^{(1)}$ и $\beta^{(2)}(\omega) = \vec{b}^{(2)}(\omega E - M^{(2)})^{-1} \vec{\mu}^{(2)}$, получаем для ПЛС $v^{(1)}(\omega)$ и $v^{(2)}(\omega)$ стационарных распределений $V^{(1)}(x)$ и $V^{(2)}(x)$ времен пребывания в системе принятых к обслуживанию приоритетной и неприоритетной заявок следующие формулы:

$$v^{(1)}(\omega) = w^{(1)}(\omega) \beta^{(1)}(\omega);$$

$$v^{(2)}(\omega) = w^{(2)}(\omega) \beta^{(2)}(\omega).$$

7 Заключение

Таким образом, в настоящей статье получены аналитические соотношения для вычисления основных стационарных показателей функционирования двухприоритетной СРКП и ее обобщения. При этом соотношения для стационарных распределений очередей могут быть использованы для непосредственного вычисления этих характеристик, в то время как с помощью полученных в терминах ПЛС соотношений для стационарных временных характеристик можно находить только моменты.

Отметим, что стационарные распределения времен пребывания в системе приоритетных и неприоритетных заявок можно получать в виде степенных матричных рядов, однако такой способ приводит к очень громоздким вычислениям, особенно для неприоритетных заявок.

Литература

1. Grandjean C. H. Traffic calculations in saturation routing with priorities // Electr. Commun., 1974. Vol. 49. No. 1. P. 72–79.
2. Людвиг Г., Рой Р. Ограничения для сетей с волновым поиском сетей // Тр. ин-та инженеров электроники и радиоэлектроники, 1977. Т. 65. № 9. С. 154–165.

3. *Weber J. H.* Some traffic characteristics of communications networks with automatic alternate routing // *Bell System Techn. J.*, 1962. March. P. 1201–1247.
4. *Weber J. H.* Simulation study of routing and control in communications networks // *Bell System Techn. J.*, 1964. Nov. P. 2639–2676.
5. *Grandjean C. H.* Call routing strategies in telecommunications networks // *Electr. Commun.*, 1967. Vol. 42. No. 3. P. 380–391.
6. *Джейсуол Н.* Очереди с приоритетами. — М.: Мир, 1973.
7. *Esoqbue A. O., Singh A. J.* A stochastic model for a optimal priority bed distribution in a hospital // *Oper. Res.*, 1976. No. 24. P. 884–889.
8. *Otterman J.* Grande of service direct traffic mixed with store-and-forward traffic // *Bell System Techn. J.*, 1962. Apr. P. 1415–1437.
9. *Liu F. K.* A combined delay and loss system with priority // *ICC*, 1973. Vol. 39. No. 7. P. 39-7–39-13.
10. *Печинкин А. В., Федоров В. М.* Методика расчета многоканальной системы приоритетного обслуживания с резервированием каналов // *Системное моделирование*. Вып. 15. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1990.
11. *Бурыгин С. В., Глазунов А. С., Печинкин А. В.* Система приоритетного обслуживания с резервированием каналов и марковским входящим потоком // *Вестник Российского ун-та дружбы народов*. Сер. Прикладная математика и информатика, 2001. № 1. С. 80–89.
12. *Bocharov P. P., D'Apice C., Pechinkin A. V., Salerno S.* *Queueing theory*. — Utrecht–Boston: VSP, 2004.
13. *Печинкин А. В., Чаплыгин В. В.* Стационарные характеристики системы массового обслуживания $SM/MSP/n/r$ // *Автоматика и телемеханика*, 2004. № 9. С. 85–100.

УТОЧНЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНОЙ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПУАССОНОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ СУММ К НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ*

С. В. Гавриленко¹

Аннотация: Строятся неравномерные оценки скорости сходимости в классической центральной предельной теореме с уточненной структурой. С помощью этих структурных уточнений показано, что абсолютная константа в неравномерной оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме (ЦПТ) для пуассоновских случайных сумм строго меньше, чем аналогичная константа в неравномерной оценке скорости сходимости в классической ЦПТ, и при условии существования третьих моментов слагаемых не превосходит 22,7707. В качестве следствия построены неравномерные оценки скорости сходимости смешанных пуассоновских, в частности отрицательных биномиальных случайных сумм.

Ключевые слова: центральная предельная теорема; скорость сходимости; неравномерная оценка; абсолютная константа; пуассоновская случайная сумма; смешанное пуассоновское распределение

1 Введение

Пусть X_1, X_2, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$, $E|X_1|^3 = \beta_3 < \infty$. Положим $F_n(x) = P(X_1 + \dots + X_n < x\sqrt{n})$. Пусть $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения, т. е.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Известно, что при указанных условиях существуют абсолютные положительные конечные константы C_0 и C_1 такие, что [1, 2]

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C_0 \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} \quad (1)$$

и [3, 4]:

$$\begin{aligned} \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| &\leq C_1 \frac{\beta_3 + 1}{\sqrt{n}} = \\ &= C_1 \left(1 + \frac{1}{\beta_3}\right) \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}. \quad (2) \end{aligned}$$

Для констант C_0 и C_1 известны следующие численные оценки [4, 5]:

$$0,4097 \approx \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} \leq C_0 \leq 0,4784$$

и [3, 4]:

$$0,2659 \approx \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \leq C_1 \leq 0,3041.$$

При этом, поскольку всегда $\beta_3 \geq 1$, при больших значениях β_3 оценка (2) точнее, чем (1), за счет меньших значений абсолютных констант.

Оценка скорости сходимости $F_n(x)$ к $\Phi(x)$, устанавливаемая неравенствами (1) и (2), равномерна по x . Но поскольку и $F_n(x)$, и $\Phi(x)$ — функции распределения, то должно выполняться соотношение $|F_n(x) - \Phi(x)| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow 0$. Это обстоятельство не учитывается в равномерных оценках. Вместе с тем точность нормальной аппроксимации для функции распределения сумм случайных величин именно при больших значениях аргумента представляет особый интерес, например, при вычислении рисков критически больших потерь. В данной статье будут рассмотрены неравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме.

По-видимому, исторически первая оценка такого рода была получена в работе [6], где для $\delta = 1$, то есть для случая существования третьего момента слагаемых, было доказано существование конечной положительной абсолютной постоянной A такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$(1 + x^2)|F_n(x) - \Phi(x)| \leq A \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}.$$

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки (государственный контракт 16.740.11.0133 от 02.09.2010).

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, gavrilenco.cmc@gmail.com

Этот результат был усилен в работе [7], где было показано, что существует такое положительное конечное число C , что

$$\sup_x (1 + |x|^3) |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}. \quad (3)$$

При этом для рассматриваемых условий на моменты слагаемых порядок оценки (3) по x неулучшаем без дополнительных предположений.

Что касается значения абсолютной константы C в (3), то в работе [8] было показано, что $C \leq C_0 + 8(1 + \epsilon)$, что с учетом оценки $C_0 \leq 0,4784$, полученной в [4, 9], влечет оценку $C \leq 30,2247$. Недавно эта оценка была уточнена в работе [10], где было показано, что $C \leq 25,7984$.

В данной работе с помощью модификации метода Л. Падитца [11] будут построены альтернативные неравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме, имеющие структуру, аналогичную неравенству (2). Полученные оценки затем будут использованы для уточнения абсолютной константы в аналоге неравенства (3) для пуассоновских случайных сумм.

Согласно результатам работы [12], в качестве абсолютной константы в неравномерной оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме для пуассоновских случайных сумм можно брать абсолютную константу C из неравенства (3). В предлагаемой статье с использованием упомянутых выше структурных уточнений неравенства (3) будет показано, что на самом деле абсолютная константа в неравномерной оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме для пуассоновских случайных сумм строго меньше, чем аналогичная константа в неравенстве (3), и не превосходит 22,7707. С помощью этих результатов затем будут построены неравномерные оценки скорости сходимости распределений смешанных пуассоновских, в частности отрицательных биномиальных, случайных сумм.

2 Неравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме с уточненной структурой

Идея, лежащая в основе метода построения неравномерных оценок точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых случайных величин, описанного в работе [11],

заключается в подходящем разбиении вещественной прямой на зоны «малых», «умеренных» и «больших» значений x . Традиционно используются разбиения следующего вида:

- i* «малые» значения $x: 0 \leq x^2 \leq K^2$;
- ii* «умеренные» значения $x: K^2 \leq x^2 \leq c_n(x; a, b)$;
- iii* «большие» значения $x: c_n(x; a, b) \leq x^2 < \infty$,

где $K > 0$, $a > 0$, $b > 1$ — вспомогательные свободные параметры,

$$c_n(x; a, b) = 2b \left[\log |x|^3 - \log \left(a \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} \right) \right]$$

(см., в частности, [11, 13]).

2.1 Случай *i* и *iii*, то есть «малые» и «большие» значения x

В случае *i*, т.е. для $0 \leq |x| \leq K$, в соответствии с неравенством (2) имеем

$$\begin{aligned} |x|^3 |F_n(x) - \Phi(x)| &\leq C_1 K^3 \frac{\beta_3 + 1}{\sqrt{n}} = \\ &= C_1 K^3 \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + C_1 K^3 \frac{1}{n^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае же *iii*, т.е. для $x^2 \in [2b(\log |x|^3 - \log(a\beta_3/\sqrt{n})), \infty]$, в соответствии с работами [14, 15] справедлив следующий результат. Обозначим

$$P(a, b, K) = (2b)^3 + a \exp \left\{ \frac{(2b)^3}{a} - \frac{(b-1)K^2}{2b} \right\}.$$

Лемма 2.1. *Предположим, что $x^2 \geq c_n(x; a, b) \geq K^2 \geq (2\pi)^{-1}$. Тогда для любого $n \geq 1$*

$$|x|^3 |F_n(x) - \Phi(x)| \leq P(a, b, K) \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}.$$

Доказательство см. в работах [14, 15].

2.2 Случай *ii*, то есть «умеренные» значения x

Рассмотрение этого случая базируется на следующем фундаментальном неравенстве (см. [8] и [15]), в котором без ограничения общности $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} |F_n(x) - \Phi(x)| &\leq n\mathbb{P}(|X_1| > y) + \left| f^n(h) - \right. \\ &\quad \left. - \exp \left\{ \frac{1}{2} h^2 n \right\} \right| \exp \{ -hx\sqrt{n} \} \mathbb{P}(S_n^* > x\sqrt{n}) + \\ &\quad + 2 \exp \left\{ \frac{1}{2} h^2 n - hx\sqrt{n} \right\} \cdot \sup_{u \geq x} \left| \mathbb{P}(S_n^* < u\sqrt{n}) - \right. \\ &\quad \left. - \Phi(u - h\sqrt{n}) \right|, \end{aligned} \quad (5)$$

где $f(h) = E \exp \{h\bar{X}_1\}$, $\bar{X}_1 = X_1 I\{|X_1| < y\}$, $S_n^* = X_1^* + \dots + X_n^*$ — сумма независимых одинаково распределенных случайных величин с общей функцией распределения

$$P(X_1^* < u) = \frac{1}{f(h)} \int_{-\infty}^u e^{ht} dP(\bar{X}_1 < t),$$

$$y = \gamma x \sqrt{n}, \quad h = \frac{(1-\gamma)x}{\sqrt{n}}, \quad \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Для начала сформулируем два утверждения, которые будут неоднократно использоваться в дальнейшем. Во-первых, если $x^2 \leq c_n(x; a, b)$, то (см. *ii*)

$$\frac{\beta_3}{\sqrt{n}} \leq \frac{|x|^3}{a} \exp\left\{-\frac{x^2}{2b}\right\}. \quad (6)$$

Во-вторых, если $x^2 \geq K^2$, то (см. [14])

$$x^r \exp\{-sx^2\} \leq K^r \exp\{-sK^2\} \quad (7)$$

при $x \geq \sqrt{r/(2s)}$ ($r > 0, s > 0$) или $r \leq 0$.

Чтобы оценить выражение

$$I_1 = \left| f^n(h) - \exp\left\{\frac{1}{2}h^2n\right\} \right| \exp\{-hx\sqrt{n}\},$$

воспользуемся результатом из [15], согласно которому

$$I_1 \leq \max \left\{ \exp\left\{\frac{1}{2}h^2n - hx\sqrt{n} + \frac{\beta_3 e^{hy}}{n^{1/2}(\gamma x)^3}\right\} \times \right. \\ \left. \times \frac{\beta_3 e^{hy}}{n^{1/2}(\gamma x)^3}, n \exp\left\{\frac{1}{2}h^2n - hx\sqrt{n}\right\} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{h^4}{4} + \frac{\beta_3 e^{hy}}{y^3}\right) \left(1 - \frac{\beta_3 e^{hy}}{n^{1/2}(\gamma x)^3}\right)^{-1} \right\}.$$

Из (6) вытекает, что

$$1 - \frac{\beta_3 e^{hy}}{n^{1/2}(\gamma x)^3} \geq \\ \geq 1 - \frac{1}{a\gamma^3} \exp\left\{\left(\gamma(1-\gamma) - \frac{1}{2b}\right)x^2\right\} \equiv A_1(x).$$

Здесь и далее символами $A(x)$, $A_1(x)$, $A_2(x)$,... будут обозначаться положительные функции аргумента x , а также зависящие от параметров a, b, γ . Принимая во внимание оценку

$$n^{-1/2} \leq \left(\frac{\beta_3}{\sqrt{n}}\right)^{1/3}$$

и неравенство (6), получим

$$n \left(\frac{h^4}{4} + \frac{\beta_3 e^{hy}}{y^3}\right) \leq \\ \leq \frac{\beta_3}{n^{1/2}|x|^3} \left[\frac{(1-\gamma)^4 x^8}{4a^{1/3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{6b}\right\} + \frac{e^{\gamma(1-\gamma)x^2}}{\gamma^3} \right].$$

С учетом неравенства

$$\exp\{1 - A_1(x)\} \leq \frac{1}{A_1(x)}, \quad A_1(x) > 0,$$

также получаем

$$\exp\left\{\frac{1}{2}h^2n - hx\sqrt{n} + \frac{\beta_3 e^{hy}}{n^{1/2}(\gamma x)^3}\right\} \leq \\ \leq \exp\left\{\frac{1}{2}h^2n - hx\sqrt{n} + 1 - A_1(x)\right\} \leq \\ \leq \frac{1}{A_1(x)} \exp\left\{\frac{1}{2}h^2n - hx\sqrt{n}\right\}.$$

Наконец, если $\gamma(1-\gamma) - 1/(2b) < 0$, т.е. $b < < [2\gamma(1-\gamma)]^{-1}$, то

$$I_1 \leq \frac{A_2(x)\beta_3}{n^{1/2}A_1(K)|x|^3}, \quad (8)$$

где $A_1(K) > 0$ и

$$A_2(x) = \frac{(1-\gamma)^4 x^8}{4a^{1/3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\left[\frac{1}{3b} + 1 - \gamma^2\right]\right\} + \\ + \frac{1}{\gamma^3} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}(1-\gamma)^2\right\}.$$

Для удобства дальнейших ссылок заметим, что с учетом (6)

$$f(h) \geq 1 - \frac{h\beta_3}{\gamma^2} \geq 1 - \frac{x^2(1-\gamma)}{a\gamma^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2b}\right\} \equiv A_3(x)$$

(см. соотношение (4.18) в [15]).

Теперь оценим $E(X_1^*)^2$. В соответствии с [15] получаем, что если $K \geq \sqrt{2b}$ (см. (7), то

$$E(X_1^*)^2 \leq \frac{1}{A_3^2(K)} \left(h + \frac{\beta_3 e^{hy}}{y^3}\right)^2 \leq A_4(x) \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}, \quad (9)$$

где

$$A_4(x) = \frac{1}{A_3^2(x)x^1 a^{1/3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{6b}\right\} \left[x^2(1-\gamma) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma^2 a^{1/3}} \exp\left\{\left(\gamma(1-\gamma) - \frac{1}{6b}\right)x^2\right\} \right]^2.$$

Далее, согласно [15]

$$f^{-1}(h) \geq 2 - f(h) \geq 1 - \frac{h^2}{2} - \frac{\beta_3 e^{hy}}{y^3} \geq \geq 1 - A_5(x) \frac{\beta_3}{\sqrt{n}},$$

где

$$A_5(x) = \frac{(1-\gamma)^2 x^3}{2a^{1/3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{6b}\right\} + \frac{1}{\gamma^3 a^{2/3} x} \exp\left\{\left(\gamma(1-\gamma) - \frac{1}{3b}\right)x^2\right\},$$

а также

$$f(h)E(X_1^*)^2 \geq 1 - \beta_3 \max\{\gamma^{-1}, h\}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} B_n^2(h) &\equiv DS_n^* = n \left[E(X_1^*)^2 - (EX_1^*)^2 \right] \geq \\ &\geq n \left[f^{-1}(h) \left(1 - \beta_3 \max\{\gamma^{-1}, h\} \right) \right] - \\ &- n (EX_1^*)^2 \geq n \left(1 - \frac{A_5(x)\beta_3}{n^{1/2}} \right) - \\ &- \frac{n^{1/2}\beta_3}{A_3(K)\gamma x} \max\{1, \gamma(1-\gamma)x^2\} - \\ &- A_4(x)n^{1/2}\beta_3 = n \left[1 - A_6(x) \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} \right], \end{aligned}$$

где

$$A_6(x) = A_4(x) + A_5(x) + \frac{\max\{1, \gamma(1-\gamma)x^2\}}{A_3(K)\gamma x}.$$

С учетом (6) имеем

$$B_n^2(h) \geq n \left(1 - \frac{x^3 A_6(x)}{a} \exp\left\{-\frac{x^2}{2b}\right\} \right) \equiv \equiv nA_7(x); \quad (10)$$

$$\frac{n - B_n^2(h)}{B_n^2(h)} \leq \frac{A_6(x) \beta_3}{A_7(x) \sqrt{n}}. \quad (11)$$

Справедливы неравенства

$$E|X_1^* - EX_1^*|^3 \leq \leq E|X_1^*|^3 + 3E(X_1^*)^2 |EX_1^*| + E|X_1^*| (EX_1^*)^2;$$

$$E|X_1^*|^3 \leq \frac{e^{hy}\beta_3}{A_3(K)} \leq \frac{1}{A_3(K)} \exp\{\gamma(1-\gamma)x^2\}\beta_3;$$

$$\begin{aligned} 3E(X_1^*)^2 |EX_1^*| &\leq \\ &\leq \frac{3\beta_3}{A_3^2(K)x} \left[\frac{(1-\gamma)x^3}{a^{1/3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{6b}\right\} + \right. \\ &+ \frac{x + x^3\gamma(1-\gamma)\gamma^2 a^{2/3}}{\exp} \left\{ \left(\gamma(1-\gamma) - \frac{1}{3b} \right) x^2 \right\} + \\ &+ \left. \frac{x}{\gamma^3 a} \exp\left\{ \left(2\gamma(1-\gamma) - \frac{1}{2b} \right) x^2 \right\} \right] \equiv A_8(x)\beta_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E|X_1^*| (EX_1^*)^2 &\leq \sqrt{E(X_1^*)^2} (EX_1^*)^2 \leq \\ &\leq \frac{\beta_3}{A_3^{5/2}(K)a^{2/3}} \exp\left\{ \left(\frac{5}{2}\gamma(1-\gamma) - \frac{3}{4b} \right) x^2 \right\} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\gamma a^{1/3}} + \exp\left\{ \left(\frac{1}{6b} - \gamma(1-\gamma) \right) x^2 \right\} \right]^{1/2} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\gamma^2 a^{1/3}} + \right. \\ &+ \left. x^2(1-\gamma) \exp\left\{ \left(\frac{1}{6b} - \gamma(1-\gamma) \right) x^2 \right\} \right]^2 \equiv \\ &\equiv A_9(x)\beta_3. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$E|X_1^* - EX_1^*|^3 \leq A_{10}(x)\beta_3, \quad (12)$$

где

$$A_{10}(x) = \frac{1}{A_3(K)} \exp\{\gamma(1-\gamma)x^2\} + A_8(x) + A_9(x).$$

Следовательно, в соответствии с неравенством (2), учитывая (12) и (10), имеем

$$\begin{aligned} \left| P\left(\frac{S_n^* - ES_n^*}{\sqrt{DS_n^*}} < u \right) - \Phi(u) \right| &\leq \\ &\leq 0,3041 \frac{E|X_1^* - EX_1^*|^3 + 1}{\sqrt{n}(DS_n^*)^{3/2}} \leq \\ &\leq 0,3041 \frac{A_{10}(x)\beta_3}{A_7^{3/2}(x)n^{1/2}} + \frac{0,3041}{A_7^{3/2}(x)\sqrt{n}}. \quad (13) \end{aligned}$$

Далее в предположении, что

$$\begin{aligned} A(x) &\equiv \frac{1}{2\gamma a^{1/3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{6b}\right\} + \\ &+ \frac{1}{\gamma^4(1-\gamma)^2 x^4 a^{2/3}} \exp\left\{ \left(\gamma(1-\gamma) - \frac{1}{3b} \right) x^2 \right\} \leq \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(см. выражение для $g_{19}(x)$ в [15]), имеем

$$\begin{aligned} |ES_n^* - hB_n^*| &\leq \frac{\beta_3}{A_3(K)\gamma^2 x^2} \left[\exp\{\gamma(1-\gamma)x^2\} + \right. \\ &+ \left. \frac{(1-\gamma)^2 x^4}{a^{2/3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{3b}\right\} \right] \equiv A_{11}(x)\beta_3. \quad (14) \end{aligned}$$

Наряду с (11) имеет место оценка

$$B_n^2(h) - n \leq n \left[\frac{e^{hy}\beta_3}{f(h)y} + \frac{1}{f(h)} - 1 \right] \leq$$

$$\leq \frac{n^{1/2}\beta_3}{A_3(K)\gamma x} [\exp \{ \gamma(1-\gamma)x^2 \} + \frac{(1-\gamma)x^2}{\gamma a^{2/3}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{3b} \right\}] \equiv A_{12}(x)n^{1/2}\beta_3.$$

Таким образом,

$$|B_n^2(h) - n| \max \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{B_n^2(h)} \right\} \leq \max \left\{ A_{12}(x), \frac{A_6(x)}{A_7(x)} \right\} \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}. \quad (15)$$

Теперь можно приступить к оцениванию величин (см. (5)):

$$I_2 \equiv P(S_n^* > x\sqrt{n}) \text{ и} \\ I_3 \equiv \sup_{u \geq x} |P(S_n^* < u\sqrt{n}) - \Phi(u - h\sqrt{n})|$$

Наряду с (10) понадобится верхняя оценка для $B_n^2(h)$, которую получим с учетом тождества $(1-z)^{-1} = z(1-z)^{-1} + 1$:

$$B_n^2(h) \leq nE(X_1^*)^2 \leq n \left(1 + \frac{e^{hy}\beta_3}{y} \right) \left(1 - \frac{h\beta_3}{y^2} \right)^{-1} = n \left(1 + \frac{e^{hy}\beta_3}{y} \right) \left[\frac{h\beta_3}{y^2} \left(1 - \frac{h\beta_3}{y^2} \right)^{-1} + 1 \right] \leq \frac{n}{A_3(K)} \left[\frac{h\beta_3}{y^2} + \frac{he^{hy}\beta_3^2}{y^3} + A_3(K) \left(1 + \frac{e^{hy}\beta_3}{y} \right) \right] \equiv nA_{13}(x),$$

где

$$A_{13}(x) = 1 + (\gamma x)^2 (1 - A_1(K)) + \frac{(1 - A_3(K))x^2}{aA_3(K)} \left[a^{1/3} \exp \left\{ -\frac{x^2}{3b} \right\} + \frac{1}{\gamma} \exp \left\{ \left(\gamma(1-\gamma) - \frac{1}{2b} \right) x^2 \right\} \right].$$

Найдем верхнюю оценку для $ES_n^* - x\sqrt{n}$ (см. (14)):

$$ES_n^* - x\sqrt{n} = ES_n^* - nh + nh - x\sqrt{n} \leq \sqrt{n} \left(\frac{A_{11}(x)x^3}{a} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2b} \right\} - \gamma x \right),$$

т. е.

$$\frac{x\sqrt{n} - ES_n^*}{B_n(h)} \geq \frac{1}{\sqrt{A_{13}(x)}} \left(\gamma x - \frac{x^3 A_{11}(x)}{a} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2b} \right\} \right) \equiv A_{14}(x). \quad (16)$$

Отсюда с учетом (1), (2), (6) и (13) при $A_{14}(x) \geq 1$ получаем

$$I_2 \leq \left| P(S_n^* < x\sqrt{n}) - \Phi \left(\frac{x\sqrt{n} - ES_n^*}{\sqrt{DS_n^*}} \right) \right| + \Phi \left(-\frac{x\sqrt{n} - ES_n^*}{\sqrt{DS_n^*}} \right) \leq 0,3041 \frac{A_{10}(x)x^3}{aA_7^{3/2}(x)} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2b} \right\} + \frac{0,3041}{A_7^{3/2}(x)\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}A_{14}(x)} \exp \left\{ -\frac{A_{14}^2(x)}{2} \right\} \equiv A_{15}(x) + \frac{0,3041}{A_7^{3/2}(x)\sqrt{n}}. \quad (17)$$

Чтобы оценить I_3 , воспользуемся соотношениями (10), (13)–(16) и (2) и получим

$$I_3 = \sup_{u \geq x} \left| P \left(\frac{S_n^* - ES_n^*}{B_n(h)} < \frac{u\sqrt{n} - ES_n^*}{B_n(h)} \right) - \Phi \left(\frac{u\sqrt{n} - ES_n^*}{B_n(h)} \right) + \Phi \left(\frac{u\sqrt{n} - ES_n^*}{B_n(h)} \right) - \Phi \left(\frac{u\sqrt{n} - ES_n^*}{\sqrt{n}} \right) + \Phi \left(\frac{u\sqrt{n} - ES_n^*}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(u - h\sqrt{n}) \right| \leq \sup_{v \geq (x\sqrt{n} - ES_n^*)/B_n(h)} \left[\left| P \left(\frac{S_n^* - ES_n^*}{B_n(h)} < v \right) - \Phi(v) \right| + \left| \Phi(v) - \Phi \left(v \frac{B_n(h)}{\sqrt{n}} \right) \right| \right] + \sup_{u \geq x} |\Phi(u - ES_n^*/\sqrt{n}) - \Phi(u - h\sqrt{n})| \leq 0,3041 \frac{A_{10}(x)\beta_3}{A_7^{3/2}(x)n^{1/2}} + \frac{0,3041}{A_7^{3/2}(x)\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left| \frac{B_n^2(h)}{n} - 1 \right| \max \left\{ 1, \frac{n}{B_n^2(h)} \right\} \times \sup \left\{ |s|e^{-s^2/2} : s \geq \frac{x\sqrt{n} - ES_n^*}{B_n(h)} \min \left\{ 1, \frac{B_n(h)}{\sqrt{n}} \right\} \right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{ES_n^* - nh}{\sqrt{n}} \right| \sup \left\{ e^{-s^2/2} : s \geq \min \left\{ x - \frac{ES_n^*}{\sqrt{n}}, x - h\sqrt{n} \right\} \right\} \leq A_{16}(x) \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + \frac{0,3041}{A_7^{3/2}(x)\sqrt{n}}, \quad (18)$$

где

$$A_{16}(x) = 0,3041 \frac{A_{10}(x)}{A_7^{3/2}(x)} + \frac{A_{14}(x)}{\sqrt{8\pi}} \max \left\{ A_{12}(x), \frac{A_6(x)}{A_7(x)} \right\} \exp \left\{ -\frac{A_{14}^2(x)}{2} \right\} + \frac{A_{11}(x)}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\gamma x - \frac{A_{11}(x)|x|^3}{a} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2b} \right\} \right]^2 \right\}.$$

Соотношение (18) справедливо в предположении $A_{14}(x) \geq 1$, так что

$$\gamma x - \frac{A_{11}(x)|x|^3}{a} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2b} \right\} \geq 0.$$

Первое слагаемое в правой части (5) оценим с помощью неравенства Маркова:

$$nP(|X_1| > y) \leq \frac{\beta_3}{\gamma^3 |x|^3 n^{1/2}}. \quad (19)$$

В итоге из (5) с учетом (8), (17)–(19) мы получаем: для каждого x из рассматриваемого диапазона и справедливо неравенство

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{\beta_3}{\gamma^3 |x|^3 n^{1/2}} + I_1 I_2 + 2I_3 \exp \left\{ -(1 - \gamma^2) \frac{x^2}{2} \right\} \leq Q_n(x; a, b, \gamma, K) \frac{\beta_3}{|x|^3 n^{1/2}} + 0,6082 \frac{\exp \left\{ -(1 - \gamma^2) \frac{x^2}{2} \right\}}{A_7^{3/2}(x) \sqrt{n}}, \quad (20)$$

где

$$Q_n(x; a, b, \gamma, K) = \frac{1}{\gamma^3} + \frac{A_2(x)}{A_1(K)} \left[1 + A_{15}(x) + \frac{0,3041}{A_7^{3/2}(x) \sqrt{n}} \right] + 2A_{16}(x) |x|^3 \exp \left\{ -(1 - \gamma^2) \frac{x^2}{2} \right\}$$

(отметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x; a, b, \gamma, K) = 1/\gamma^3 + A_2(x)(1 + A_{15}(x))/A_1(K) + 2A_{16}(x)|x|^3 \exp\{-(1 - \gamma^2)x^2/2\}$).

Обозначим

$$R(x; a, b, \gamma, K) = 0,6082 \frac{|x|^3 \exp \left\{ -(1 - \gamma^2) \frac{x^2}{2} \right\}}{A_7^{3/2}(x)}.$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.2 Предположим, что $K^2 \leq x^2 \leq c_n(x; a, b)$,

$$K^2 \geq \frac{1}{2\pi}, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2}, \quad a > 0, \\ 1 < b < \min \left\{ \frac{1}{2\gamma(1 - \gamma)}, \frac{K^2}{2} \right\}$$

и

$$A(x) \leq \frac{1}{6}, \quad A_1(K) > 0, \quad A_3(K) > 0, \\ A_7(x) > 0, \quad A_{14}(x) \geq 1.$$

Тогда для всех $n \geq 1$

$$|x|^3 |F_n(x) - \Phi(x)| \leq Q_n(x; a, b, \gamma, K) \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + R(x; a, b, \gamma, K) \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Приведем две мажоранты функции $Q_n(x; a, b, \gamma, K)$, не зависящие от n .

Во-первых, очевидно, что

$$Q_n(x; a, b, \gamma, K) \leq Q_1(x; a, b, \gamma, K) = \frac{1}{\gamma^3} + \frac{A_2(x)}{A_1(K)} \left[1 + A_{15}(x) + \frac{0,3041}{A_7^{3/2}(x)} \right] + 2A_{16}(x) |x|^3 \exp \left\{ -(1 - \gamma^2) \frac{x^2}{2} \right\}. \quad (21)$$

Во-вторых, с учетом того, что в сделанных предположениях о моментах случайной величины X_1 всегда $\beta_3 \geq 1$, из соотношения (6) вытекает неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{|x|^3}{a} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2b} \right\}.$$

Поэтому

$$Q_n(x; a, b, \gamma, K) \leq Q'(x; a, b, \gamma, K) \equiv \frac{1}{\gamma^3} + \frac{A_2(x)}{A_1(K)} \left[1 + A_{15}(x) + \frac{0,3041}{A_7^{3/2}(x)} \left(\frac{|x|^3}{a} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2b} \right\} \right) \right] + 2A_{16}(x) |x|^3 \exp \left\{ -(1 - \gamma^2) \frac{x^2}{2} \right\}. \quad (22)$$

Наконец, пытаясь ограничить $Q_n(x; a, b, \gamma, K)$, вместо неравенства (2) при оценивании величины I_2 можно воспользоваться неравенством (1) с наилучшей известной на сегодняшний день оценкой константы C_0 : $C_0 \leq 0,4784$ [4]. Тогда из (1), (6) и (13) при $A_{14}(x) \geq 1$ будет следовать оценка

$$I_2 \leq \left| P(S_n^* < x\sqrt{n}) - \Phi\left(\frac{x\sqrt{n} - ES_n^*}{\sqrt{DS_n^*}}\right) \right| + \\ + \Phi\left(-\frac{x\sqrt{n} - ES_n^*}{\sqrt{DS_n^*}}\right) \leq 0,4784 \frac{A_{10}(x)x^3}{aA_7^{3/2}(x)} \exp\left\{-\frac{x^2}{2b}\right\} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}A_{14}(x)} \exp\left\{-\frac{A_{14}^2(x)}{2}\right\} \equiv A'_{15}(x).$$

При этом в (20) и последующих выкладках и вычислениях вместо $Q_n(x; a, b, \gamma, K)$ соответственно следует использовать величину

$$Q''(x; a, b, \gamma, K) = \frac{1}{\gamma^3} + \frac{A_2(x)}{A_1(K)} [1 + A'_{15}(x)] + \\ + 2A_{16}(x)|x|^3 \exp\left\{-(1-\gamma^2)\frac{x^2}{2}\right\}. \quad (23)$$

Положим

$$Q(x; a, b, \gamma, K) = \min \{Q_1(x; a, b, \gamma, K), \\ Q'(x; a, b, \gamma, K), Q''(x; a, b, \gamma, K)\}.$$

Следствие 2.1. В условиях леммы 2.2 для всех $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$|x|^3 |F_n(x) - \Phi(x)| \leq Q(x; a, b, \gamma, K) \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + \\ + R(x; 1, a, b, \gamma, K) \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2.3 Неравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме

Положим

$$U_n = \min_{a,b,\gamma,K} \max \left\{ C_1 K^3, \right. \\ \left. \max_{K \leq |x| \leq \sqrt{c_n(x;a,b)}} Q_n(x; a, b, \gamma, K), P(a, b, K) \right\}; \\ U = \min_{a,b,\gamma,K} \max \left\{ C_1 K^3, \right. \\ \left. \max_{K \leq |x| \leq \sqrt{c_n(x;a,b)}} Q(x; a, b, \gamma, K), P(a, b, K) \right\},$$

где минимум берется по множеству значений вспомогательных параметров, описанному в формулировке леммы 2. Значения параметров a, b, γ, K , доставляющие вышеуказанные минимумы, обозначим соответственно $a_0^{(n)}, b_0^{(n)}, \gamma_0^{(n)}, K_0^{(n)}$ и a_0, b_0, γ_0, K_0 . Положим

$$R_0^{(n)} = \\ = \max_{K_0^{(n)} \leq |x| \leq \sqrt{c_n(x;a_0^{(n)},b_0^{(n)})}} R(x; a_0^{(n)}, b_0^{(n)}, \gamma_0^{(n)}, K_0^{(n)});$$

$$R_0 = \max_{K_0 \leq |x| \leq \sqrt{c_n(x;a_0,b_0)}} R(x; a_0, b_0, \gamma_0, K_0); \\ D_n = U_n + C_1, \quad D = U + C_1; \\ V_n = \max \{R_0^{(n)}, C_1(K_0^{(n)})^3\} + C_1; \\ V(n) = \max \{R_0, C_1 K_0^3\} + C_1.$$

Очевидно, что $V_n \leq V_1$ и $V(n) \leq V(1) \equiv V$.

Из соотношения (4), лемм 2.1 и 2.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. Для всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $n \geq 1$ справедливы неравенства:

$$(1 + |x|^3) |F_n(x) - \Phi(x)| \leq D_n \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + \frac{V_n}{n^{1/2}}; \\ (1 + |x|^3) |F_n(x) - \Phi(x)| \leq D \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + \frac{V(n)}{n^{1/2}}.$$

Следствие 2.2. Для всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$(1 + |x|^3) |F_n(x) - \Phi(x)| \leq D \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + \frac{V}{n^{1/2}}.$$

Замечание 2.1 На практике процедуру поиска оптимальных значений a, b, γ, K можно организовать следующим образом. Поскольку выражение $C_1(1)K^3$ не зависит от a, b, γ , сначала можно найти значение $K^* = K^*(a, b)$ из условия

$$C_1(K^*)^3 = P(a, b, K^*),$$

затем найти пару (a^*, b^*) из условия

$$(a^*, b^*) = \arg \min_{a,b} P(a, b, K^*(a, b)),$$

а затем провести оптимизацию

$$\max_{K^*(a^*,b^*) \leq |x| \leq \sqrt{c_n(x;a^*,b^*)}} Q_n(x; a^*, b^*, \gamma), \\ K^*(a^*, b^*) \longrightarrow \min_{\gamma}, \\ \max_{K^*(a^*,b^*) \leq |x| \leq \sqrt{c_n(x;a^*,b^*)}} Q(x; a^*, b^*, \gamma), \\ K^*(a^*, b^*) \longrightarrow \min_{\gamma}, \\ \max_{K^*(a^*,b^*) \leq |x| \leq \sqrt{c_n(x;a^*,b^*)}} \bar{Q}(x; a^*, b^*, \gamma), \\ K^*(a^*, b^*) \longrightarrow \min_{\gamma}.$$

При этом вычисления показывают, что все три вышеперечисленных максимума достигаются в точке $x = K^*(a^*, b^*)$.

Замечание 2.2 Конкретные вычисления показали, что значения функций $Q(x, a, b, \gamma, K)$ и $R(x, a, b, \gamma, K)$ оказываются строго меньшими, чем значения $P(a, b, \gamma, K)$ и $C_1 K^3$, поэтому максимум в выражениях для U и $V(n)$ определяется лишь значениями функций $P(a, b, \gamma, K)$ и $C_1 K^3$, а следовательно, D и V совпадают, причем оптимальное значение D не превосходит 22,7707. Таким образом, приведенная в следствии 2.2 оценка имеет структуру, аналогичную оценке (2), и справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.2' Для всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$(1 + |x|^3) |F_n(x) - \Phi(x)| \leq 22,7707 \frac{\beta_3 + 1}{n^{1/2}}.$$

Следствие 2.2' позволяет уточнить константу в неравномерной оценке скорости сходимости в ЦПТ для пуассоновских случайных сумм, чему посвящен следующий раздел.

3 Неравномерная оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для пуассоновских случайных сумм

Пусть теперь X_1, X_2, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что

$$EX_1 \equiv \mu, \quad DX_1 \equiv \sigma^2 > 0, \quad E|X_1|^3 \equiv \beta_3 < \infty. \quad (24)$$

Пусть N_λ — случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Предположим, что при каждом $\lambda > 0$ случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \dots$ независимы.

Рассмотрим пуассоновскую случайную сумму

$$S_\lambda = X_1 + \dots + X_{N_\lambda}.$$

Для определенности полагаем, что $S_\lambda = 0$ при $N_\lambda = 0$. Несложно видеть, что в рассматриваемых условиях на моменты случайной величины X_1 справедливы соотношения

$$ES_\lambda = \lambda\mu, \quad DS_\lambda = \lambda(\mu^2 + \sigma^2).$$

Функцию распределения стандартизованной пуассоновской случайной суммы

$$\tilde{S}_\lambda \equiv \frac{S_\lambda - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}}$$

обозначим $F_\lambda(x)$.

Пуассоновские случайные суммы S_λ являются очень популярными математическими моделями многих объектов и процессов в самых разных областях, в том числе в страховании, где они используются для описания суммы страховых требований, поступивших в течение определенного периода времени, в теории управления запасами, где они описывают суммарные заявки на продукт. При анализе информационных систем также традиционным предположением является пуассоновский характер потока заявок (клиентов, требований, задач, сообщений), так что суммарные характеристики заявок в информационных системах имеют вид пуассоновских случайных сумм. Задаче изучения точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм — так называемых обобщенных пуассоновских распределений — посвящена обширная литература (см., например, библиографию в книгах [16] и [17]).

В работе [12] показано, что для любых $x \in \mathbb{R}$ и любых $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$(1 + |x|^3) |F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq C \cdot \frac{\beta_3}{\lambda^{\delta/2}(\mu^2 + \sigma^2)^{1+\delta/2}}, \quad (25)$$

где C — та же константа, что и в «классической» оценке (3). В данном разделе будет показано, что на самом деле неравенство (25) справедливо с заменой C на D (см. следствие 2.2'). Для этого понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Обозначим

$$\nu = \frac{\lambda}{n}.$$

Лемма 3.1. *Распределение пуассоновской случайной суммы S_λ совпадает с распределением суммы n независимых одинаково распределенных случайных величин, каким бы ни было натуральное число $n \geq 1$:*

$$X_1 + \dots + X_{N_\lambda} \stackrel{d}{=} Y_{\nu,1} + \dots + Y_{\nu,n},$$

где при каждом n случайные величины $Y_{\nu,1}, \dots, Y_{\nu,n}$ независимы и одинаково распределены. При этом если случайная величина X_1 удовлетворяет условиям (24), то для моментов случайной величины $Y_{\nu,1}$ имеют место соотношения:

$$EY_{\nu,1} = \mu\nu; \quad DY_{\nu,1} = (\mu^2 + \sigma^2)\nu; \\ E|Y_{\nu,1} - \mu\nu|^3 \leq \nu\beta_3(1 + 40\nu), \quad n \geq \lambda.$$

Доказательство см. в работе [18].

Следствие 3.1 Если выполнены условия (27), то для любого $n = 1, 2, \dots$

$$\tilde{S}_\lambda \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Z_{\nu,k},$$

где при каждом n случайные величины $Z_{\nu,1}, \dots, Z_{\nu,n}$ независимы и одинаково распределены. Более того, эти случайные величины имеют нулевое среднее и единичную дисперсию и при всех $n \geq \lambda$

$$E|Z_{\nu,1}|^3 \leq \frac{\beta_3(1+40\nu)}{(\mu^2 + \sigma^2)^{3/2}} \left(\frac{n}{\lambda}\right)^{1/2}. \quad (26)$$

Следующее утверждение представляет собой основной результат данной статьи.

Теорема 3.1 При условиях (24) для любого $\lambda > 0$ справедливо неравенство

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^3) |F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq \frac{D\beta_3}{\lambda^{1/2}(\mu^2 + \sigma^2)^{3/2}},$$

где константа D та же, что и в следствии 2.2', т. е. $D \leq 22.7707$.

Доказательство. Из леммы 3.1 и следствия 3.1 вытекает, что для любого целого $n \geq 1$

$$|F_\lambda(x) - \Phi(x)| = \left| P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Z_{\nu,k} < x\right) - \Phi(x) \right|.$$

Следовательно, в силу следствия 2.2 для произвольного целого $n \geq 1$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$(1 + |x|^3) |F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq D \frac{E|Z_{\nu,1}|^3}{n^{1/2}} + \frac{V}{n^{1/2}}. \quad (27)$$

Поскольку в (27) n произвольно, можно считать, что $n \geq \lambda$. Тогда, используя оценку (26), в продолжение (27) получаем неравенство

$$\begin{aligned} (1 + |x|^3) |F_\lambda(x) - \Phi(x)| &\leq \\ &\leq \frac{D\beta_3}{\lambda^{1/2}(\mu^2 + \sigma^2)^{3/2}} \left(1 + 40\frac{\lambda}{n}\right) + \frac{V}{n^{1/2}}. \end{aligned}$$

Так как здесь $n \geq \lambda$ произвольно, устремляя $n \rightarrow \infty$, окончательно получаем

$$\begin{aligned} (1 + |x|^3) |F_\lambda(x) - \Phi(x)| &\leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{D\beta_3}{\lambda^{1/2}(\mu^2 + \sigma^2)^{3/2}} \left(1 + 40\frac{\lambda}{n}\right) + \frac{V}{n^{1/2}} \right] = \\ &= \frac{D\beta_3}{\lambda^{1/2}(\mu^2 + \sigma^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

4 Неравномерные оценки скорости сходимости в предельных теоремах для смешанных пуассоновских случайных сумм

Пусть Λ_t — положительная случайная величина, функция распределения $G_t(x) = P(\Lambda_t < x)$ которой зависит от некоторого параметра $t > 0$. Под смешанным пуассоновским распределением со структурным распределением G_t будем подразумевать распределение случайной величины $N(t)$, принимающей целые неотрицательные значения с вероятностями

$$P(N(t) = k) = \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^k dG_t(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Известно несколько конкретных примеров смешанных пуассоновских распределений, наиболее широко используемым среди которых, пожалуй, является отрицательное биномиальное распределение (это распределение было использовано в виде смешанного пуассоновского еще в работе [19] для моделирования частоты несчастных случаев на производстве). Отрицательное биномиальное распределение порождается структурным гамма-распределением. Другими примерами смешанных пуассоновских распределений являются распределение Делaporte, порождаемое сдвинутым гамма-структурным распределением [20], распределение Зихеля, порожденное обратным нормальным структурным распределением [21]–[23], обобщенное распределение Варинга [24, 25]. Свойства смешанных пуассоновских распределений подробно описаны в книгах [26] и [17].

Пусть, как и ранее, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что случайные величины $N(t), X_1, X_2, \dots$ независимы при каждом $t > 0$. Положим

$$S(t) = X_1 + \dots + X_{N(t)}$$

(как и ранее, для определенности будем считать, что $S(t) = 0$, если $N(t) = 0$). Случайную величину $S(t)$ будем называть смешанной пуассоновской случайной суммой, а ее распределение — обобщенным смешанным пуассоновским.

Асимптотическое поведение смешанных пуассоновских случайных сумм $S(t)$, когда $N(t)$ в определенном смысле неограниченно возрастает, принципиально различно в зависимости от того, равно

нулю математическое ожидание μ слагаемых или нет.

Сходимость по распределению и по вероятности будет обозначаться символами \implies и \xrightarrow{P} соответственно.

В этом разделе сосредоточимся на ситуации, когда $EX_1 = 0$. В таком случае предельными распределениями для стандартизованных смешанных пуассоновских случайных сумм являются масштабные смеси нормальных законов. Не ограничивая общности, будем считать, что $DX_1 = 1$.

Теорема 4.1 [27, 17]. *Предположим, что $\Lambda_t \xrightarrow{P} \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда для положительной неограниченно возрастающей функции $d(t)$ существует функция распределения $H(x)$ такая, что*

$$P\left(\frac{S(t)}{\sqrt{d(t)}} < x\right) \implies H(x) \quad (t \rightarrow \infty),$$

в том и только в том случае, когда существует функция распределения $G(x)$ такая, что при той же функции $d(t)$

$$G_t(xd(t)) \implies G(x) \quad (t \rightarrow \infty) \quad (28)$$

и

$$H(x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dG(y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Легко видеть, что распределение смешанной пуассоновской случайной суммы $S(t)$ можно записать в виде

$$P(S(t) < x) = \int_0^\infty P\left(\sum_{j=1}^{N_\lambda} X_j < x\right) dG_t(\lambda), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (29)$$

где N_λ — пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda > 0$, такая что при каждом $\lambda > 0$ случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \dots$ независимы. (Следует заметить, что запись приводимых соотношений в терминах случайных величин использована лишь для удобства и наглядности. На самом деле речь идет о соответствующих соотношениях для распределений, но такая форма записи оказывается более громоздкой. Поэтому предположение о существовании вероятностного пространства, на котором определены упомянутые выше случайные величины с указанными свойствами, ни в коей мере не ограничивает общности.) Пусть

$$EX_1 = 0, \quad EX_1^2 = 1, \quad \beta^3 = E|X_1|^3 < \infty \quad (30)$$

и $d(t), t > 0$, — некоторая положительная неограниченно возрастающая функция. Равномерные оценки скорости сходимости в теореме 4.1 приведены в работах [4, 9, 28] (см. также [16]). В данном разделе будут приведены неравномерные оценки скорости сходимости в теореме 4.1 и ее частных случаях.

Пусть $G(x)$ — функция распределения такая, что $G(0) = 0$. Если выполнено условие (28), то в соответствии с теоремой 4.1 обобщенные смешанные пуассоновские распределения случайной величины $S(t)$, нормированной квадратным корнем из функции $d(t)$, сходятся к масштабным смесям нормальных законов, в которых смешивающим распределением является $G(x)$. Обозначим

$$\Delta_t(x) = \left| P\left(\frac{S(t)}{\sqrt{d(t)}} < x\right) - \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) dG(\lambda) \right|, \\ \delta_t(x) = G_t(d(t)x) - G(x).$$

Теорема 4.2. *Предположим, что выполнены условия (25). Тогда при каждом $t > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$ имеет место оценка*

$$\Delta_t(x) \leq 22,7707 \frac{\beta_3}{\sqrt{d(t)}} E \left\{ \frac{\Lambda_t}{d(t)} \left[\left(\frac{\Lambda_t}{d(t)}\right)^{3/2} + |x|^3 \right]^{-1} \right\} + \int_0^\infty |\delta_t(\lambda)| d\lambda \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (31)$$

Доказательство. Идея доказательства аналогична идее доказательства равномерной оценки в работе [28] и основана на использовании представления (29). Имеем

$$\Delta_t(x) \leq \int_0^\infty \left| P\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda d(t)}} \sum_{j=1}^{N_{\lambda d(t)}} X_j < \frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) \right| dG_t(\lambda d(t)) + \left| \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) d\delta_t(\lambda) \right| \equiv I_1(t; x) + I_2(t; x).$$

Подынтегральное выражение в $I_1(t; x)$ оценим с помощью теоремы 3.1 и получим

$$I_1(t; x) \leq D\beta_3 \int_0^\infty \frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{\lambda d(t)} (\lambda^{3/2} + |x|^3)} dG_t(\lambda d(t)) = \frac{D\beta_3}{\sqrt{d(t)}} E \left\{ \frac{\Lambda_t}{d(t)} \left[\left(\frac{\Lambda_t}{d(t)}\right)^{3/2} + |x|^3 \right]^{-1} \right\}. \quad (32)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$I_2(t; x) \leq \int_0^\infty |\delta_t(\lambda)| d_\lambda \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right). \quad (33)$$

Требуемое утверждение вытекает из (32) и (33). Теорема доказана.

В качестве примера применения теоремы 4.2 рассмотрим случай, когда при каждом $t > 0$ случайная величина Λ_t имеет гамма-распределение. Этот случай представляет особый интерес с точки зрения его применения в финансовой математике для асимптотического обоснования адекватности таких популярных моделей эволюции финансовых индексов, как дисперсионные гамма-процессы Леви (variance-gamma Lévy processes, VG-processes) [29] или двусторонние гамма-процессы [30] (также см. [31]).

Смешанное пуассоновское распределение со структурным гамма-распределением является не чем иным, как отрицательным биномиальным распределением. Убедимся в этом. Плотность гамма-распределения с параметром формы $r > 0$ и параметром масштаба $\sigma > 0$, как известно, имеет вид

$$g_{r,\sigma}(x) = \frac{\sigma^r}{\Gamma(r)} e^{-\sigma x} x^{r-1}, \quad x > 0.$$

Таким образом, смешанное пуассоновское распределение со структурным гамма-распределением имеет характеристическую функцию

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \int_0^\infty \exp\{y(e^{iz} - 1)\} \frac{\sigma^r}{\Gamma(r)} e^{-\sigma y} y^{r-1} dy = \\ &= \frac{\sigma^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \exp\left\{-\sigma y \left(1 + \frac{1 - e^{iz}}{\sigma}\right)\right\} y^{r-1} dy = \\ &= \left(1 + \frac{1 - e^{iz}}{\sigma}\right)^{-r}. \end{aligned}$$

Вводя новую параметризацию

$$\sigma = \frac{p}{1-p} \left(p = \frac{\sigma}{1+\sigma} \right), \quad p \in (0, 1),$$

окончательно получаем

$$\psi(z) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)e^{iz}} \right)^r, \quad z \in \mathbb{R},$$

что совпадает с характеристической функцией отрицательного биномиального распределения с параметрами $r > 0$ и $p \in (0, 1)$.

Функцию гамма-распределения с параметром масштаба σ и параметром формы r обозначим $G_{r,\sigma}(x)$. Несложно убедиться, что

$$G_{r,\sigma}(x) \equiv G_{r,1}(\sigma x). \quad (34)$$

Случайную величину с функцией распределения $G_{r,\sigma}(x)$ обозначим $U(r, \sigma)$. Хорошо известно, что

$$EU(r, \sigma) = \frac{r}{\sigma}.$$

Закфиксируем параметр r и в качестве структурной случайной величины Λ_t возьмем $U(r, \sigma)$, предполагая, что $t = \sigma^{-1}$:

$$\Lambda_t = U(r, t^{-1}).$$

В качестве функции $d(t)$ возьмем $d(t) \equiv E\Lambda_t = EU(r, t^{-1})$. Очевидно, что $EU(r, t^{-1}) = rt$. Тогда с учетом (34) будем иметь

$$\begin{aligned} G_t(xd(t)) &= P(U(r, t^{-1}) < xrt) = \\ &= P(U(r, 1) < xr) = P(U(r, r) < x) = G_{r,r}(x). \end{aligned}$$

Заметим, что функция распределения в правой части последнего соотношения не зависит от t . Поэтому указанный выбор функции $d(t)$ тривиальным образом гарантирует выполнение условия (28) теоремы 4.1. Более того, в таком случае $\delta_t(x) = 0$ для всех $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}$.

При этом случайная величина $N(t)$ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами r и $p = (t + 1)^{-1}$:

$$\begin{aligned} P(N(t) = k) &= C_{r+k-1}^k p^r (1-p)^k = \\ &= C_{r+k-1}^k \frac{t^k}{(1+t)^{r+k}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (35) \end{aligned}$$

Здесь для нецелых r величина C_{r+k-1}^k определяется как

$$C_{r+k-1}^k = \frac{\Gamma(r+k)}{k! \Gamma(r)}.$$

Итак, в рассматриваемом случае $G_t(xd(t)) \equiv G_{r,r}(x)$, $d(t) \equiv rt$ и второе слагаемое в правой части (31) равно нулю. Вычислим первое слагаемое в правой части (31) для рассматриваемой ситуации в предположении, что

$$r > \frac{1}{2}. \quad (36)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{d(t)}} \mathbb{E} \left\{ \frac{\Lambda_t}{d(t)} \left[\left(\frac{\Lambda_t}{d(t)} \right)^{3/2} + |x|^3 \right]^{-1} \right\} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{rt}} \int_0^\infty \frac{y}{y^{3/2} + |x|^3} dG_{r,r}(x) = \\ &= \frac{r^{r-1/2}}{\sqrt{t}\Gamma(r)} \int_0^\infty \frac{y^r e^{-ry} dy}{y^{3/2} + |x|^3}. \quad (37) \end{aligned}$$

Приведем несколько оценок для правой части (37). Во-первых, несложно убедиться, что при $y > 0$

$$\sup_x \frac{1 + |x|^3}{y^{3/2} + |x|^3} = \max\{1, y^{-3/2}\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J_r(x) &\equiv \int_0^\infty \frac{y^r e^{-ry} dy}{y^{3/2} + |x|^3} \leq \\ &\leq \frac{1}{1 + |x|^3} \int_0^\infty y^r e^{-ry} \sup_x \left\{ \frac{1 + |x|^3}{y^{3/2} + |x|^3} \right\} dy \leq \\ &\leq \frac{1}{1 + |x|^3} \left[\int_0^1 y^{r-3/2} e^{-ry} dy + \int_1^\infty y^r e^{-ry} dy \right] = \\ &= \frac{1}{1 + |x|^3} \left[\frac{\gamma_r(r-1/2)}{r^{r-1/2}} + \frac{\Gamma(r+1) - \gamma_r(r+1)}{r^{r+1}} \right], \end{aligned}$$

где $\gamma_x(\alpha)$ — неполная гамма-функция,

$$\gamma_x(\alpha) = \int_0^x e^{-z} z^{\alpha-1} dz, \quad \alpha > 0, x \geq 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{r^{r-1/2}}{\sqrt{t}\Gamma(r)} J_r(x) &\leq \frac{1}{\sqrt{t}(1 + |x|^3)} \left[\frac{\gamma_r(r-1/2)}{\Gamma(r)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{\gamma_r(r+1)}{\Gamma(r+1)\sqrt{r}} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо

Следствие 4.1. Пусть случайная величина $N(t)$ имеет отрицательное биномиальное распределение (35), $t > 0$. Предположим, что выполнены условия (30) и (36). Тогда для любых $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{P}(S(t) < x\sqrt{rt}) - \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dG_{r,r}(y) \right| &\leq \\ &\leq \frac{22,7707\beta_3}{\sqrt{t}(1 + |x|^3)} K_1(r), \end{aligned}$$

где

$$K_1(r) = \frac{\gamma_r(r-1/2)}{\Gamma(r)} + \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{\gamma_r(r+1)}{\Gamma(r+1)\sqrt{r}}.$$

С другой стороны, очевидно, что $\gamma_x(\alpha) \leq \Gamma(\alpha)$ при любых $x \geq 0$ и $\alpha > 0$. Поэтому величину $K_1(r)$ можно оценить выражением, содержащим только «полные» гамма-функции:

$$K_1(r) \leq \frac{\Gamma(r-1/2)}{\Gamma(r)} + \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (38)$$

При $r = 1$ случайная величина $\Lambda_t = U(1, t^{-1})$ имеет показательное распределение с параметром $\sigma = 1/t$. Следовательно, как легко убедиться, смешанная пуассоновская случайная величина $N(t)$ с таким структурным распределением имеет геометрическое распределение с параметром $p = (t+1)^{-1}$. При этом предельное (при $t \rightarrow \infty$) распределение для стандартизованной геометрической суммы $S(t)$ является распределение Лапласа с плотностью

$$l(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функцию распределения, соответствующую плотности $l(x)$, обозначим $L(x)$:

$$L(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\sqrt{2}x}, & \text{если } x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{2}x}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Из следствия 4.1 при этом получаем

Следствие 4.2. Пусть случайная величина $N(t)$ имеет геометрическое распределение с параметром $p = (1+t)^{-1}$, $t > 0$. Предположим, что выполнены условия (30). Тогда для любых $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\left| \mathbb{P}(S(t) < x\sqrt{t}) - L(x) \right| \leq \frac{50,7652\beta_3}{\sqrt{t}(1 + |x|^3)}.$$

Заметим, что оценка, приведенная в следствии 4.2, точнее равномерной оценки, приведенной в работах [4] и [9], для $|x| > 4,5334$.

Заметим также, что использование оценки (38) для $K_1(r)$ увеличивает абсолютную константу в следствии 4.2 до 63,1308 — такова цена упрощения.

Литература

1. *Esseen C. G.* On the Liapunoff limit of error in the theory of probability // *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 1942. Vol. A28. No. 9. P. 1–19.
2. *Berry A. C.* The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of the distributed random variables // *J. Theor. Probab.*, 1994. Vol. 2. No. 2. P. 211–224.
3. *Королев В. Ю., Шевцова И. Г.* Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена для смешанных пуассоновских случайных сумм // *Докл. РАН*, 2010. Т. 431. Вып. 1. С. 16–19.
4. *Королев В. Ю., Шевцова И. Г.* Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским случайным суммам // *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2010. Т. 17. Вып. 1. С. 25–56.
5. *Esseen C. G.* A moment inequality with an application to the central limit theorem // *Skand. Aktuarietidskr*, 1956. Vol. 39. P. 160–170.
6. *Мешалкин Л. Д., Rogozin B. A.* Оценка расстояния между функциями распределения по близости их характеристических функций и ее применение к центральной предельной теореме // *Предельные теоремы теории вероятностей*. — Ташкент: АН УзССР, 1963. С. 40–55.
7. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений // *Теория вероятностей и ее применения*, 1965. Т. 10. Вып. 2. С. 231–254.
8. *Michel R.* On the constant in the nonuniform version of the Berry–Esseen theorem // *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, 1981. Bd. 55. P. 109–117.
9. *Korolev V., Shevtsova I.* An improvement of the Berry–Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums // *Scandinavian Actuarial J.*, 2010. <http://www.informaworld.com/10.1080/03461238.2010.485370>.
10. *Нефедова Ю. С., Шевцова И. Г.* О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм // *Информатика и её применения*, 2011. Т. 5. Вып. 1. С. 39–45.
11. *Paditz L.* On the analytical structure of the constant in the nonuniform version of the Esseen inequality // *Statistics*, 1989. Vol. 20. No. 3. P. 453–464.
12. *Michel R.* On Berry–Esseen results for the compound Poisson distribution // *Insurance: Mathematics and Economics*, 1993. Vol. 13. No. 1. P. 35–37.
13. *Rychlik Z.* Nonuniform central limit bounds and their applications // *Теория вероятностей и ее применения*, 1983. Т. 28. Вып. 3. С. 646–652.
14. *Paditz L.* Einseitige Fehlerabschätzungen im zentralen Grenzwertsatz // *Math. Operationsforsch. und Statist., ser. Statist.*, 1981. Bd. 12. P. 587–604.
15. *Tysiak W.* Gleichmäßige und nicht-gleichmäßige Berry–Esseen-Abschätzungen. Dissertation. — Wuppertal, 1983.
16. *Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я.* Математические основы теории риска. — М.: Физматлит, 2007.
17. *Bening V., Korolev V.* Generalized Poisson models and their applications in insurance and finance. — Utrecht: VSP, 2002.
18. *Шевцова И. Г.* О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм // *Обозрение промышленной и прикладной математики*, 2007. Т. 14. Вып. 1. С. 3–28.
19. *Greenwood M., Yule G. U.* An inquiry into the nature of frequency-distributions of multiple happenings, etc. // *J. Roy. Statist. Soc.*, 1920. Vol. 83. P. 255–279.
20. *Delaporte P.* Un problème de tarification de l'assurance accidents d'automobile examiné par la statistique mathématique // *Trans. 16th Congress (International) of Actuaries*. — Brussels, 1960. Vol. 2. P. 121–135.
21. *Holla M. S.* On a Poisson-inverse Gaussian distribution // *Metrika*, 1967. Vol. 11. P. 115–121.
22. *Sichel H. S.* On a family of discrete distributions particular suited to represent long tailed frequency data // *3rd Symposium on Mathematical Statistics Proceedings / Ed. N. F. Laubscher*. — Pretoria: CSIR, 1971. P. 51–97.
23. *Willmot G. E.* The Poisson-inverse Gaussian distribution as an alternative to the negative binomial // *Scandinavian Actuar. J.*, 1987. P. 113–127.
24. *Irwin J. O.* The generalized Waring distribution applied to accident theory // *J. Royal Statist. Soc., Ser. A*, 1968. Vol. 130. P. 205–225.
25. *Seal H.* Survival probabilities. The goal of risk theory. — Chichester – New York – Brisbane – Toronto: Wiley, 1978.
26. *Grandell J.* Mixed Poisson processes. — London: Chapman and Hall, 1997.
27. *Korolev V. Yu.* A general theorem on the limit behavior of superpositions of independent random processes with applications to Cox processes // *J. Math. Sci.*, 1996. Vol. 81. No. 5. P. 2951–2956.
28. *Гавриленко С. В., Королев В. Ю.* Оценки скорости сходимости смешанных пуассоновских случайных сумм // *Системы и средства информатики. Спец. вып. Математические модели в информационных технологиях*. — М.: ИПИ РАН, 2006. С. 248–257.
29. *Madan D. B., Seneta E.* The variance gamma (V.G.) model for share market return // *J. Business*, 1990. Vol. 63. P. 511–524.
30. *Carr P. P., Madan D. B., Chang E. C.* The variance gamma process and option pricing // *Eur. Finance Rev.*, 1998. Vol. 2. P. 79–105.
31. *Королев В. Ю.* Вероятностно-статистические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов. — М.: МГУ, 2010.

О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ НОРМИРОВАННЫХ ХИ-КВАДРАТ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ РАЗЛОЖЕНИЯМИ ЭДЖВОРТА–ЧЕБЫШЕВА*

Г. Кристоф¹, В. В. Ульянов²

Аннотация: Рассмотрено распределение нормированной хи-квадрат случайной величины с n степенями свободы. С помощью разложений Эджворта–Чебышева построены вычислимые оценки приближений этого распределения различного порядка: $O(n^{-1/2})$, $O(n^{-1})$ и $O(n^{-3/2})$. Результаты такого типа полезны в приложениях, в частности при анализе свойств статистик отношения правдоподобия.

Ключевые слова: асимптотические разложения; оценки погрешности; хи-квадрат распределение

1 Введение

Пусть \mathcal{X}_n^2 есть случайная величина, имеющая хи-квадрат функцию распределения $G_n(x)$ с n степенями свободы и функцию плотности

$$p_{\mathcal{X}_n^2}(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{-1+n/2} e^{-x/2} I_{(0, \infty)}(x),$$

где $I_A(x)$ обозначает индикаторную функцию множества A . Отметим, что $E(\mathcal{X}_n^2) = n$, $Var(\mathcal{X}_n^2) = 2n$.

В прикладных исследованиях хи-квадрат распределение возникает часто. Например, распределение нормированной хи-квадрат статистики

$$T_1 = \mathcal{X}_n^2 - n \log \frac{\mathcal{X}_n^2}{n} - n$$

появляется в критериях отношения правдоподобия при проверке нулевой гипотезы о равенстве дисперсии σ^2 заданному значению, когда выборка объема $n + 1$ берется из нормального распределения $N(\mu, \sigma^2)$, см. также соответствующие многомерные обобщения в [1]. Другие примеры использования хи-квадрат случайных величин в приложениях, в частности в информатике, см. в [2]; в гл. 5, 13, 15, 16 в [3]; а также в [4], где описан новый подход по «очистке» изображений. При этом оказывается, что уже при малом числе степеней свободы хи-квадрат распределение может быть успешно заменено нормальным распределением. В настоящей работе найдены оценки погрешности такой замены. В [1] доказано, что

$$\sup_x |P(T_1 \leq x) - G_1(x)| \leq C(n), \quad (1)$$

где $C(n)$ есть вычислимая величина, при этом $C(n) = O(n^{-1})$ при $n \rightarrow \infty$. В лемме 3 в [1] найдена оценка сверху для приближения функции распределения нормированной случайной величины \mathcal{X}_n^2 с помощью разложения Эджворта–Чебышева первого порядка. Отметим, что эта оценка вносит заметный вклад в величину $C(n)$ в правой части (1).

Цель настоящей работы — уточнить эту оценку, используя разложения Эджворта–Чебышева второго порядка.

Пусть $X = (\mathcal{X}_1^2 - 1)/\sqrt{2}$ есть нормированная хи-квадрат случайная величина с одной степенью свободы и X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины. Тогда нормирование \mathcal{X}_n^2 приводит к случайной величине

$$\begin{aligned} V_n &= (2n)^{-1/2} (\mathcal{X}_n^2 - n) = \\ &= n^{-1/2} (X_1 + X_2 + \dots + X_n). \end{aligned}$$

В силу центральной предельной теоремы функция распределения

$$F_n(x) = P(V_n \leq x) = P(\mathcal{X}_n^2 - n \leq \sqrt{2nx})$$

стремится к нормальному закону

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

при $n \rightarrow \infty$.

Кроме этого, из неравенства Берри–Эссеена находим

* Исследования выполнены при частичной поддержке РФФИ, гранты 08-01-00567, 09-01-12180.

¹ Магдебургский университет, факультет математики, gerd.christoph@ovgu.de

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, vulyan@gmail.com

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C E|X|^3}{\sqrt{n}} \leq \frac{1,4720}{\sqrt{n}}, \quad (2)$$

где $E|X|^3 = 3,0729 \dots$ и $C = 0,478 \dots$ (см., например, [5, 6]). Если использовать не только информацию о третьем абсолютном моменте распределения V_n , но и другие свойства нормированной величины \mathcal{X}_n^2 , то можно получить оценку, более точную, чем (2). В [7] доказано, что при всех $\lambda \in (0, \sqrt{3} - 1)$ и целых $n \geq 1$

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq D(\lambda, n),$$

где

$$D(\lambda, n) = \frac{1}{3\sqrt{\pi n}} + \frac{2}{\pi n} \left(\frac{2(1-\lambda)}{(2-2\lambda-\lambda^2)^2} + \frac{(1+\lambda^2)^{1-n/4}}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda^2 n/4} \right). \quad (3)$$

Поскольку $E(X^3) = 2\sqrt{2}$ и $E(X^4) = 15$, используя разложения Эдворта–Чебышева первого и второго порядков

$$\Phi_{1,n}(x) = \Phi(x) - \frac{\sqrt{2}(x^2-1)}{3\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}; \quad (4)$$

$$\Phi_{2,n}(x) = \Phi(x) - \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sqrt{2}(x^2-1)}{3\sqrt{n}} + \frac{x^5-10x^3+15x}{9n} + \frac{x^3-3x}{2n} \right), \quad (5)$$

получаем

$$F_n(x) = \Phi_{1,n}(x) + O(n^{-1});$$

$$F_n(x) = \Phi_{2,n}(x) + O(n^{-3/2})$$

при $n \rightarrow \infty$. В [8] доказано следующее неравенство (см. пример 3 в [8] при $a = b = 1/2$):

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi_{1,n}(x)| \leq D_1^*(n) = \frac{1,9}{n} \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 + \frac{15,59}{n} 0,9906^n + C(n)0,9894^n \quad (6)$$

с $C(n) = 15,21/(n-4)$, для $n > 32$ и $C(n) = 0,5271$ для $4 \leq n \leq 32$. Аналогичные оценки в L^1 -норме для разности плотности $p_{V_n}(x)$ и $d\Phi_{1,n}(x)/dx$ получены в [9]. Приведем исправленный вариант леммы 3 из [1] в виде теоремы.

Теорема 1. Для всех $\lambda \in (0, \sqrt{3} - 1)$ и целых $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi_{1,n}(x)| \leq D_1(\lambda, n),$$

где

$$D_1(\lambda, n) = \frac{2}{\pi n} \left(\frac{4}{9} + \frac{2(1-\lambda)}{(2-2\lambda-\lambda^2)^2} + \frac{(1+\lambda^2)^{1-n/4}}{\lambda^2} + \frac{3+\lambda}{3\lambda^2} e^{-\lambda^2(3-\lambda)n/(12+4\lambda)} \right). \quad (7)$$

Отметим, что первое слагаемое в скобках в правой части (7) есть $4/9$, а не $1/9$, как было напечатано в [1]. Это вытекает из оценки $I_{11} \leq 16/(9n)$ на с. 1160. В связи с этим ко всем значениям в таблице для $D(n)$ на с. 1155 в [1] следует прибавить $2/(3\pi n)$.

2 Основные результаты и их обсуждение

Сначала приведем две оценки точности приближений для распределения нормированной хи-квадрат случайной величины \mathcal{X}_n^2 , полученных с помощью разложения Эдворта–Чебышева второго порядка.

Теорема 2. При всех $\lambda \in (0, 0,75)$ и целых $n \geq 1$ имеем

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi_{2,n}(x)| \leq D_2(\lambda, n),$$

где $c a = a(\lambda) = 1 - \lambda^2/2 - \lambda^4/(3 - 3\lambda)$ и $b = b(\lambda) = 1 - \lambda^2/2$,

$$D_2(\lambda, n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1349}{270n^{3/2}} + \frac{21}{n^{5/2}} \right) + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{32}{(3-3\lambda)a^3n^2} + \frac{12}{b^4n^2} + \frac{4}{\lambda^2n} (1+\lambda^2)^{1-n/4} + \left(\ln \left(1 + \frac{4}{\lambda^2n} \right) + \frac{2\lambda}{3} + \frac{8}{3\lambda n(1+\sqrt{1+16/(\pi\lambda^2n)})} + \frac{\lambda^4n}{18} + \frac{17\lambda^2}{18} + \frac{34}{9n} \right) e^{-\lambda^2 n/4} \right].$$

Значения для $D_2(\lambda, n)$ при различных значениях λ и n , вычисленные в MAPLE, представлены в табл. 1.

Результат теоремы 2 можно улучшить, построив более точные, но и более громоздкие оценки. Определим функции

$$U_8(A) = \left(A^7 + 7A^5 + 35A^3 + 105A + \frac{210}{A + \sqrt{A^2 + 4}} \right) e^{-A^2/2};$$

$$U_7(B) = (B^3 + 3B^2 + 6B + 6) e^{-B};$$

Таблица 1 Значения для $D_2(\lambda, n)$ при различных значениях λ и n , вычисленные в MAPLE

n	λ	$D_2(\lambda, n)$
50	0,60	0,01862
100	0,54	0,00423
200	0,44	0,00121
300	0,37	0,00062
500	0,30	0,00028
1000	0,23	0,00009

Таблица 2 Значения для $D_2^*(\lambda, n)$ при различных значениях λ и n , вычисленные в MAPLE

n	λ	$D_2^*(\lambda, n)$
20	0,69	0,06698
30	0,62	0,03981
40	0,61	0,02030
50	0,59	0,01353
100	0,51	0,00389
150	0,45	0,00193

$$U_6(A) = \left(A^5 + 5A^3 + 15A + \frac{30}{A + \sqrt{A^2 + 4}} \right) e^{-A^2/2};$$

$$U_5(B) = (B^2 + 2B + 2) e^{-B};$$

$$U_4(A) = \left(A^3 + 3A + \frac{6}{A + \sqrt{A^2 + 4}} \right) e^{-A^2/2}.$$

Теорема 3. Пусть $a = a(\lambda)$ и $b = b(\lambda)$ те же, что в теореме 2. При всех $\lambda \in (0, 0.75)$ и целых $n \geq 1$ имеем

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi_{2,n}(x)| \leq D_2^*(\lambda, n),$$

где

$$D_2^*(\lambda, n) = \frac{2,8189}{n^{3/2}} + \frac{1,6977}{(1-\lambda)a^3n^2} + \frac{1,9099}{b^4n^2} +$$

$$+ \frac{11,8480}{n^{5/2}} - U(\lambda, n) + \frac{0,6366}{\lambda^2n}(1+\lambda^2)^{1-n/4} +$$

$$+ \left(\frac{0,6366}{\lambda^2n} + \frac{0,2122}{\lambda n} + \frac{0,6012}{n} + 0,1061\lambda + \right.$$

$$\left. + 0,1503\lambda^2 + 0,0088\lambda^4n \right) e^{-\lambda^2n/4}$$

и функция $U(\lambda, n)$ определяется формулой

$$U(\lambda, n) = \frac{\sqrt{2}}{\pi n^{3/2}} \left[\left(\frac{1}{81} U_8 \left(\lambda \sqrt{\frac{n}{2}} \right) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} U_6 \left(\lambda \sqrt{\frac{n}{2}} \right) + \frac{2}{5} U_4 \left(\lambda \sqrt{\frac{n}{2}} \right) \right) +$$

$$\left. + \left(\frac{4}{3(1-\lambda)a^3} U_5 \left(a\lambda^2 \frac{n}{4} \right) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2b^4} U_7 \left(b\lambda^2 \frac{n}{4} \right) \right) \left(\frac{2}{n} \right)^{1/2} + \frac{1}{5n} U_8 \left(\lambda \sqrt{\frac{n}{2}} \right) \Big].$$

Значения для $D_2^*(\lambda, n)$ при различных значениях λ и n , вычисленные в MAPLE, представлены в табл. 2.

Теперь можно оценить $\sup_x |F_n(x) - \Phi_{1,n}(x)|$ и $\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|$ с помощью теорем 2 и 3.

Пусть $Q_2(x)/n$ есть член порядка $1/n$ в разложении Эджворта–Чебышева (5). Тогда

$$\sup_x |Q_2(x)| = \sup_x \left| \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{x^5 - 10x^3 + 15x}{9} + \frac{x^3 - 3x}{2} \right) \right| \leq 0,1269.$$

Заметим, что $Q_2(x)$ принимает экстремальные значения при $x = \pm 1,43$.

Следствие 1. При всех $\lambda \in (0, 3/4)$ и целых $n \geq 1$ имеем

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi_{1,n}(x)| \leq \sup_x |Q_2(x)| \frac{1}{n} + D_2(\lambda, n) \leq$$

$$\leq \frac{0,12690}{n} + D_2(\lambda, n) = D_1^{**}(\lambda, n). \quad (8)$$

Таблица 3 Значения для $D_1^*(n)$, $D_1(\lambda, n)$ и $D_1^{**}(\lambda, n)$ при различных значениях λ и n , вычисленные в MAPLE

n	$D_1^*(n)$	λ	$D_1(\lambda, n)$	λ	$D_1^{**}(\lambda, n)$
50	0,42808	0,50	0,03858	0,60	0,02115
100	0,13460	0,45	0,01275	0,54	0,00550
150	0,05911	0,42	0,00712	0,48	0,002839
200	0,03059	0,40	0,00501	0,44	0,00185
300	0,01153	0,31	0,00281	0,38	0,00105
500	0,00424	0,25	0,00153	0,31	0,00053

В табл. 3 для различных значений n и λ и в случае приближения $F_n(x)$ разложением первого порядка $\Phi_{1,n}(x)$ приведены величины погрешностей $D_1^*(n)$ из неравенства (6), см. [8]; величины $D_1(\lambda, n)$ из (7), см. [1], и $D_1^{**}(\lambda, n)$ из неравенства (8), доказанного в настоящей работе.

Пусть $Q_1(x)$ есть член порядка $1/\sqrt{n}$ в разложении Эджворта–Чебышева (4) или (5). Тогда

$$\sup_x |Q_1(x)| = \sup_x \left| \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2}(x^2 - 1)}{3\sqrt{n}} \right| =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{\pi n}} \leq \frac{0,18806}{\sqrt{n}}.$$

Заметим, что $Q_1(x)$ достигает экстремального значения при $x = 0$.

Следствие 2. При всех $\lambda \in (0, 3/4)$ и целых $n \geq 1$ где имеем

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{0,18806}{\sqrt{n}} + \frac{0,12690}{n} + D_2^*(\lambda, n) = D_0(\lambda, n). \quad (9)$$

Таблица 4 Значения для БЭ-оценки, $D(\lambda, n)$ и $D_0(\lambda, n)$ при различных значениях λ и n , вычисленные в MAPLE

n	БЭ-оценка	λ	$D(\lambda, n)$	λ	$D_0(\lambda, n)$
50	0,20818	0,483	0,05498	0,57	0,04266
100	0,14720	0,416	0,02763	0,49	0,02397
300	0,08499	0,295	0,1267	0,37	0,01190
500	0,06583	0,244	0,00935	0,30	0,00894
1000	0,04655	0,196	0,00638	0,23	0,00628

В табл. 4 для различных значений n и λ и в случае приближения $F_n(x)$ стандартной нормальной функцией распределения $\Phi(x)$ приведены величины погрешностей, даваемые неравенством Берри–Эссеена (БЭ-оценка) (2), а также значения $D(\lambda, n)$, определенного в (3), см. [7], и значения $D_0(\lambda, n)$ из неравенства (9), доказанного в настоящей работе.

Значения параметра λ , появляющегося в выражениях для $D_2(\lambda, n)$, $D_1(\lambda, n)$ и $D_0(\lambda, n)$, следует выбирать в зависимости от размера выборки n .

3 Доказательство теорем 2 и 3

Пусть $f_n(t)$ и $g_n^*(t)$ есть характеристическая функция распределения $F_n(x)$ и преобразование Фурье–Стилтьеса функции $\Phi_{2,n}(x)$ соответственно. Тогда, обозначая $m = n/2$, имеем

$$f_n(t) = e^{-it\sqrt{m}} \left(1 - \frac{it}{\sqrt{m}}\right)^{-m};$$

$$g_n^*(t) = \left(1 + \frac{(it)^3}{3\sqrt{m}} + \frac{(it)^6}{18m} + \frac{(it)^4}{4m}\right) e^{-t^2/2}.$$

Поскольку функции $F_n(x)$ и $\Phi_{2,n}(x)$ имеют непрерывные производные, воспользуемся формулой обращения для характеристических функций

$$|F_n(x) - \Phi_{2,n}(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{f_n(t) - g_n^*(t)}{-it} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} (I_1 + I_2 + I_{31} + I_{32}),$$

$$I_1 = \int_{|t| < \lambda\sqrt{m}} \frac{1}{|t|} |f_n(t) - e^{-t^2/2} \left(1 + \frac{(it)^3}{3\sqrt{m}} + \frac{(it)^6}{18m} + \frac{(it)^4}{4m}\right)| dt;$$

$$I_2 = \int_{|t| \geq \lambda\sqrt{m}} \frac{|f_n(t)|}{|t|} dt;$$

$$I_{31} = \int_{|t| \geq \lambda\sqrt{m}} \frac{e^{-t^2/2}}{|t|} \left|1 + \frac{(it)^3}{3\sqrt{m}}\right| dt;$$

$$I_{32} = \int_{|t| \geq \lambda\sqrt{m}} \frac{e^{-t^2/2}}{|t|} \left|\frac{(it)^6}{18m} + \frac{(it)^4}{4m}\right| dt.$$

Сначала оценим $|f_n(t) - g_n^*(t)|$ для $|t| \leq \lambda\sqrt{m}$, когда $\lambda < 3/4$ и $m = n/2$. Используя ту ветвь комплексной функции $\tau(z) = \ln(1 - z)$, для которой $\tau(0) = 0$, запишем

$$f_n(t) = \exp \left\{ -it\sqrt{m} - m \ln \left(1 - \frac{it}{\sqrt{m}}\right) \right\} = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} + \frac{(it)^3}{3\sqrt{m}} + \frac{(it)^4}{4m} + \frac{(it)^5}{5m^{3/2}} + mR_m(t) \right\} = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} + \frac{(it)^3}{3\sqrt{m}} + \frac{(it)^4}{4m} + \frac{(it)^5}{5m^{3/2}} \right\} + S_{1,m}(t) = e^{-t^2/2} \left(1 + \frac{(it)^3}{3\sqrt{m}} + \frac{(it)^6}{18m} + \frac{(it)^4}{4m}\right) + S_{2,m}(t) + S_{1,m}(t), \quad (10)$$

где

$$R_m(t) = -\ln \left(1 - \frac{it}{\sqrt{m}}\right) - \frac{it}{\sqrt{m}} - \frac{(it)^2}{2m} - \frac{(it)^3}{3m^{3/2}} - \frac{(it)^4}{4m^2} - \frac{(it)^5}{5m^{5/2}};$$

$$S_{1,m}(t) = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} + \frac{(it)^3}{3\sqrt{m}} + \frac{(it)^4}{4m} + \frac{(it)^5}{5m^{3/2}} \right\} (\exp\{mR_m(t)\} - 1);$$

$$S_{2,m}(t) = e^{-t^2/2} \left(\exp \left\{ \frac{(it)^3}{3\sqrt{m}} + \frac{(it)^4}{4m} + \frac{(it)^5}{5m^{3/2}} \right\} - 1 - \frac{(it)^3}{3\sqrt{m}} - \frac{(it)^6}{18m} - \frac{(it)^4}{4m} \right).$$

Используя

$$\left| -\ln(1 - z) - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} \right| \leq \frac{|z|^6}{6(1 - |z|)}$$

при $|z| < 1$, находим, что для $|t| < \lambda\sqrt{m}$ справедливы неравенства:

$$m|R_m(t)| \leq \frac{|t|^6}{6m^2(1 - |t|/\sqrt{m})} \leq \frac{t^2\lambda^4}{6(1 - \lambda)},$$

и, обозначая

$$a = a(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{3(1 - \lambda)},$$

получаем:

$$\begin{aligned} |S_{1,m}(t)| &\leq e^{-t^2/2+t^4/(4m)} \left| e^{mR_m(t)} - 1 \right| \leq \\ &\leq e^{-t^2/2+t^2\lambda^2/4} m|R_m(t)| e^{m|R_m(t)|} \leq \\ &\leq \frac{|t|^6 e^{-at^2/2}}{6m^2(1 - \lambda)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для оценки $S_{2,m}(t)$ положим:

$$u = \frac{(it)^3}{3\sqrt{m}}; \quad w = \frac{(it)^4}{4m}; \quad z = \frac{(it)^5}{5m^{3/2}}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} |e^u| &= 1; \quad \left| e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{|u|^3}{6}; \\ |e^w - 1 - w| &\leq \frac{w^2 e^{|w|}}{2}; \quad |e^z| = 1; \quad |e^z - 1| \leq |z|; \\ |S_{2,m}(t)| &= \\ &= e^{-t^2/2} \left(\left| e^u e^w e^z - 1 - u - \frac{u^2}{2} - w \right| \right) \leq \\ &\leq e^{-t^2/2} \left(\left| e^u(1+w)e^z - 1 - u - \frac{u^2}{2} - w \right| + \right. \\ &\quad \left. + |e^u(e^w - 1 - w)e^z| \right) \leq \\ &\leq e^{-t^2/2} \left(\left| e^u(1+w) - 1 - u - \frac{u^2}{2} - w \right| + \right. \\ &\quad \left. + |e^u(1+w)(e^z - 1)| + \frac{|w|^2 e^{|w|}}{2} \right) \leq \\ &\leq e^{-t^2/2} \left(\left| e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2} \right| + |w| \cdot |e^u - 1| + \right. \\ &\quad \left. + (1 + |w|)|z| + \frac{|w|^2 e^{|w|}}{2} \right) \leq \\ &\leq e^{-t^2/2} \left(\frac{|u|^3}{6} + |w| \cdot |u| + |z| + \right. \\ &\quad \left. + |w||z| + \frac{|w|^2 e^{|w|}}{2} \right) \leq \\ &\leq e^{-t^2/2} \left(\frac{|t|^9}{162m^{3/2}} + \frac{|t|^7}{12m^{3/2}} + \frac{|t|^5}{5m^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|t|^9}{20m^{5/2}} + \frac{|t|^8}{32m^2} e^{\lambda^2 t^2/4} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Перейдем теперь к оценке интегралов. Из (10)–(12) следует, что $I_1 \leq I_{11} + I_{12}$, где

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{|t| < \lambda\sqrt{m}} \frac{|S_{1,m}(t)|}{|t|} dt \leq \\ &\leq \int_{|t| \leq \lambda\sqrt{m}} \frac{|t|^5}{6m^2(1 - \lambda)} e^{-at^2/2} dt \leq \\ &\leq \frac{4}{3m^2(1 - \lambda)a^3} \int_0^\infty u^2 e^{-u} du = \frac{8}{3m^2(1 - \lambda)a^3} \end{aligned}$$

с $a = 1 - \lambda^2/2 - \lambda^4/[3(1 - \lambda)]$, и, поскольку $E(Y^8) = 105$, $E(Y^6) = 15$ и $E(Y^4) = 3$ для стандартной нормальной случайной величины Y ,

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int_{|t| < \lambda\sqrt{m}} \frac{|S_{2,m}(t)|}{|t|} dt \leq \\ &\leq \int_{|t| < \lambda\sqrt{m}} e^{-t^2/2} \left(\frac{|t|^8}{162m^{3/2}} + \frac{|t|^6}{12m^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|t|^4}{5m^{3/2}} + \frac{|t|^8}{20m^{5/2}} + \frac{|t|^7}{32m^2} e^{\lambda^2 t^2/4} \right) dt \leq \\ &\leq \frac{105\sqrt{2\pi}}{162m^{3/2}} + \frac{15\sqrt{2\pi}}{12m^{3/2}} + \frac{3\sqrt{2\pi}}{5m^{3/2}} + \frac{105\sqrt{2\pi}}{20m^{5/2}} + \frac{3}{b^4 m^2} \end{aligned}$$

с $b = b(\lambda) = 1 - \lambda^2/2$.

В приведенных выше оценках для интегралов I_{11} и I_{12} верхний предел $\lambda\sqrt{m}$ был заменен бесконечностью. Если этого не делать, то можно получить более точные, но вместе с тем более громоздкие оценки: из формулы 7.1.13 в [10] вытекает, что

$$\frac{2e^{-r^2/2}}{r + \sqrt{r^2 + 4}} \leq \int_r^\infty e^{-t^2/2} dt \leq \frac{2e^{-r^2/2}}{r + \sqrt{r^2 + 8/\pi}}. \quad (13)$$

Используя интегрирование по частям для $k = 4, 3, 2$ и нижнюю оценку из (13) для $k = 0$, находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda\sqrt{m}} t^{2k} e^{-t^2/2} dt &= \int_0^\infty t^{2k} e^{-t^2/2} dt - \\ &- \int_{\lambda\sqrt{m}}^\infty t^{2k} e^{-t^2/2} dt \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2k - 1)!! - U_{2k} \left(\lambda \sqrt{\frac{n}{2}} \right). \end{aligned}$$

Аналогично с помощью интегрирования по частям для $k = 3$ и $k = 2$ находим, что

$$\int_0^{\lambda\sqrt{m}} t^{2k+1} e^{-ct^2/2} dt = \int_0^{c\lambda^2 m/2} u^k e^{-t^2/2} dt \leq \frac{2^k}{c^{k+1}} \left(k! - U_{2k+1} \frac{c\lambda^2 m}{2} \right),$$

где функции $U_4(\dots) - U_8(\dots)$ определены перед формулировкой теоремы 3. Отрицательные члены оказывают заметное влияние на величины оценок, когда $m = n/2$ мало. При больших значениях n этим влиянием можно пренебречь.

Для I_2 воспользуемся оценкой, полученной в [1] с $|f_n(t)| = (1 + t^2/m)^{-m/2}$:

$$I_2 \leq \int_{|t| \geq \lambda\sqrt{m}} \frac{1}{|t|} \frac{1}{(1 + t^2/m)^{m/2}} dt = \int_{u \geq \lambda^2} \frac{du}{u(1+u)^{m/2}} \leq \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \int_{u \geq \lambda^2} \frac{du}{(1+u)^{1+m/2}} = \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2 m/2} (1 + \lambda^2)^{-m/2}.$$

Для оценки I_{31} воспользуемся формулой 5.1.20 из [10]

$$\int_z^\infty \frac{e^{-t^2/2}}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{z^2/2}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \leq \frac{1}{2} e^{-z^2/2} \ln \left(1 + \frac{2}{z^2} \right),$$

интегрированием по частям и верхней оценкой в (13). Тогда получаем

$$I_{31} \leq 2 \int_{\lambda\sqrt{m}}^\infty e^{-t^2/2} \left(\frac{1}{t} + \frac{t^2}{3\sqrt{m}} \right) dt \leq \left(\ln \left(1 + \frac{2}{\lambda^2 m} \right) + \frac{2\lambda}{3} + \frac{4}{3\lambda m(1 + \sqrt{1 + 8/(\pi\lambda^2 m)})} \right) e^{-\lambda^2 m/2};$$

$$I_{32} \leq 2 \int_{\lambda\sqrt{m}}^\infty e^{-t^2/2} \left(\frac{t^5}{18m} + \frac{t^3}{4m} \right) dt \leq \left(\frac{\lambda^4 m^2 + 4\lambda^2 m + 8}{9m} + \frac{\lambda^2 m + 2}{2m} \right) e^{-\lambda^2 m/2}.$$

Объединение оценок для I_1, I_2, I_{31} и I_{32} завершает доказательство теорем 2 и 3.

Литература

1. Ульянов В. В., Кристоф Г., Фуджикоши Я. О приближениях преобразований хи-квадрат распределений в статистических приложениях // Сибирский математический журнал, 2006. Т. 47. № 6. С. 1401–1413.
2. Sezgin A., Oechtering T.J. Complete characterization of the equivalent MIMO channel for quasi-orthogonal space-time codes // IEEE Transactions on Information Theory, 2008. Vol. 54. No. 7. P. 3315–3327.
3. Fujikoshi Y., Ulyanov V. V., Shimizu R. Multivariate statistics: High-dimensional and large-sample approximations. — Hoboken, N.J.: John Wiley and Sons, 2010.
4. Hawwar Y., Reza A. Spatially adaptive multiplicative noise image denoising technique // IEEE Transactions on Image Processing, 2002. Vol. 11. No. 12. P. 1397–1404.
5. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским случайным суммам // Обзорение прикладной и промышленной математики, 2010. Т. 17. Вып. 1. С. 25–56.
6. Тюрин И. С. Уточнение верхних оценок констант в теореме Ляпунова // УМН, 2010. Т. 65. Вып. 3(393). С. 201–202.
7. Кавагучи Ю., Ульянов В. В., Фуджикоши Я. Приближения для статистик, описывающих геометрические свойства данных большой размерности, с оценками ошибок // Информатика и её применения, 2010. Т. 4. Вып. 1. С. 22–27.
8. Dobric V., Ghosh B. K. Some analogs of the Berry–Esseen bounds for first-order Chebyshev–Edgeworth expansions // Statist. Decisions, 1996. Vol. 14. No. 4. P. 383–404.
9. Christoph G., Ulyanov V. Bounds for L_1 -approximation of chi-squared-density by a first order Chebyshev–Edgeworth-expansion // Int. J. Communications in Dependability and Quality Management, 2006. Vol. 9. No. 1. P. 12–16.
10. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979.

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНЕЧНЫХ СМЕСЕЙ ОБОБЩЕННЫХ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ВОЗМУЩЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ*

В. Ю. Королев¹, В. А. Крылов², В. Ю. Кузьмин³

Аннотация: На примере модели «контаминации» в терминах равномерного расстояния и метрики Леви получены оценки устойчивости конечных смесей обобщенных гамма-распределений по отношению к малым возмущениям параметров.

Ключевые слова: обобщенное гамма-распределение; конечная смесь; метрика Леви

1 Введение

В работе [1] был предложен новый метод анализа поведения хаотических информационных потоков в сложных телекоммуникационных сетях, основанный на стохастической модели телекоммуникационной сети, имеющей вид суперпозиции некоторых простых структур. В качестве итоговой модели распределения времени выполнения (обработки) запроса сетью в [1] рассматривается смесь гамма-распределений или смесь распределений Вейбулла. Полученные в указанной работе результаты могут быть достаточно просто интерпретированы. Число компонент смеси символизирует число типичных параллельных или последовательных структур. Значения параметров составляющих смесь гамма-распределений показывают «степень параллелизма» соответствующей структуры: чем ближе параметр формы к единице, тем выше эта «степень». И наоборот, чем дальше значение параметра формы от единицы, тем больше последовательных операций выполняется в соответствующем блоке. Веса компонент характеризуют примерную долю использования ресурсов для сообщений, соответствующих каждому распределению входных данных. Предложенный метод позволяет анализировать информационные потоки в инфотелекоммуникационных системах и, в частности, выявлять (статистически оценивать) стохастическую структуру сложных программно-вычислительных и телекоммуникационных сетей даже в том случае, ко-

гда их реальная топология неизвестна. Главную роль в указанном методе анализа стохастической структуры информационных потоков играет задача динамического статистического разделения смеси, т. е. задача статистического оценивания параметров смеси. Для решения этой задачи в [1], следуя традиции, использован EM-алгоритм. Однако применение предложенного метода к реальным статистическим данным выявило его заметную неустойчивость по исходным данным. В работе [2] предложен альтернативный «сеточный» метод решения задачи разделения смесей вероятностных распределений, основанный на подмене исходной смеси смесью с намного бóльшим числом компонент с известными параметрами, в которой неизвестными параметрами являются только веса компонент. При этом для обоснования возможности подмены исходной смеси новой необходимо, чтобы смешиваемые распределения обладали свойством устойчивости к малым возмущениям параметров.

В данной заметке будет исследована устойчивость конечных смесей обобщенных гамма-распределений (ОГ-распределений) относительно возмущений параметров. ОГ-распределения были введены в 1962 г. в работе [3] в качестве семейства вероятностных моделей, включающего в себя одновременно гамма-распределения и распределения Вейбулла. Напомним выражение для функции ОГ-распределения:

$$G_{\beta, \alpha, \sigma}(x) = \frac{\gamma(\alpha, [x/\sigma]^\beta)}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 08-01-00563, 08-01-00567, 08-07-00152, 09-07-12032-офи-м, 11-07-00112 и 11-01-00515), а также Министерством образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг».

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Институт проблем информатики Российской академии наук, vkorolev@comtv.ru

²Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, vkrylov@cs.msu.ru

³Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, silencersshade@gmail.com

с параметрами $\beta, \alpha, \sigma \in \mathbb{R}^+$, где $\Gamma(\alpha)$ — эйлерова гамма-функция:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx;$$

$\gamma(\alpha, x)$ — (нижняя) неполная гамма-функция:

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x z^{\alpha-1} e^{-z} dz.$$

Семейство ОГ-распределений включает в себя гамма-распределение и его частные случаи — показательное распределение, распределения Эрланга и хи-квадрат, — распределение Накагами, распределение максимума стандартного винеровского процесса на интервале $[0, 1]$ (распределение модуля стандартной нормальной случайной величины или «полунормальное» распределение), обратное гамма-распределение, хи-распределение, распределения Рэлея, Максвелла, Вейбулла и Леви. Предельным случаем обобщенного гамма-распределения при $\alpha \rightarrow \infty$ является логнормальное распределение. Как уже было упомянуто выше, ОГ-распределения находят применение в задаче анализа стохастической структуры информационных потоков. Это семейство также широко используется в прикладных задачах, связанных с вычислением надежностных характеристик [4, 5], прогнозированием продолжительности лечения и затратами на медицинское обслуживание [5, 6], расчетами инженерных рисков и рисков катастроф (землетрясений и наводнений) [7], обработкой изображений [8, 9] и дистанционным зондированием [10, 11]. ОГ-распределения также используются в качестве моделей распределения доходов [12].

2 Постановка задачи

В данной заметке устойчивость конечных смесей ОГ-распределений по отношению к малым возмущениям параметров будет рассмотрена на примере простейшей модели загрязнения («контаминации»), предложенной Дж. Тьюки [13] для нормальных распределений (см. также [14]). Согласно этой модели вместо «чистого» ОГ-распределения, будем рассматривать смеси ОГ-распределений. Так, контаминационная модель по параметру β имеет следующий вид:

$$F_{p,\beta_1,\beta_2} = p\mathcal{G}_{\beta_1,1,1}(x) + (1-p)\mathcal{G}_{\beta_2,1,1}(x), \quad (2)$$

где $p \in (0, 1]$ и $0 < \beta_1, \beta_2 \leq M_\beta$ для некоторой положительной константы M_β . Предполагается, что

$\mathcal{G}_{\beta_1,1,1}(x)$ — «истинное» распределение наблюдений. Если выборка представляет собой набор независимых реализаций случайной величины с функцией распределения F_{p,β_1,β_2} , то компонента смеси $\mathcal{G}_{\beta_2,1,1}(x)$ соответствует «загрязняющим» (или нетипичным) наблюдениям. Задачу устойчивости сформулируем в следующем виде: установить зависимость между «близостью» функций распределения F_{p,β_1,β_2} и $\mathcal{G}_{\beta_1,1,1}(x)$ и близостью значений параметров β_1 и β_2 (близость параметра p к единице). Аналогично рассмотрим модели контаминации по параметрам α и σ . Подобная задача была исследована для масштабных и сдвиговых смесей нормальных распределений в [15]. Заметим, что ограничение, предусмотренное моделью (2), а именно фиксация значений $\alpha = 1$ и $\sigma = 1$, введено с целью упрощения формулировок последующих утверждений. Аналогичные утверждения могут быть получены и в более общем предположении $\alpha = \alpha_0$ и $\sigma = \sigma_0$.

Как отмечено в [15], для оценки «близости» функций распределения в данной задаче целесообразным представляется использовать метрики, характеризующие слабую сходимость, т. е., например, метрику Леви или сглаженную равномерную метрику. В данном случае будем использовать равномерную метрику ρ , определяемую как

$$\rho(X, Y) \equiv \rho(F, G) = \sup_x |F(x) - G(x)|$$

для двух случайных величин X и Y , имеющих функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. На основе результатов для равномерной метрики будут также получены результаты в терминах метрики Леви, которая определяется следующим образом:

$$L(F, G) = \inf\{r : G(x-r) - r \leq F(x) \leq G(x+r) + r, \text{ для всех } x \in \mathbb{R}\}.$$

Расстояние Леви допускает наглядную геометрическую интерпретацию: оно равно длине стороны наибольшего квадрата, который можно вписать между графиками функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ так, чтобы стороны его были параллельны координатным осям.

3 Прямая задача устойчивости

Пусть X_i и Y_i — независимые случайные величины (с.в.) и пусть, более того, $P(Y_i \geq 0) = 1, i = 1, 2$. Очевидно, что если рассматривать дискретные с.в. Y_i , то $X_i Y_i$ будут представлять собой конечные масштабные смеси. Прямая задача устойчивости состоит в оценке величины

$$\rho(X_1 Y_1, X_2 Y_2)$$

через $\rho(X_1, X_2)$ и $\rho(Y_1, Y_2)$. Следующее утверждение дает решение этой задачи.

Утверждение ([15], следствие 3.3.6). Пусть X_i и Y_i независимые с.в., причем $P(Y_i > 0) = 1$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\rho(X_1 Y_1, X_2 Y_2) \leq \rho(X_1, X_2) + \rho(Y_1, Y_2).$$

Данное утверждение дает простую и наглядную оценку близости масштабных смесей в терминах расстояний между соответствующими смешиваемыми и смешивающими распределениями.

Основная идея регуляризации общей некорректно поставленной задачи разделения смеси (на практике не известной точно) законов распределения основана на замене «истинного» смешивающего закона его конечной дискретной аппроксимацией. Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с оцениванием потери точности, сопутствующей такой подмене, в случае масштабных смесей ОГ-распределений.

Из приведенного утверждения вытекает, что для любых неотрицательных с.в. Y_1 и Y_2 справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sup_{x>0} \left| \mathbb{E} \mathcal{G}_{\beta, \alpha, \sigma}(x \sqrt{Y_1}) - \mathbb{E} \mathcal{G}_{\beta, \alpha, \sigma}(x \sqrt{Y_2}) \right| &\leq \\ &\leq \sup_{y>0} |P(Y_1 < y) - P(Y_2 < y)|. \end{aligned}$$

Таким образом, если известна оценка равномерного расстояния между «истинным» смешивающим распределением и его аппроксимацией, то равномерное расстояние между «истинной» и приближенной смесями не превосходит этой оценки.

Для масштабного параметра σ ОГ-распределения можно получить неравенство для решения прямой задачи устойчивости в терминах метрики Леви.

Заметим сперва, что масштабный параметр σ обладает следующим очевидным свойством:

$$\mathcal{G}_{\beta, \alpha, \sigma}(x) = \mathcal{G}_{\beta, \alpha, 1}(\sigma^{-1} x).$$

Поэтому, если обозначить через U_{σ_1, σ_2} с.в., принимающую значения 1 и σ_1/σ_2 с вероятностями p и $(1-p)$ соответственно, то с.в.

$$\hat{F}_{\sigma_1, \sigma_2} = p \mathcal{G}_{\beta, \alpha, \sigma_1}(x) + (1-p) \mathcal{G}_{\beta, \alpha, \sigma_2}(x)$$

распределена как произведение независимых с.в. U_{σ_1, σ_2} и с.в. с ОГ-распределением с параметрами $\{\beta, \alpha, \sigma_1\}$.

Утверждение 1. Пусть $p \in (0, 1]$, $\beta, \alpha, \sigma_1, \sigma_2 \in (0, +\infty)$. Тогда

$$\begin{aligned} L(\hat{F}_{\sigma_1, \sigma_2}, \mathcal{G}_{\beta, \alpha, \sigma_1}) &\leq \\ &\leq 2 \left(1 + \frac{\beta \alpha^\alpha \exp[-\alpha]}{\Gamma(\alpha)} \right) L(U_{\sigma_1, \sigma_2}, 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся доказанным в [16] (теорема 4) утверждением: для любой с.в. X с плотностью $p(x)$ и неотрицательной с.в. W , удовлетворяющей $\mathbb{E}W < \infty$, имеет место

$$\rho(XW, X) \leq 2 \left(1 + \max_{x>0} [xp(x)] \right) L(W, 1).$$

Следовательно, так как очевидно, что $L(X, Y) \leq \rho(X, Y)$, имеем

$$\begin{aligned} L(\mathcal{G}_{\beta, \alpha, \sigma_1}(x), \mathbb{E} \mathcal{G}_{\beta, \alpha, \sigma_1}(xU)) &\leq \\ &\leq 2 \left(1 + \max_{x>0} [xp(x)] \right) L(W, 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Взяв в качестве X с.в. с функцией распределения $\mathcal{G}_{\beta, \alpha, \sigma_1}$, находим $\max_{x>0} [xp(x)]$, где

$$xp(x) = \frac{\beta}{\sigma_1^{\alpha\beta} \Gamma(\alpha)} x^{\alpha\beta} \exp \left[- \left(\frac{x}{\sigma_1} \right)^\beta \right].$$

Для этого находим

$$[xp(x)]' = \frac{\beta^2}{\sigma_1^{\alpha\beta} \Gamma(\alpha)} \exp \left[- \left(\frac{x}{\sigma_1} \right)^\beta \right] \left(\alpha - x^\beta \sigma_1^{-\beta} \right).$$

Поэтому функция $xp(x)$ имеет глобальный максимум в точке $x_0 = \sigma_1 \alpha^{1/\beta}$ и

$$\max_{x>0} [xp(x)] = xp(x) \Big|_{x=x_0} = \frac{\beta \alpha^\alpha \exp[-\alpha]}{\Gamma(\alpha)}.$$

Наконец, подставив последнее уравнение в (4) и заменив $W = U_{\sigma_1, \sigma_2}$, приходим к (3). \square

4 Обратная задача устойчивости: равномерная метрика

В реальности намного больший интерес представляет решение задачи, являющейся в определенном смысле обратной к только что рассмотренной. Обратная задача состоит в следующем: по заданному расстоянию (равномерному, Леви) между смесями найти оценку расстояния между «истинным» и статистически оцененным смешивающими распределениями. Решению данной задачи в терминах равномерной метрики и метрики Леви посвящены данный и следующий разделы. Обратная задача

оценивания устойчивости ОГ-распределения по отношению к «загрязнению» может быть сформулирована следующим образом. Пусть для произвольно малого $\varepsilon > 0$ выполнено $\rho(F_{p,\beta_1,\beta_2}, \mathcal{G}_{\beta_1,1,1}) \leq \varepsilon$. Насколько близки к нулю будут $(1-p)$ и $|\beta_1 - \beta_2|$? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $p \in (0, 1]$, $\beta_1, \beta_2 \in (0, M_\beta]$ для некоторой положительной константы M_β и для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\rho(F_{p,\beta_1,\beta_2}, \mathcal{G}_{\beta_1,1,1}) \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Тогда для параметров p, β_1, β_2 выполнено соотношение

$$(1-p)|\beta_1 - \beta_2| \leq \frac{\exp[2^{M_\beta}]}{2^{M_\beta} \ln 2} \varepsilon. \quad (6)$$

Доказательство. Несложно заметить, что

$$\begin{aligned} \rho(F_{p,\beta_1,\beta_2}, \mathcal{G}_{\beta_1,1,1}) &= \\ &= (1-p) \sup_x |\mathcal{G}_{\beta_1,1,1}(x) - \mathcal{G}_{\beta_2,1,1}(x)| \geq \\ &\geq (1-p) |\mathcal{G}_{\beta_1,1,1}(2) - \mathcal{G}_{\beta_2,1,1}(2)|. \end{aligned} \quad (7)$$

По формуле Лагранжа получаем

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_{\beta_1,1,1}(2) - \mathcal{G}_{\beta_2,1,1}(2)| &= \\ &= |\beta_1 - \beta_2| \left. \frac{d\mathcal{G}_{\beta,1,1}(2)}{d\beta} \right|_{\beta=\bar{\beta}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\bar{\beta} \in [\beta_1, \beta_2] \in (0, M_\beta]$. Установим нижнюю границу для производной в правой части (8):

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{G}_{\beta,1,1}(2)}{d\beta} \right|_{\beta=\bar{\beta}} &= \frac{1}{\Gamma(1)} \left[\frac{d}{d\beta} \gamma(1, 2^\beta) \right]_{\beta=\bar{\beta}} = \\ &= \left[\frac{d}{d\beta} \int_0^{2^\beta} \exp[-t] dt \right]_{\beta=\bar{\beta}} = \\ &= \left[\frac{d}{d\beta} (-\exp[-2^\beta] + 1) \right]_{\beta=\bar{\beta}} = \\ &= [2^\beta \ln 2 \exp[-2^\beta]]_{\beta=\bar{\beta}} \geq 2^{M_\beta} \ln 2 \exp[-2^{M_\beta}]. \end{aligned}$$

Последнее неравенство имеет место, так как функция $2^\beta \ln 2 \exp[-2^\beta]$ убывает при любых $\beta > 0$ и $\bar{\beta} \in (0, M_\beta]$.

Объединив последнее неравенство с (7), получаем

$$\begin{aligned} \rho(F_{p,\beta_1,\beta_2}, \mathcal{G}_{\beta_1,1,1}) &\geq \\ &\geq (1-p) |\beta_1 - \beta_2| 2^{M_\beta} \ln 2 \exp[-2^{M_\beta}]. \end{aligned}$$

Следовательно, если выполнено (5), то

$$(1-p) |\beta_1 - \beta_2| \leq \frac{\exp[2^{M_\beta}]}{2^{M_\beta} \ln 2} \varepsilon. \quad \square$$

Таким образом, если «загрязненная» смесь F_{p,β_1,β_2} близка к ОГ-распределению $\mathcal{G}_{\beta_1,1,1}(x)$ в смысле равномерного расстояния, то и величины $(1-p)$ и $|\beta_1 - \beta_2|$ должны быть близки к нулю согласно соотношению (6).

Зафиксируем аналогичное утверждение для параметра формы α . Для этого рассмотрим контаминационную модель Тьюки по α :

$$F_{p,\alpha_1,\alpha_2} = p\mathcal{G}_{1,\alpha_1,1}(x) + (1-p)\mathcal{G}_{1,\alpha_2,1}(x).$$

Теорема 2. Пусть $p \in (0, 1]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [m_\alpha, M_\alpha]$ для некоторых $M_\alpha > m_\alpha > 0$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\rho(F_{p,\alpha_1,\alpha_2}, \mathcal{G}_{1,\alpha_1,1}) \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Тогда для параметров p, α_1, α_2 выполнено соотношение

$$(1-p) |\alpha_1 - \alpha_2| \leq \frac{\max[\Gamma^2(m_\alpha), \Gamma^2(M_\alpha)]}{\gamma(1, M_\alpha) \Gamma(e, m_\alpha)} \varepsilon,$$

где через $\gamma(s, x)$ и $\Gamma(s, x)$ обозначены нижняя и верхняя неполная гамма-функция.

Доказательство. Аналогично (7)–(8) имеем

$$\begin{aligned} \rho(F_{p,\alpha_1,\alpha_2}, \mathcal{G}_{1,\alpha_1,1}) &\geq (1-p) |\mathcal{G}_{1,\alpha_1,1}(1) - \mathcal{G}_{1,\alpha_2,1}(1)| = \\ &= |\alpha_1 - \alpha_2| \left. \frac{d\mathcal{G}_{1,\alpha,1}(1)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\bar{\alpha}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\bar{\alpha} \in [\alpha_1, \alpha_2] \in (m_\alpha, M_\alpha]$. Установим нижнюю границу для производной в правой части (10):

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{G}_{1,\alpha,1}(1)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\bar{\alpha}} &= \left[\frac{d}{d\alpha} \frac{\gamma(\alpha, 1)}{\Gamma(\alpha)} \right]_{\alpha=\bar{\alpha}} = \\ &= \left[\frac{d}{d\alpha} \frac{\int_0^1 t^{\alpha-1} \exp[-t] dt}{\int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp[-t] dt} \right]_{\alpha=\bar{\alpha}} = \\ &= \Gamma^{-2}(\bar{\alpha}) \left| \left[\int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp[-t] dt \int_0^1 t^{\alpha-1} \ln t \exp[-t] dt - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^\infty t^{\alpha-1} \ln t \exp[-t] dt \int_0^1 t^{\alpha-1} \exp[-t] dt \right] \right|_{\alpha=\bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

Разбивая интегралы по $[0, \infty)$ на сумму интегралов по $[0, 1]$ и $[1, \infty)$, получаем

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d\mathcal{G}_{1,\alpha,1}(1)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\bar{\alpha}} = \\ & = \Gamma^{-2}(\bar{\alpha}) \left| \left[\int_1^{\infty} t^{\alpha-1} \exp[-t] dt \int_0^1 t^{\alpha-1} \ln t \exp[-t] dt - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_1^{\infty} t^{\alpha-1} \ln t \exp[-t] dt \int_0^1 t^{\alpha-1} \exp[-t] dt \right] \right|_{\alpha=\bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

Вспользуемся теперь свойствами гамма-функции на положительной полуоси [17]: $\Gamma(x)$ строго убывает от $+\infty$ в нуле до точки x_1 ($x_1 \approx 1,4616$ и $\Gamma(x_1) \approx 0,8856$) и строго возрастает далее до $+\infty$ при $x \rightarrow \infty$. Следовательно, при $\bar{\alpha} \in [m_\alpha, M_\alpha]$ имеем $\Gamma(\bar{\alpha}) \leq \max[\Gamma(m_\alpha), \Gamma(M_\alpha)]$. В последнем выражении первое и второе слагаемое отрицательны, что позволяет раскрыть модуль и прийти к неравенству

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d\mathcal{G}_{1,\alpha,1}(1)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\bar{\alpha}} \geq \max^{-2}[\Gamma(m_\alpha), \Gamma(M_\alpha)] \times \\ & \times \left[\int_1^{\infty} t^{\alpha-1} \exp[-t] dt \int_0^1 t^{\alpha-1} |\ln t| \exp[-t] dt + \right. \\ & \quad \left. + \int_1^{\infty} t^{\alpha-1} \ln t \exp[-t] dt \int_0^1 t^{\alpha-1} \exp[-t] dt \right]_{\alpha=\bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

В последнем выражении все четыре интеграла положительны. Отбросив первое из слагаемых и сузив один из интервалов интегрирования, приходим к

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d\mathcal{G}_{1,\alpha,1}(1)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\bar{\alpha}} \geq \max^{-2}[\Gamma(m_\alpha), \Gamma(M_\alpha)] \times \\ & \times \left[\int_e^{\infty} t^{\alpha-1} \ln t \exp[-t] dt \int_0^1 t^{\alpha-1} \exp[-t] dt \right]_{\alpha=\bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

Теперь в первом интеграле отбросим множитель $\ln t > 1$:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d\mathcal{G}_{1,\alpha,1}(1)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\bar{\alpha}} \geq \max^{-2}[\Gamma(m_\alpha), \Gamma(M_\alpha)] \times \\ & \times \left[\int_e^{\infty} t^{\alpha-1} \exp[-t] dt \int_0^1 t^{\alpha-1} \exp[-t] dt \right]_{\alpha=\bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

Интегралы, стоящие в правой части (10), представляют собой верхнюю и нижнюю неполные гамма-функции соответственно. Исследуем свойства этих функций. Обозначим

$$g_1(\alpha) = \int_e^{\infty} t^{\alpha-1} \exp[-t] dt.$$

Дифференцируя, получаем

$$g_1'(\alpha) = \int_e^{\infty} t^{\alpha-1} \ln t \exp[-t] dt.$$

Несложно заметить, что подынтегральное выражение положительно на интервале $t \in (e, \infty)$ при любых значениях α . Следовательно, $g_1(\alpha)$ строго возрастает. Аналогично можно убедиться в том, что

$$g_2(\alpha) = \int_0^1 t^{\alpha-1} \exp[-t] dt$$

представляет собой строго убывающую функцию от α .

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d\mathcal{G}_{1,\alpha,1}(1)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\bar{\alpha}} \geq \\ & \geq \gamma(1, M_\alpha) \Gamma(e, m_\alpha) \max^{-2}[\Gamma(m_\alpha), \Gamma(M_\alpha)]. \end{aligned}$$

Объединив последнее неравенство с (10), получаем

$$\begin{aligned} & \rho(F_{p,\alpha_1,\alpha_2}, \mathcal{G}_{1,\alpha_1,1}) \geq \\ & \geq (1-p) |\alpha_1 - \alpha_2| \frac{\gamma(1, M_\alpha) \Gamma(e, m_\alpha)}{\max[\Gamma^2(m_\alpha), \Gamma^2(M_\alpha)]}. \end{aligned}$$

Следовательно, если выполнено (9), то

$$(1-p) |\alpha_1 - \alpha_2| \leq \frac{\max[\Gamma^2(m_\alpha), \Gamma^2(M_\alpha)]}{\gamma(1, M_\alpha) \Gamma(e, m_\alpha)} \varepsilon. \quad \square$$

Установим теперь аналогичное утверждение для масштабного параметра σ . Для этого рассмотрим контаминационную модель Тьюки по σ :

$$F_{p,\sigma_1,\sigma_2} = p\mathcal{G}_{1,1,\sigma_1}(x) + (1-p)\mathcal{G}_{1,1,\sigma_2}(x).$$

Теорема 3. Пусть $p \in (0, 1]$, $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, +\infty)$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\rho(F_{p,\sigma_1,\sigma_2}, \mathcal{G}_{1,1,\sigma_1}) \leq \varepsilon. \quad (11)$$

Тогда для параметров p, σ_1, σ_2 выполнено соотношение

$$(1-p) |\sigma_1 - \sigma_2| < 1.85 \varepsilon.$$

Доказательство. Аналогично (7) и (8) имеем

$$\begin{aligned} & \rho(F_{p,\sigma_1,\sigma_2}, \mathcal{G}_{1,1,\sigma_1}) \geq (1-p) |\mathcal{G}_{1,1,\sigma_1}(1) - \mathcal{G}_{1,1,\sigma_2}(1)| = \\ & = |\sigma_1 - \sigma_2| \left. \frac{d\mathcal{G}_{1,1,\sigma}(1)}{d\sigma} \right|_{\sigma=\bar{\sigma}} \quad (12) \end{aligned}$$

для некоторого $\bar{\sigma}$. Установим нижнюю границу для производной в правой части (12):

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{G}_{1,1,\sigma}(1)}{d\sigma} \right|_{\sigma=\bar{\sigma}} &= \frac{1}{\Gamma(1)} \left[\frac{d}{d\sigma} \gamma(1, \sigma^{-1}) \right]_{\sigma=\bar{\sigma}} = \\ &= \left[\frac{d}{d\sigma} \int_0^{\sigma^{-1}} \exp[-t] dt \right]_{\sigma=\bar{\sigma}} = \\ &= \left[\frac{d}{d\sigma} (-\exp[-\sigma^{-1}] + 1) \right]_{\sigma=\bar{\sigma}} = \left[\frac{\exp[-\sigma^{-1}]}{\sigma^2} \right]_{\sigma=\bar{\sigma}}. \end{aligned}$$

Функция, стоящая в квадратных скобках в последнем выражении, принимает максимальное значение при $\sigma = 0,5$. Следовательно,

$$\left. \frac{d\mathcal{G}_{1,1,\sigma}(1)}{d\sigma} \right|_{\sigma=\bar{\sigma}} \geq \frac{4}{e^2}.$$

Объединив последнее неравенство с (12), получаем

$$\rho(F_{p,\sigma_1,\sigma_2}, \mathcal{G}_{1,1,\sigma_1}) \geq (1-p)|\sigma_1 - \sigma_2| \frac{4}{e^2}.$$

Следовательно, если выполнено (11), то

$$(1-p)|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \frac{e^2}{4} \varepsilon < 1,85\varepsilon. \quad \square$$

Рассмотрим далее один полезный вид обобщения приведенных выше теорем. Так, рассмотрим две контаминационные смеси с различными смешивающими параметрами p и q :

$$\begin{aligned} F_{p,\beta_1,\beta_2} &= p\mathcal{G}_{\beta_1,1,1}(x) + (1-p)\mathcal{G}_{\beta_2,1,1}(x), \\ F_{q,\beta_1,\beta_2} &= q\mathcal{G}_{\beta_1,1,1}(x) + (1-q)\mathcal{G}_{\beta_2,1,1}(x), \end{aligned}$$

где $p, q \in [0, 1]$ и $\beta_1, \beta_2 \in (0, M_\beta]$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \rho(F_{p,\beta_1,\beta_2}, F_{q,\beta_1,\beta_2}) &= \\ &= |p - q| \sup_x |\mathcal{G}_{\beta_1,1,1}(x) - \mathcal{G}_{\beta_2,1,1}(x)|. \end{aligned}$$

Поэтому, повторяя логику доказательства теорем 1–3, можно получить следующие результаты.

Утверждение 2. Пусть $p, q \in [0, 1]$, $\beta_1, \beta_2 \in (0, M_\beta]$ для некоторой положительной константы M_β и для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\rho(F_{p,\beta_1,\beta_2}, F_{q,\beta_1,\beta_2}) \leq \varepsilon.$$

Тогда для параметров p, q, β_1, β_2 выполнено соотношение

$$|p - q| |\beta_1 - \beta_2| \leq \frac{\exp[2M_\beta]}{2^{M_\beta} \ln 2} \varepsilon.$$

Утверждение 3. Пусть $p, q \in [0, 1]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [m_\alpha, M_\alpha]$ для некоторых $M_\alpha > m_\alpha > 0$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\rho(F_{p,\alpha_1,\alpha_2}, F_{q,\alpha_1,\alpha_2}) \leq \varepsilon.$$

Тогда для параметров p, q, α_1, α_2 выполнено соотношение

$$|p - q| |\alpha_1 - \alpha_2| \leq \frac{\max[\Gamma^2(m_\alpha), \Gamma^2(M_\alpha)]}{\gamma(1, M_\alpha) \Gamma(e, m_\alpha)} \varepsilon,$$

где через $\gamma(s, x)$ и $\Gamma(s, x)$ обозначены нижняя и верхняя неполная гамма-функция.

Утверждение 4. Пусть $p, q \in [0, 1]$, $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, +\infty)$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\rho(F_{p,\sigma_1,\sigma_2}, F_{q,\sigma_1,\sigma_2}) \leq \varepsilon.$$

Тогда для параметров p, q, σ_1, σ_2 выполнено соотношение

$$|p - q| |\sigma_1 - \sigma_2| < 1,85\varepsilon.$$

5 Обратная задача устойчивости: метрика Леви

Утверждения, подобные установленным в теоремах 1–3, можно получить также и в терминах метрики Леви L . Для этого достаточно воспользоваться неравенством ([18], с. 107)

$$\rho(F, G) \leq (1 + \sup_x p_X(x)) L(F, G),$$

где $F(x), G(x)$ — функции распределения с.в. X и Y , а p_X — плотность (ограниченная) величины X .

Таким образом, чтобы перейти к метрике Леви в теоремах 1–3, необходимо определить значение $\sup_x p_{X_i}(x)$ для $X_1 \sim \mathcal{G}_{\beta,1,1}$, $X_2 \sim \mathcal{G}_{1,\alpha,1}$ и $X_3 \sim \mathcal{G}_{1,1,\sigma}$, что и будет сделано в следующих трех утверждениях.

Утверждение 5. Если $v \in [1, +\infty)$, то

$$\sup_x \frac{d}{dx} \mathcal{G}_{\beta,1,1}(x) \leq 1.$$

Доказательство. Найдем выражение для плотности с параметрами $(\beta, 1, 1)$:

$$\frac{d}{dx} \mathcal{G}_{\beta,1,1}(x) = \beta x^{\beta-1} \exp[-x^\beta].$$

Исследуем поведение данной функции:

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathcal{G}_{\beta,1,1}(x) = \beta \exp[-x^\beta] x^{\beta-2} [\beta - 1 - x^\beta].$$

Следовательно, так как $\beta \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sup_x \frac{d}{dx} \mathcal{G}_{\beta,1,1}(x) &= \mathcal{G}_{\beta,1,1}((\beta-1)^{1/\beta}) = \\ &= \beta(\beta-1)^{(\beta-1)/\beta} \exp[1-\beta]. \end{aligned}$$

Найдем теперь максимум данного выражения при $\beta \geq 1$. Для этого вычислим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \ln \mathcal{G}_{\beta,1,1}((\beta-1)^{1/\beta}) &= \\ &= \beta^{-2} [-\beta^3 + \beta^2 + 2\beta + \ln(\beta-1)]. \end{aligned}$$

Выражение в скобках обращается в нуль в точках $\beta_1 \in (1,4, 1,5)$ и $\beta_2 = 2$, при этом β_1 — локальный минимум, а β_2 — локальный максимум функции $\mathcal{G}_{\beta,1,1}((\beta-1)^{1/\beta})$. Более того, данная функция убывает на отрезке $[1, \beta_1]$. Поэтому

$$\begin{aligned} \max_{\beta \in [1, +\infty)} \mathcal{G}_{\beta,1,1}((\beta-1)^{1/\beta}) &= \\ &= \max_{\beta \in \{1,2\}} \mathcal{G}_{\beta,1,1}((\beta-1)^{1/\beta}) = \\ &= \mathcal{G}_{\beta,1,1}((\beta-1)^{1/\beta}) \Big|_{\beta=1} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание. При $\beta \in (0, 1)$ $\sup_x (d/dx) \mathcal{G}_{\beta,1,1}(x) = +\infty$.

Утверждение 6. Если $\alpha \in [1, M_\alpha]$ для некоторого положительного M_α , то

$$\sup_x \frac{d}{dx} \mathcal{G}_{1,\alpha,1}(x) \leq \max \left[1, \left(\frac{M_\alpha - 1}{e} \right)^{M_\alpha - 1} \right].$$

Доказательство. Найдем выражение для плотности с параметрами $(1, \alpha, 1)$:

$$\frac{d}{dx} \mathcal{G}_{1,\alpha,1}(x) = x^{\alpha-1} \exp[-x].$$

Исследуем поведение данной функции:

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathcal{G}_{1,\alpha,1}(x) = x^{\alpha-2} \exp[-x] (\alpha - 1 - x).$$

Следовательно, так как $\alpha \geq 1$,

$$\sup_x \frac{d}{dx} \mathcal{G}_{1,\alpha,1}(x) = \mathcal{G}_{1,\alpha,1}(\alpha - 1) = \left(\frac{\alpha - 1}{e} \right)^{\alpha - 1}.$$

Данная функция убывает на отрезке $[1, 1/e + 1]$ и далее возрастает. Поэтому

$$\begin{aligned} \max_{\beta \in [1, M_\beta]} \mathcal{G}_{1,\alpha,1}(\alpha - 1) &= \max_{\beta \in \{1, M_\alpha\}} \mathcal{G}_{1,\alpha,1}(\alpha - 1) = \\ &= \max \left[1, \left(\frac{M_\alpha - 1}{e} \right)^{M_\alpha - 1} \right]. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание. При $\alpha \in (0, 1)$ $\sup_x \frac{d}{dx} \mathcal{G}_{1,\alpha,1}(x) = +\infty$.

Утверждение 7. Если $\sigma \in [m_\sigma, +\infty]$ для некоторого положительного m_σ , то

$$\sup_x \frac{d}{dx} \mathcal{G}_{1,1,\sigma}(x) \leq m_\sigma^{-1}.$$

Доказательство. Найдем выражение для плотности с параметрами $(1, 1, \sigma)$:

$$\frac{d}{dx} \mathcal{G}_{1,1,\sigma}(x) = \sigma^{-1} \exp[-x\sigma^{-1}].$$

Очевидно, что

$$\sup_x \frac{d}{dx} \mathcal{G}_{1,1,\sigma}(x) = \mathcal{G}_{1,1,\sigma}(0) = \sigma^{-1} \leq m_\sigma^{-1}. \quad \square$$

Заметим теперь, что если определить с.в. U_{p,β_1,β_2} , $p \in [0, 1]$, как принимающую значения β_1 с вероятностью p и β_2 с вероятностью $1 - p$, то из определения метрики Леви следует, что

$$L(U_{p,\beta_1,\beta_2}, \beta_1) = \min[(1-p), |\beta_1 - \beta_2|].$$

И, следовательно,

$$\begin{aligned} L^2(U_{p,\beta_1,\beta_2}, \beta_1) &= \\ &= \min^2[(1-p), |\beta_1 - \beta_2|] \leq (1-p)|\beta_1 - \beta_2|. \end{aligned}$$

В объединении с теоремами 1–3 и утверждениями 5–7 это приводит к следующим теоремам.

Теорема 4. Пусть $p \in (0, 1)$, $\beta_1, \beta_2 \in [1, M_\beta]$ для некоторой положительной константы M_β и для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$L(F_{p,\beta_1,\beta_2}, \mathcal{G}_{\beta_1,1,1}) \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$L^2(U_{p,\beta_1,\beta_2}, \beta_1) \leq \frac{\exp[2M_\beta]}{2^{M_\beta+1} \ln 2} \varepsilon.$$

Теорема 5. Пусть $p \in (0, 1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [m_\alpha, M_\alpha]$ для некоторых $M_\alpha > m_\alpha \geq 1$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$L(F_{p,\alpha_1,\alpha_2}, \mathcal{G}_{1,\alpha_1,1}) \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned} L^2(U_{p,\alpha_1,\alpha_2}, \alpha_1) &\leq \\ &\leq \max[\Gamma^2(m_\alpha), \Gamma^2(M_\alpha)] / \left(\gamma(1, M_\alpha) \Gamma(e, m_\alpha) \left(1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \max \left[1, ((M_\alpha - 1)/e)^{M_\alpha - 1} \right] \right) \right) \varepsilon, \end{aligned}$$

где через $\gamma(s, x)$ и $\Gamma(s, x)$ обозначены нижняя и верхняя неполная гамма-функция.

Теорема 6. Пусть $p \in (0, 1]$, $\sigma_1, \sigma_2 \in [m_\sigma, +\infty)$ для некоторой константы $m_\sigma > 0$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$L(F_{p, \sigma_1, \sigma_2}, \mathcal{G}_{1, 1, \sigma_1}) \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$L^2(U_{p, \sigma_1, \sigma_2}, \sigma_1) < 1.85 \frac{m_\sigma}{m_\sigma + 1} \varepsilon.$$

Литература

1. Батракова Д. А., Королев В. Ю., Шоргин С. Я. Новый метод вероятностно-статистического анализа информационных потоков в телекоммуникационных сетях // Информатика и её применения, 2007. Т. 1. Вып. 1. С. 40–53.
2. Назаров А. Л., Королев В. Ю. Разделение смесей вероятностных распределений при помощи сеточных методов моментов и максимального правдоподобия // Автоматика и телемеханика, 2010. Вып. 3. С. 98–116.
3. Stacy E. W. A generalization of the gamma distribution // Ann. Math. Statistics, 1962. Vol. 33. P. 1187–1192.
4. Van Parr B., Webster J. A method for discriminating between failure density function used in reliability predictions // Technometrics, 1965. Vol. 7. P. 1–10.
5. Farewell V., Prentice R. A study of distributional shape in life testing // Technometrics, 1977. Vol. 19. P. 69–76.
6. Basu A., Manning W. G. Issues for the next generation of health care analyses // Medical Care, 2009. Vol. 47. P. 109–114.
7. Pham T., Almhana J. The generalized gamma distribution: its hazard rate and stress-strength model // IEEE Transactions Reliability, 1995. Vol. 44. P. 392–397.
8. Chang J. H., Shin J. W., Kim N. S., Mitra S. K. Image probability distribution based on generalized gamma function // IEEE Signal Proc. Lett., 2005. Vol. 12(4). P. 325–328.
9. Shin J. W., Chang J. H., Kim N. S. Statistical modeling of speech signals based on generalized gamma function // IEEE Signal Processing Letters, 2005. Vol. 12(3). P. 258–261.
10. Li H.-C., Hong W., Wu Y.-R. Generalized gamma distribution with MoLC estimation for statistical modeling of SAR images // Asian and Pacific Conference on SAR Proceedings. — Huangshan, China, 2007. P. 525–528.
11. Li H.-C., Hong W., Wu Y.-R., Fan P.-Z. An efficient and flexible statistical model based on generalized gamma distribution for amplitude SAR images // IEEE Transactions on Geosci. Remote Sens., 2010. Vol. 48. P. 2711–2722.
12. Kleiber C., Kotz S. Statistical size distributions in economics and actuarial sciences. — New York: Wiley, 2003.
13. Tukey J. W. A survey of sampling from contaminated distributions // Contributions to probability and statistics. Essays in honor of Harold Hotelling / Eds. I. Olkin, S. G. Ghurye, W. Hoeffding, W. G. Madow, H. B. Mann. — Stanford: Stanford University Press, 1960. P. 448–485.
14. Королев В. Ю. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Проспект, 2006.
15. Королев В. Ю. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. — М.: ИПИ РАН, 2007. 363 с.
16. Hall P. On measures of the distance of a mixture from its parent distribution // Stochastic Proc. Appl., 1979. Vol. 8. P. 357–365.
17. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. — М.: Наука, 1979.
18. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. — М.: Наука, 1986.

О ТОЧНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПУАССОНОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ СУММ*

Ю. С. Нефедова¹, И. Г. Шевцова²

Аннотация: Построены двусторонние оценки для константы в неравенстве Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными моментами порядка $2 + \delta$, где $\delta \in (0, 1]$. Нижние оценки получены впервые. Для случая $0 < \delta < 1$ уточнены верхние оценки и доказаны неравномерные оценки.

Ключевые слова: центральная предельная теорема; пуассоновские случайные суммы; неравенство Берри–Эссеена; абсолютная постоянная; неравномерные оценки

1 Введение

Пусть X_1, X_2, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что

$$EX_1 \equiv \mu, \quad DX_1 \equiv \sigma^2 > 0, \quad E|X_1|^3 \equiv \beta_3 < \infty. \quad (1)$$

Обозначим \mathcal{F}_3 класс всех функций распределения F случайной величины X_1 , для которых справедливы условия (1). Пусть N_λ — случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Предположим, что при каждом $\lambda > 0$ случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \dots$ независимы. Рассмотрим пуассоновскую случайную сумму

$$S_\lambda = X_1 + \dots + X_{N_\lambda}.$$

Для определенности полагаем, что $S_\lambda = 0$ при $N_\lambda = 0$. Несложно видеть, что

$$ES_\lambda = \lambda\mu, \quad DS_\lambda = \lambda(\mu^2 + \sigma^2).$$

Функцию распределения стандартизированной пуассоновской случайной суммы

$$\tilde{S}_\lambda \equiv \frac{S_\lambda - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}}$$

обозначим $F_\lambda(x)$. Всюду далее для определенности полагаем, что функция распределения непрерывна слева.

Задаче изучения точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм, так называемых обобщенных пуассоновских распределений, посвящена обширная литература (см., например, библиографию в книгах [1, 2]). Большой интерес к данной задаче обусловлен тем, что пуассоновские случайные суммы являются «накопленными» значениями маркированного пуассоновского процесса, который, как отмечено в указанных книгах, может быть интерпретирован как абсолютно хаотическое случайное блуждание с дискретным временем. Подобные модели традиционно широко используются в теории массового обслуживания при анализе информационных и телекоммуникационных систем, в теории управления запасами, страховой математике и других областях.

Известно, что для приведенных выше условий (1) на моменты случайной величины X_1 справедливо неравенство Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм: существует абсолютная положительная и конечная постоянная C такая, что

$$\rho(F_\lambda, \Phi) \equiv \sup_x |F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq CL_\lambda^3, \quad (2)$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция стандартного нормального распределения; L_λ^3 — нецентральная ляпуновская дробь:

$$L_\lambda^3 = \frac{\beta_3}{(\mu^2 + \sigma^2)^{3/2} \sqrt{\lambda}}.$$

* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 08-01-00563, 08-01-00567, 08-07-00152 и 09-07-12032-офи-м), а также Министерством образования и науки РФ (грант МК-581.2010.1, государственные контракты П1181, П958, П779 и 16.740.11.0133 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы»).

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, julia_n@inbox.ru

²Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, ishevtsova@cs.msu.ru

Неравенство (2) имеет интересную историю. По-видимому, впервые это неравенство было доказано в работе [3] и опубликовано в статье [4] с $C = 2,23$ (диссертация [3] не опубликована, в то время как в статье [4] не было приведено доказательство этого результата). Позднее с использованием традиционной техники, основанной на неравенстве сглаживания Эссеена, эта оценка была доказана в работе [5] с $C = 2,21$.

В работе [6] с использованием свойства безграничной делимости обобщенных пуассоновских распределений и оценки абсолютной постоянной в классическом неравенстве Берри–Эссеена для сумм неслучайного числа независимых случайных величин, полученной Ван Биком [7], было показано, что в (2) $C \leq 0,8$. Не будучи знакомыми с этой работой Михеля, авторы статьи [8], применив уточненное неравенство сглаживания Эссеена, получили оценку $C \leq 1,99$. Из метода доказательства, использованного в работе Михеля, вытекает, что если для абсолютной постоянной C_0 в классическом неравенстве Берри–Эссеена известна оценка $C_0 \leq M$, то неравенство (2) справедливо с $C = M$. На это обстоятельство также обратили внимание авторы работы [9], в которой независимо от [6] получен тот же результат, но с другой, лучшей на тот момент времени, текущей оценкой $M = 0,7655$.

Как показано в работах [10, 11], наилучшая на сегодняшний день оценка абсолютной постоянной в классическом неравенстве Берри–Эссеена имеет вид $C_0 \leq 0,4784$. Поэтому, следуя логике авторов работ [6, 9], можно заключить, что неравенство (2) справедливо с $C = 0,4784$.

Однако в тех же работах [10, 11] показано, что на самом деле привязка оценки константы C в (2) к оценке абсолютной постоянной в классическом неравенстве Берри–Эссеена C_0 менее жесткая. А именно, несмотря на то что, как уже говорилось, наилучшая на сегодняшний день верхняя граница для C_0 равна 0,4784, неравенство (2) справедливо с $C = 0,3041$ [10, 11].

Тем не менее, несмотря на более чем тридцатилетнюю историю существования неравенства (2), нижние оценки для C пока найдены не были, и в этой работе приводятся впервые. Кроме того, будут построены неравномерные оценки, уточняющие оценки Михеля [6] для случая существования третьих моментов слагаемых, и впервые приведены неравномерные оценки для случая существования моментов порядка, меньшего трех. При этом попутно уточняются приведенные в работах [12, 13] константы в неравномерных оценках точности нормальной аппроксимации для распределений сумм детерминированного числа слагаемых.

2 Нижняя оценка для абсолютной константы в неравенстве Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм

В терминах, введенных в работе [14], определим верхнюю асимптотически правильную постоянную

$$\bar{C}_{\text{ан}} = \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_3} \frac{\rho(F_\lambda, \Phi)}{L_\lambda^3}.$$

Символом $\stackrel{d}{=}$ будет обозначаться совпадение распределений.

Теорема 1. Для константы C в неравенстве (2) справедлива оценка

$$C \geq \bar{C}_{\text{ан}} \geq \frac{1}{2} \sup_{\gamma > 0} \sqrt{\gamma} e^{-\gamma} I_0(\gamma) = 0,2344 \dots,$$

где $I_0(\gamma)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка

$$I_0(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma/2)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину X_1 :

$$\begin{aligned} P(X_1 = -1) &= P(X_1 = 1) = p, \\ P(X_1 = 0) &= 1 - 2p, \quad 0 < p \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \mu \equiv EX_1 &= 0, \quad \sigma^2 \equiv DX_1 = 2p, \quad \beta_3 \equiv E|X_1|^3 = 2p, \\ L_\lambda^3 &\equiv \frac{\beta_3}{\sigma^3 \sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2p\lambda}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что для верхней асимптотически правильной постоянной $\bar{C}_{\text{ан}}$ справедлива оценка

$$\bar{C}_{\text{ан}} \geq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{0 < p \leq 1/2} \sqrt{2\lambda p} \rho(F_\lambda, \Phi). \quad (3)$$

Функцию распределения $F_\lambda(x)$ пуассоновской случайной суммы \tilde{S}_λ с использованием формулы полной вероятности можно представить в виде:

$$F_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} F_n(x),$$

где $F_n(x)$ — функция распределения $S_n = (X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{2\lambda p}$, а $F_0(x)$ — функция распределения с единичным скачком в нуле. В силу симметрии рассматриваемого трехточечного распределения X_1 справедливо соотношение $S_n \stackrel{d}{=} -S_n$, а следовательно, для всех $n \geq 1$

$$F_n(0) = P(S_n < 0) = \frac{1 - P(S_n = 0)}{2}, \quad F_0(0) = 0.$$

Учитывая вышесказанное, для $\rho(F_\lambda, \Phi)$ получаем:

$$\begin{aligned} \rho(F_\lambda, \Phi) &\equiv \sup_x |F_\lambda(x) - \Phi(x)| \geq \\ &\geq |F_\lambda(0) - \Phi(0)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} F_n(0) - \frac{1}{2} \right| = \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \left(F_n(0) - \frac{1}{2} \right) \right| = \\ &= \left| e^{-\lambda} \left(F_0(0) - \frac{1}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \left(F_n(0) - \frac{1}{2} \right) \right| = \\ &= \left| \frac{-e^{-\lambda}}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \frac{P(S_n = 0)}{2} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} P(S_n = 0) \right) = \frac{1}{2} \left(e^{-\lambda} + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{k!k!(n-2k)!} p^{2k} (1-2p)^{n-2k} \Big) = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} (1-2p)^n + \right. \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{(n-2)!} \frac{p^2 (1-2p)^{n-2}}{1!1!} + \\ &+ \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{(n-4)!} \frac{p^4 (1-2p)^{n-4}}{2!2!} + \dots \Big) = \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-2p))^n}{n!} + \right. \\ &+ \frac{(\lambda p)^2}{1!1!} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda(1-2p))^{n-2}}{(n-2)!} + \\ &+ \frac{(\lambda p)^4}{2!2!} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(\lambda(1-2p))^{n-4}}{(n-4)!} + \dots \Big) = \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda p)^{2k}}{(k!)^2} e^{\lambda(1-2p)} = \frac{1}{2} e^{-2\lambda p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda p)^{2k}}{(k!)^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, можно продолжить цепочку неравенств (3) следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{C}_{\text{ап}} &\geq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{0 < p \leq 1/2} \sqrt{2\lambda p} \rho(F_\lambda, \Phi) \geq \\ &\geq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{0 < p \leq 1/2} \frac{1}{2} e^{-2\lambda p} \sqrt{2\lambda p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda p)^{2k}}{(k!)^2}. \end{aligned}$$

Пусть $p = \gamma/(2\lambda)$, $0 < \gamma \leq \lambda$, тогда окончательно получаем

$$\begin{aligned} \overline{C}_{\text{ап}} &\geq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{0 < \gamma \leq \lambda} \frac{1}{2} e^{-\gamma} \sqrt{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma/2)^{2k}}{(k!)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sup_{\gamma > 0} \sqrt{\gamma} e^{-\gamma} I_0(\gamma) = 0,2344 \dots, \end{aligned}$$

причем супремум достигается в точке $\gamma \approx 0,79$. Теорема доказана.

3 Аналог неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм слагаемых с моментами порядка $2 + \delta$

Теперь предположим, что последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots удовлетворяет следующим моментным условиям:

$$\left. \begin{aligned} EX_1 &\equiv \mu, \quad DX_1 \equiv \sigma^2 > 0; \\ E|X_1|^{2+\delta} &\equiv \beta_{2+\delta} < \infty \end{aligned} \right\} \quad (1^*)$$

с некоторым $\delta \in (0, 1)$. Обозначим $\mathcal{F}_{2+\delta}$ множество всех функций распределения F случайной величины X_1 , удовлетворяющих условиям (1*). Нецентральная ляпуновская дробь в этом случае определяется выражением:

$$L_\lambda^{2+\delta} = \frac{\beta_{2+\delta}}{(\mu^2 + \sigma^2)^{1+\delta/2} \lambda^{\delta/2}}.$$

3.1 Вспомогательные результаты

Лемма 1. Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным абсолютным моментом порядка $2 + \delta$. Тогда существует конечная положительная абсолютная постоянная $C(\delta)$ такая, что для всех $n \geq 1$ справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} \sup_x \left| P \left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| &\leq \\ &\leq \frac{C(\delta)(E|\xi_1|^{2+\delta} + 1)}{n^{\delta/2}}, \end{aligned}$$

Таблица 1 Двусторонние оценки $C(\delta)$ для некоторых δ

δ	$C(\delta) \leq$	$C(\delta) \geq$
1,0	0,3041	0,2344
0,9	0,3089	0,2383
0,8	0,3187	0,2446
0,7	0,3334	0,2534
0,6	0,3538	0,2651
0,5	0,3775	0,2803
0,4	0,4080	0,3000
0,3	0,4450	0,3257
0,2	0,4901	0,3603
0,1	0,5451	0,4097

причем для константы $C(\delta)$ справедливы верхние оценки, приведенные в табл. 1.

Доказательство содержится в работе [15] для случая $\delta \in (0, 1)$ и [10, 11] для $\delta = 1$.

Обозначим

$$\nu = \frac{\lambda}{n}.$$

Лемма 2 (см. [2, 16]). При условиях (1^*) для любого натурального $n \geq 1$

$$\tilde{S}_\lambda \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Z_{\nu,k},$$

где при каждом n случайные величины $Z_{\nu,1}, \dots, Z_{\nu,n}$ независимы и одинаково распределены. Более того, $E Z_{\nu,1} = 0$, $E Z_{\nu,1}^2 = 1$ и при всех $n \geq \lambda$

$$E|Z_{\nu,1}|^{2+\delta} \leq \frac{\beta_{2+\delta}(1+40\nu)}{(\mu^2 + \sigma^2)^{1+\delta/2}} \left(\frac{n}{\lambda}\right)^{\delta/2}. \quad (4)$$

3.2 Верхние оценки

В данном разделе доказывается аналог неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм слагаемых с моментами порядка $2 + \delta$. Аналогичный результат получен в работе [16], однако он справедлив лишь в асимптотическом смысле, когда ляпуновская дробь $L_\lambda^{2+\delta}$ бесконечно мала. А именно, в [16] была найдена мажоранта не абсолютной, но асимптотически правильной константы:

$$\limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{\lambda, F: L_\lambda^{2+\delta} = \ell} \frac{\rho(F_\lambda, \Phi)}{\ell}.$$

Следующее утверждение исправляет неточность, допущенную в одном из результатов упомянутой работы и повлиявшую на окончательный результат.

Теорема 2. При условиях (1^*) для любого $\lambda > 0$ справедливо неравенство:

$$\rho(F_\lambda, \Phi) \equiv \sup_x |F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C(\delta)\beta_{2+\delta}}{(\mu^2 + \sigma^2)^{1+\delta/2}\lambda^{\delta/2}}, \quad (5)$$

где $C(\delta)$ та же, что и в лемме 1.

Доказательство. Из леммы 2 вытекает, что для любого целого $n \geq 1$

$$\rho(F_\lambda, \Phi) = \sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Z_{\nu,k} < x\right) - \Phi(x) \right|.$$

Следовательно, по лемме 1 для произвольного целого $n \geq 1$ имеем:

$$\rho(F_\lambda, \Phi) \leq C(\delta) \frac{E|Z_{\nu,1}|^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} + \frac{C(\delta)}{n^{\delta/2}}. \quad (6)$$

Пусть теперь $n \geq \lambda$. Тогда, используя оценку (4), в продолжение (6) получаем неравенство:

$$\rho(F_\lambda, \Phi) \leq C(\delta) \frac{\beta_{2+\delta}(1+40\lambda/n)}{(\mu^2 + \sigma^2)^{1+\delta/2}\lambda^{\delta/2}} + \frac{C(\delta)}{n^{\delta/2}}.$$

Так как здесь $n \geq \lambda$ произвольно, устремляя $n \rightarrow \infty$, окончательно получаем:

$$\rho(F_\lambda, \Phi) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[C(\delta) \frac{\beta_{2+\delta}(1+40\lambda/n)}{(\mu^2 + \sigma^2)^{1+\delta/2}\lambda^{\delta/2}} + \frac{C(\delta)}{n^{\delta/2}} \right] = \frac{C(\delta)\beta_{2+\delta}}{(\mu^2 + \sigma^2)^{1+\delta/2}\lambda^{\delta/2}},$$

что и требовалось доказать.

3.3 Нижние оценки

В терминах, введенных в работе [14], определим верхнюю асимптотически правильную постоянную для $\delta \in (0, 1)$:

$$\overline{C}_{\text{ан}}(\delta) = \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}} \frac{\rho(F_\lambda, \Phi)}{L_\lambda^{2+\delta}}.$$

Теорема 3. Для константы $C(\delta)$ в неравенстве (5) справедлива нижняя оценка

$$C(\delta) \geq \overline{C}_{\text{ан}}(\delta) \geq \frac{1}{2} \sup_{\gamma > 0} \gamma^{\delta/2} e^{-\gamma} I_0(\gamma),$$

где $I_0(\gamma)$ — модифицированная функция Бесселя

$$I_0(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma/2)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Конкретные значения минорант $C(\delta)$ для некоторых δ приведены в табл. 1 в третьем столбце.

4 Неравномерные оценки точности нормальной аппроксимации для обобщенных пуассоновских распределений

Данный раздел предварим одним вспомогательным утверждением, устанавливающим неравномерную оценку скорости сходимости для сумм детерминированного числа случайных слагаемых.

Пусть $\delta \in (0, 1]$. Обозначим $S_n = X_1 + \dots + X_n$,

$$G_n(x) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = F^{*n}(n\mu + \sigma x\sqrt{n}),$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия (1*). Тогда для произвольного целого $n \geq 1$ справедлива неравномерная оценка:

$$|G_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{K(\delta)}{n^{\delta/2}} \frac{E|X_1 - \mu|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}(1 + |x|^{2+\delta})}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $K(\delta)$ зависит только от δ .

Данное утверждение доказано Нагаевым [17] для случая $\delta = 1$ и Бикялисом [18] для случая произвольного $\delta \in (0, 1]$.

Используя метод вычисления абсолютной константы в неравномерном аналоге неравенства Берри–Эссеена (неравенстве Нагаева–Бикялиса, см. лемму 3), описанный Падицем [19], с учетом новых оценок для абсолютной константы $C_0(\delta)$ в классическом неравенстве Берри–Эссеена, полученных в работах [10, 11] для $\delta = 1$ ($C_0(1) \leq 0,4784$) и в [15] для $0 < \delta < 1$ ($C_0(\delta)$ в данной статье не приводится), можно уточнить верхние оценки константы $K(\delta)$ в лемме 3, полученные в работе [13] и процитированные в статье [20] и книге [2]. Полученные таким

Таблица 2 Двусторонние оценки $K(\delta)$ для некоторых δ

δ	$K(\delta) \leq$	$K(\delta) \geq$
1,0	25,7984	0,0177
0,9	24,2210	0,0198
0,8	22,4063	0,0223
0,7	20,6726	0,0253
0,6	19,0089	0,0290
0,5	17,3674	0,0334
0,4	15,6802	0,0390
0,3	14,0732	0,0459
0,2	12,6421	0,0550
0,1	11,3653	0,0674

образом верхние оценки константы $K(\delta)$ приведены в табл. 2 для некоторых δ .

Замечание 1. Оценка $K(1) \leq 25,80$, приведенная в табл. 2, уточняет оценку $K(1) \leq 30,54$ из работы [12].

Замечание 2. Нижнюю оценку для константы $K(\delta)$ легко получить из нижней оценки для $\sup_x |G_n(x) - \Phi(x)|$, доказанной одним из авторов данной работы в [14] и использованной для построения миноранты нижней асимптотически правильной постоянной в оценках равномерной метрики (неравенстве Берри–Эссеена). Введем нижнюю асимптотически правильную постоянную в неравномерной оценке (неравенстве Нагаева–Бикялиса):

$$\underline{K}_{\text{ан}}(\delta) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^{2+\delta}) \times \frac{|F^{*n}(n\mu + \sigma x\sqrt{n}) - \Phi(x)|}{\ell},$$

где супремум берется по всем $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ с фиксированным значением (центральной) ляпуновской дроби

$$\frac{E|X_1 - \mu|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta} n^{\delta/2}} = \ell.$$

Тогда для константы $K(\delta)$ получаем:

$$\begin{aligned} K(\delta) &\geq \underline{K}_{\text{ан}}(\delta) \geq \\ &\geq \limsup_{\ell \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \times \\ &\times |F^{*n}(n\mu + \sigma x\sqrt{n}) - \Phi(x)| \geq \\ &\geq \sup_{h \geq 0, s > 0} \left(\frac{4}{\sqrt{2 + s^2}} \exp\left\{-\frac{h^2}{2(2 + s^2)}\right\} + \right. \\ &\left. + \frac{h^2 + s^2}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} \right) / \left(8\kappa_{2+\delta} s^{2+\delta} \times \right. \\ &\left. \times e^{-h^2/(2s^2)} {}_1F_1\left(\frac{3 + \delta}{2}, \frac{1}{2}, \frac{h^2}{2s^2}\right) \right), \end{aligned}$$

где ${}_1F_1$ — обобщенная гипергеометрическая функция (вырожденная функция Мейера):

$${}_1F_1(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)} \frac{z^k}{k!},$$

$$z > 0, \quad {}_1F_1(a, b, 0) = 1;$$

$$\kappa_{2+\delta} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2+\delta} d\Phi(x) = (1 + \delta)\Gamma\left(\frac{1 + \delta}{2}\right) \frac{2^{\delta/2}}{\sqrt{\pi}};$$

$\Gamma(\cdot)$ — Эйлера гамма-функция. Конкретные значения миноранты введенной нижней асимптотически правильной постоянной $K_{\text{ан}}(\delta)$, а следовательно, и константы $K(\delta)$, для некоторых δ приведены в табл. 2.

Вытекающее из замечания 2 утверждение о положительности нижней асимптотически правильной постоянной $K_{\text{ан}}(\delta)$ представляет особый интерес при $0 < \delta < 1$, поскольку для этого случая в работе [21] было показано, что для любой функции распределения $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ найдется ограниченная убывающая функция $\psi(u)$, $u > 0$, с пределом $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$ и такая, что

$$|G_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{\psi(\sqrt{n}(1 + |x|))}{n^{\delta/2}(1 + |x|^{2+\delta})}, \quad x \in \mathbb{R}, n \geq 1,$$

т. е. для каждого фиксированного распределения $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ величина $|G_n(x) - \Phi(x)|$ убывает быстрее, чем $n^{\delta/2}(1 + |x|^{2+\delta})$, что ставит под сомнение «правильность» (точность) оценок типа неравенства Нагаева–Бикялиса. Положительность же нижней асимптотической постоянной $K_{\text{ан}}(\delta)$ означает, что неравенство Нагаева–Бикялиса устанавливает «правильный» порядок, понимаемый в равномерном смысле.

Теорема 4. При условиях (1*) для любого $\lambda > 0$ справедливо неравенство:

$$|F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq \frac{K(\delta)L_\lambda^{2+\delta}}{1 + |x|^{2+\delta}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $K(\delta)$ та же, что и в лемме 3.

Доказательство. Из леммы 2 вытекает, что для любого целого $n \geq 1$

$$|F_\lambda(x) - \Phi(x)| = \left| \mathbb{P} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Z_{\nu,k} < x \right) - \Phi(x) \right|.$$

Следовательно, по лемме 3 для произвольного целого $n \geq 1$ имеем:

$$|F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq \frac{K(\delta)}{n^{\delta/2}} \frac{\mathbb{E}|Z_{\nu,1}|^{2+\delta}}{1 + |x|^{2+\delta}}. \quad (7)$$

Пусть теперь $n \geq \lambda$. Тогда, используя оценку (4), в продолжение (7) получаем неравенство

$$|F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq \frac{K(\delta)}{\lambda^{\delta/2}} \frac{\beta_{2+\delta}(1 + 40\lambda/n)}{(\mu^2 + \sigma^2)^{1+\delta/2}(1 + |x|^{2+\delta})}.$$

Так как здесь $n \geq \lambda$ произвольно, устремляя $n \rightarrow \infty$, окончательно получаем

$$\begin{aligned} |F_\lambda(x) - \Phi(x)| &\leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{K(\delta)}{\lambda^{\delta/2}} \frac{\beta_{2+\delta}(1 + 40\lambda/n)}{(\mu^2 + \sigma^2)^{1+\delta/2}(1 + |x|^{2+\delta})} \right] = \\ &= \frac{K(\delta)}{\lambda^{\delta/2}} \frac{\beta_{2+\delta}}{(\mu^2 + \sigma^2)^{1+\delta/2}(1 + |x|^{2+\delta})}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается и более общее утверждение.

Теорема 5. Предположим, что существует функция $Q(x)$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |F_n(x) - \Phi(x)| &= \left| \mathbb{P} \left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \\ &\leq \frac{Q(x)}{n^{\delta/2}} \frac{\mathbb{E}|X_1 - \mu|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}}. \end{aligned}$$

Тогда верна оценка:

$$\begin{aligned} |F_\lambda(x) - \Phi(x)| &= \\ &= \left| \mathbb{P} \left(\frac{S_\lambda - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \\ &\leq \frac{Q(x)}{\lambda^{\delta/2}} \frac{\mathbb{E}|X_1|^{2+\delta}}{(\mu^2 + \sigma^2)^{1+\delta/2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

с той же самой $Q(x)$.

В заключение авторы выражают признательность В. Ю. Королеву за стимулирующие дискуссии и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Bening V., Korolev V. Generalized Poisson models and their applications in insurance and finance. — Utrecht: VSP, 2002.
2. Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я. Математические основы теории риска. — М.: Физматлит, 2007.
3. Ротарь Г. В. Некоторые задачи планирования резерва. Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — М.: Центральный экономико-математический институт, 1972.
4. Ротарь Г. В. Об одной задаче управления резервами // Экономико-математические методы, 1976. Т. 12. Вып. 4. С. 733–739.
5. Von Chossy R., Rappl G. Some approximation methods for the distribution of random sums // Insurance: Mathematics and Economics, 1983. Vol. 2. No. 1. P. 251–270.
6. Michel R. On Berry–Esseen results for the compound Poisson distribution // Insurance: Mathematics and Economics, 1993. Vol. 13. No. 1. P. 35–37.
7. Van Beek P. An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry–Esseen inequality // Z. Wahrsch. verw. Geb., 1972. Bd. 23. S. 187–196.

8. *Bening V. E., Korolev V. Yu., Shorgin S. Ya.* On approximations to generalized Poisson distribution // *J. Math. Sci.*, 1997. Vol. 83. No. 3. P. 360–367.
9. *Korolev V. Yu., Shorgin S. Ya.* On the absolute constant in the remainder term estimate in the central limit theorem for Poisson random sums // *Probabilistic Methods in Discrete Mathematic: 4th International Petrozavodsk Conference Proceedings.* — Utrecht: VSP, 1997. P. 305–308.
10. *Королев В. Ю., Шевцова И. Г.* Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским случайным суммам // *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2010. Т. 17. Вып. 1. С. 25–56.
11. *Korolev V. Yu., Shevtsova I. G.* An improvement of the Berry–Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums // *Scandinavian Actuarial J.*, 2011 (in press). Online first: <http://www.informaworld.com/10.1080/03461238.2010.485370>.
12. *Michel R.* On the constant in the nonuniform version of the Berry–Esseen theorem // *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, 1981. Bd. 55. S. 109–117.
13. *Paditz L., Tysiak W.* Quantitative Auswertung einer ungleichmäßigen Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz // *Mathematiker-Kongre der DDR. Vortragsauszüge III.* — Dresden, 1990. S. 153.
14. *Шевцова И. Г.* Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри–Эссеена–Каца // *Теория вероятностей и ее применения*, 2010. Вып. 2. С. 271–304.
15. *Григорьева М. Е., Шевцова И. Г.* Уточнение неравенства Каца–Берри–Эссеена // *Информатика и её применения*, 2010. Т. 4. Вып. 2. С. 78–85.
16. *Шевцова И. Г.* О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм // *Обозрение промышленной и прикладной математики*, 2007. Т. 14. Вып. 1. С. 3–28.
17. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для больших отклонений // *Теория вероятностей и ее применения*, 1965. Т. 10. Вып. 2. С. 231–254.
18. *Бикялис А.* Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме // *Литовский математический сборник*, 1966. Т. 6. № 3. С. 323–346.
19. *Paditz L.* On the analytical structure of the constant in the nonuniform version of the Esseen inequality // *Statistics.* — Berlin: Akademie-Verlag, 1989. Vol. 20. No. 3. P. 453–464.
20. *Paditz L.* On the error-bound in the the nonuniform version of Esseen’s inequality in the L_p -metric // *Statistics.* — Berlin: Akademie-Verlag, 1996. Vol. 27. No. 3. P. 379–394.
21. *Осинов Л. В., Петров В. В.* Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме // *Теория вероятностей и ее применения*, 1967. Т. 12. Вып. 2. С. 322–329.

ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ АКТИВНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ*

В. М. Чубич¹

Аннотация: Впервые рассмотрены теоретические и прикладные аспекты проблемы активной параметрической идентификации гауссовских нелинейных дискретных систем. Рассмотрен случай вхождения подлежащих оцениванию параметров в уравнения состояния и наблюдения, начальные условия и ковариационные матрицы помех динамики и ошибок измерений. Приведены оригинальные результаты. Рассмотрен пример оптимального оценивания параметров одной модельной структуры.

Ключевые слова: оценивание параметров; метод максимального правдоподобия; планирование оптимальных входных сигналов; информационная матрица Фишера; критерий оптимальности

1 Введение

Проблема идентификации — одна из основных проблем теории и практики автоматического управления. Результаты решения задачи идентификации могут использоваться при проектировании различных систем управления подвижными и технологическими объектами, при построении прогнозирующих моделей, при конструировании следящих и измерительных систем.

По способу проведения эксперимента существующие методы идентификации можно разделить на пассивные и активные. При пассивной идентификации для построения математической модели используются реально действующие в системе сигналы и тем самым нормальный режим эксплуатации не нарушается. Методы пассивной идентификации достаточно полно описаны, например, в [1–3]. Активная идентификация, напротив, предполагает нарушение технологического режима и подачу на вход изучаемой системы специальным образом синтезированного сигнала. Его находят в результате решения экстремальной задачи для некоторого предварительно выбранного функционала от информационной (или дисперсионной) матрицы вектора оцениваемых параметров. Трудности, связанные с необходимостью нарушения технологического режима, окупаются повышением эффективности и корректности проводимых исследований. Это обусловлено самой идеологией активной идентификации, базирующейся на сочетании традиционных приемов параметрического

оценивания с концепцией планирования эксперимента [4–7].

Более определенно процедура активной параметрической идентификации систем с предварительно выбранной модельной структурой предполагает выполнение следующих этапов:

1. Вычисление оценок параметров по измерительным данным, соответствующим выбранному пробному сигналу.
2. Синтез с учетом полученных на первом этапе оценок оптимального в соответствии с некоторым критерием сигнала.
3. Пересчет оценок неизвестных параметров по измерительным данным, соответствующим полученному на втором этапе сигналу.

Целесообразность применения концепции активной идентификации при построении математических моделей стохастических стационарных линейных дискретных и непрерывно-дискретных систем показана в [8–10]. Рецензия на монографию [10] помещена в [11]. В данной статье приведены результаты дальнейших исследований автора в рамках указанной проблемы применительно к стохастическим нелинейным дискретным системам.

2 Постановка задачи

Рассмотрим следующую модель управляемой, наблюдаемой, идентифицируемой динамической системы в пространстве состояний:

* Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № П2365 от 18.11.2009 г.).

¹ Новосибирский государственный технический университет, chubich_62@ngs.ru

$$x(k+1) = f[x(k), u(k), k] + \Gamma(k)w(k), \quad (1)$$

$$y(k+1) = h[x(k+1), k+1] + v(k+1), \\ k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

где $x(k)$ — n -вектор состояния; $u(k)$ — детерминированный r -вектор управления (входа); $w(k)$ — p -вектор возмущения; $y(k+1)$ — m -вектор измерения (выхода); $v(k+1)$ — m -вектор ошибки измерения.

Предположим, что вектор-функции $f[x(k), u(k), k]$ и $h[x(k+1), k+1]$ непрерывны и дифференцируемы по $x(k)$, $u(k)$ и $x(k+1)$ соответственно; случайные векторы $w(k)$ и $v(k+1)$ образуют стационарные белые гауссовские последовательности, для которых $E[w(k)] = 0$, $E[w(k)w^T(i)] = Q\delta_{ki}$, $E[v(k+1)] = 0$, $E[v(k+1)v^T(i+1)] = R\delta_{ki}$, $E[v(k+1)w^T(i)] = 0$, $k, i = 0, 1, \dots, N-1$ (здесь и далее $E[\cdot]$ — оператор математического ожидания, δ_{ki} — символ Кронекера); начальное состояние $x(0)$ имеет нормальное распределение с параметрами $E[x(0)] = \bar{x}(0)$, $E\{[x(0) - \bar{x}(0)][x(0) - \bar{x}(0)]^T\} = P(0)$ и не коррелирует с $w(k)$ и $v(k+1)$ при любых значениях переменной k ; неизвестные параметры сведены в вектор $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$, включающий в себя элементы вектор-функций $f[x(k), u(k), k]$, $h[x(k+1), k+1]$, матриц $\Gamma(k)$, Q , R , $P(0)$ и вектора $\bar{x}(0)$ в различных комбинациях.

Необходимо для математической модели (1), (2) с учетом высказанных априорных предположений разработать процедуру активной параметрической идентификации и исследовать ее эффективность. В такой математической постановке задача рассматривается и решается впервые.

3 Линеаризация модели

Считая значение вектора неизвестных параметров Θ фиксированным, выполним линеаризацию во временной области нелинейной модели (1), (2) относительно номинальной траектории $\{x_H(k+1), k = 0, 1, \dots, N-1\}$, для которой

$$\left. \begin{aligned} x_H(k+1) &= f[x_H(k), u_H(k), k], \\ &k = 0, 1, \dots, N-1; \\ x_H(0) &= \bar{x}(0). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Разложив для каждого k вектор-функции $f[x(k), u(k), k]$ и $h[x(k+1), k+1]$ в ряды Тейлора в окрестностях точек $[x_H(k), u_H(k)]$ и $x_H(k+1)$ соответственно и отбросив члены второго и более высоких порядков, запишем уравнения линеаризованной модели

$$x(k+1) = f[x_H(k), u_H(k), k] + \\ + \frac{\partial f[x_H(k), u_H(k), k]}{\partial x(k)} [x(k) - x_H(k)] +$$

$$+ \frac{\partial f[x_H(k), u_H(k), k]}{\partial u(k)} [u(k) - u_H(k)] + \\ + \Gamma(k)w(k); \quad (4)$$

$$y(k+1) = h[x_H(k+1), k+1] + \\ + \frac{\partial h[x_H(k+1), k+1]}{\partial x(k+1)} [x(k+1) - x_H(k+1)] + \\ + v(k+1), \quad (5)$$

для которой и будем решать поставленную задачу. С учетом обозначений

$$a(k) = f[x_H(k), u_H(k), k] - \\ - \frac{\partial f[x_H(k), u_H(k), k]}{\partial x(k)} x_H(k) + \\ + \frac{\partial f[x_H(k), u_H(k), k]}{\partial u(k)} [u(k) - u_H(k)]; \quad (6)$$

$$\Phi(k) = \frac{\partial f[x_H(k), u_H(k), k]}{\partial x(k)}; \quad (7)$$

$$A(k+1) = h[x_H(k+1), k+1] - \\ - \frac{\partial h[x_H(k+1), k+1]}{\partial x(k+1)} x_H(k+1); \quad (8)$$

$$H(k+1) = \frac{\partial h[x_H(k+1), k+1]}{\partial x(k+1)} \quad (9)$$

соотношения (4), (5) определяют модель гауссовской линейной нестационарной системы, описываемой уравнениями:

$$x(k+1) = a(k) + \Phi(k)x(k) + \Gamma(k)w(k); \quad (10)$$

$$y(k+1) = A(k+1) + H(k+1)x(k+1) + v(k+1), \\ k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (11)$$

Заметим, что для нелинейностей, имеющих характеристики с угловыми точками и разрывами, можно воспользоваться методом статистической линеаризации [12, 13].

4 Оценивание неизвестных параметров

Оценивание неизвестных параметров математической модели осуществляется по данным наблюдений Ξ в соответствии с критерием идентификации χ . Сбор числовых данных происходит в процессе проведения идентификационных экспериментов, которые выполняются по некоторому плану ξ_v .

Предположим, что экспериментатор может произвести v запусков системы, причем сигнал U_1 он подает на вход системы k_1 раз, сигнал U_2 — k_2 раз

и т. д., наконец, сигнал U_q — k_q раз. В этом случае дискретный (точный) нормированный план эксперимента ξ_v представляет собой совокупность точек U_1, U_2, \dots, U_q , называемых спектром плана, и соответствующих им долей повторных запусков:

$$\xi_v = \left\{ \frac{U_1, U_2, \dots, U_q}{\frac{k_1}{v}, \frac{k_2}{v}, \dots, \frac{k_q}{v}} \right\}, \quad U_i \in \Omega_U, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Здесь $U_i^T = \{[u^i(0)]^T, [u^i(1)]^T, \dots, [u^i(N-1)]^T\}$, $i = 1, 2, \dots, q$; $\Omega_U \subset R^{Nr}$ задает ограничения на условия проведения эксперимента.

Обозначим через $Y_{i,j}$ j -ю реализацию выходного сигнала ($j = 1, 2, \dots, k_i$), соответствующую i -му входному сигналу U_i ($i = 1, 2, \dots, q$). Тогда в результате проведения по плану ξ_v идентификационных экспериментов будет сформировано множество:

$$\Xi = \{(U_i, Y_{i,j}), j = 1, 2, \dots, k_i, i = 1, 2, \dots, q\},$$

$$\sum_{i=1}^q k_i = v.$$

Уточним структуру $Y_{i,j}$:

$$Y_{i,j}^T = \{[y^{i,j}(1)]^T, [y^{i,j}(2)]^T, \dots, [y^{i,j}(N)]^T\},$$

$$j = 1, 2, \dots, k_i, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

и заметим, что в случае пассивной параметрической идентификации, как правило, $q = v = 1$.

Априорные предположения, высказанные при постановке задачи, и выполненная линеаризация моделей состояния и наблюдения относительно опорной траектории (3) позволяют воспользоваться для оценивания неизвестных параметров методом максимального правдоподобия (ММП). В соответствии с этим методом необходимо найти такие значения параметров $\hat{\Theta}$, для которых

$$\hat{\Theta} = \arg \min_{\Theta \in \Omega_\Theta} [\chi(\Theta, \Xi)] = \arg \min_{\Theta \in \Omega_\Theta} [-\ln L(\Theta, \Xi)],$$

где $\ln L(\Theta, \Xi)$ — логарифмическая функция правдоподобия.

Согласно [14, 15] в нашем случае критерий идентификации имеет следующий вид:

$$\chi(\Theta, \Xi) = \frac{Nmv}{2} \ln 2\pi +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=0}^{N-1} [\varepsilon^{i,j}(k+1)]^T [B^i(k+1)]^{-1} \times$$

$$\times [\varepsilon^{i,j}(k+1)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q k_i \sum_{k=0}^{N-1} \ln \det B^i(k+1),$$

где $\varepsilon^{i,j}(k+1) = y^{i,j}(k+1) + \hat{y}^{i,j}(k+1|k)$, а $\hat{y}^{i,j}(k+1|k)$ и $B^i(k+1)$ определяются по соответствующим ре-

куррентным уравнениям дискретного фильтра Калмана (см., например, [16]):

$$\hat{x}^{i,j}(k+1|k) = \Phi^i(k) \hat{x}^{i,j}(k|k) + a^i(k);$$

$$P^i(k+1|k) =$$

$$= \Phi^i(k) P^i(k|k) [\Phi^i(k)]^T + \Gamma(k) Q \Gamma^T(k); \quad (12)$$

$$\hat{y}^{i,j}(k+1|k) =$$

$$= H^i(k+1) \hat{x}^{i,j}(k+1|k) + A^i(k+1);$$

$$B^i(k+1) =$$

$$= H^i(k+1) P^i(k+1|k) [H^i(k+1)]^T + R; \quad (13)$$

$$K^i(k+1) =$$

$$= P^i(k+1|k) [H^i(k+1)]^T [B^i(k+1)]^{-1}; \quad (14)$$

$$\hat{x}^{i,j}(k+1|k+1) =$$

$$= \hat{x}^{i,j}(k+1|k) + K^i(k+1) \varepsilon^{i,j}(k+1);$$

$$P^i(k+1|k+1) =$$

$$= [I - K^i(k+1) H^i(k+1)] P^i(k+1|k) \quad (15)$$

для $k = 0, 1, \dots, N-1$, $j = 1, 2, \dots, k_i$, $i = 1, 2, \dots, q$ с начальными условиями $\hat{x}^{i,j}(0|0) = \bar{x}(0)$, $P(0|0) = P(0)$.

Для нахождения условного минимума $\chi(\Theta, \Xi)$ воспользуемся методом проекции градиента [17, 18], учитывая, что

$$\frac{\partial \chi(\theta)}{\partial \theta_l} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\partial \varepsilon^{i,j}(k+1)}{\partial \theta_l} \right]^T \times$$

$$\times [B^i(k+1)]^{-1} [\varepsilon^{i,j}(k+1)] -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=0}^{N-1} [\varepsilon^{i,j}(k+1)]^T [B^i(k+1)]^{-1} \times$$

$$\times \frac{\partial B^i(k+1)}{\partial \theta_l} [B^i(k+1)]^{-1} \varepsilon^{i,j}(k+1) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q k_i \sum_{k=0}^{N-1} Sp \left[[B^i(k+1)]^{-1} \frac{\partial B^i(k+1)}{\partial \theta_l} \right],$$

$$l = 1, 2, \dots, s.$$

5 Планирование оптимальных входных сигналов

Оптимальный выбор входных сигналов позволяет экспериментатору при заданном числе запусков системы подготовить наиболее информативные данные наблюдений, используемые для нахождения оценок неизвестных параметров. Отметим, что свобода в выборе входных характеристик суще-

ственно различается в зависимости от приложений. В экономических и экологических системах у экспериментатора нет возможности воздействовать на систему с целью проведения идентификационных экспериментов, в то время как в лабораторных условиях и на стадиях разработки нового оборудования выбор входных величин имеет лишь амплитудные и мощностные ограничения.

Предварим рассмотрение алгоритмов синтеза оптимальных входных сигналов изложением некоторых основополагающих понятий и результатов теории планирования эксперимента для нашего случая.

Под непрерывным нормированным планом ξ условимся понимать совокупность величин:

$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} U_1, U_2, \dots, U_q \\ p_1, p_2, \dots, p_q \end{array} \right\}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^q p_i = 1, \\ U_i \in \Omega_U, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (16)$$

Здесь $U_i^T = \{[u^i(0)]^T, [u^i(1)]^T, \dots, [u^i(N-1)]^T\}$, $i = 1, 2, \dots, q$, по аналогии с дискретным планом ξ_v , но веса p_i могут принимать любые значения в диапазоне от 0 до 1, в том числе и иррациональные. Множество планирования Ω_U определяется ограничениями на условия проведения эксперимента.

Для плана (16) нормированная информационная матрица $M(\xi)$ определяется соотношением:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^q p_i M(U_i; \theta), \quad (17)$$

в котором информационные матрицы Фишера (ИМФ) одноточечных планов

$$M(U; \theta) = -E_Y \left[\frac{\partial^2 \ln L(\Theta, \Xi)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right]$$

зависят от неизвестных параметров Θ , что позволяет в дальнейшем говорить только о локально-оптимальном планировании. В [19] приводятся выражение и алгоритм вычисления информационных матриц Фишера $M(U; \Theta)$ для модели (10), (11).

В разд. 4 были рассмотрены вопросы, связанные с оцениванием неизвестных параметров моделей стохастических нелинейных дискретных систем. Качество оценивания параметров можно повысить за счет построения плана эксперимента, оптимизирующего некоторый выпуклый функционал X от информационной матрицы $M(\xi)$, решив экстремальную задачу

$$\xi^* = \arg \min_{\xi \in \Omega_\xi} X[M(\xi)]. \quad (18)$$

Для критерия D -оптимальности $X[M(\xi)] = -\ln \det M(\xi)$, для критерия A -оптимальности $X[M(\xi)] = -SpM^{-1}(\xi)$.

Планирование эксперимента определенным образом воздействует на нижнюю границу неравенства Рао–Крамера [20]: для D -оптимального плана минимизируется объем, для A -оптимального плана — сумма квадратов длин осей эллипсоида рассеяния оценок параметров.

6 Алгоритмы численного построения оптимальных планов

В соответствии с [21] экстремальная задача поиска минимума $X[M(\xi)]$ может быть сведена к конечномерной задаче с размерностью пространства варьируемых переменных не более чем $(Nr+1)(s(s+1)/2+1)$. Ее решение можно осуществить с помощью общих методов численного поиска экстремума. При этом возможны два подхода. Первый из них (прямой) предполагает поиск минимума функционала $X[M(\xi)]$ в пространстве элементов информационной матрицы при ограничениях $M \in \Omega_M$, где $\Omega_M = \{M(\xi) | \xi \in \Omega_\xi\}$ — множество информационных матриц. Характерной особенностью этого подхода является большая размерность экстремальной задачи. Поскольку $X[M(\xi)]$ — выпуклый функционал, здесь имеет место задача выпуклого программирования, для решения которой предлагается следующий алгоритм.

6.1 Прямая градиентная процедура построения непрерывных оптимальных планов

Шаг 1. Зададим начальный невырожденный план:

$$\xi_0 = \left\{ \begin{array}{l} U_1^0, U_2^0, \dots, U_q^0 \\ p_1^0, p_2^0, \dots, p_q^0 \end{array} \right\}, \quad U_i^0 \in \Omega_U, \quad p_i^0 = \frac{1}{q}, \\ i = 1, 2, \dots, q,$$

в котором $q = s(s+1)/2+1$. Вычислим информационные матрицы $M(U_i^0)$ одноточечных планов для $i = 1, 2, \dots, q$ и по формуле (17) информационную матрицу всего плана ξ_0 . Положим $l = 0$.

Шаг 2. Считая веса $p_1^l, p_2^l, \dots, p_q^l$ фиксированными, решим задачу

$$X[M(\xi_1)] \rightarrow \min_{U_1^l, \dots, U_q^l}, \quad U_i^l \in \Omega_U, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

методом проекции градиента:

$$\tilde{U}^{l+1} = \pi_{\Omega_U} \left\{ \tilde{U}^l - \rho_l' \nabla_{\tilde{U}} X[M(\xi_l)] \right\},$$

где $U^{\tilde{T}} = (U_1^{\tilde{T}}, U_2^{\tilde{T}}, \dots, U_q^{\tilde{T}})$; $\pi_{\Omega_{\tilde{U}}}\{\cdot\}$ — проекция точки¹ на множество $\Omega_{\tilde{U}}$; $\rho'_l \geq 0$ — длина шага.

Далее составим план:

$$\tilde{\xi}_l = \left\{ \begin{array}{c} U_1^{l+1}, U_2^{l+1}, \dots, U_q^{l+1} \\ p_1^l, p_2^l, \dots, p_q^l \end{array} \right\},$$

где U_i^{l+1} — точки, найденные на шаге 2.

Вычислим $M(U_i^{l+1})$, $i = 1, 2, \dots, q$.

Шаг 3. Зафиксировав точки спектра полученного плана, решим задачу

$$X[M(\tilde{\xi}_l)] \rightarrow \min_{p_1^l, p_2^l, \dots, p_q^l} \sum_{i=1}^q p_i^l = 1, p_i^l \geq 0, \\ i = 1, 2, \dots, q,$$

методом проекции градиента Розена [17]:

$$\tilde{p}^{l+1} = \tilde{p}^l - \rho'_l P \nabla_{\tilde{p}} X[M(\tilde{\xi}_l)],$$

где $\tilde{p} = (p_1, p_2, \dots, p_q)$, $\rho'_l \geq 0$ — длина шага, P — матрица оператора проектирования. Составим план:

$$\xi_{l+1} = \left\{ \begin{array}{c} U_1^{l+1}, U_2^{l+1}, \dots, U_q^{l+1} \\ p_1^{l+1}, p_2^{l+1}, \dots, p_q^{l+1} \end{array} \right\}.$$

Шаг 4. Если выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^q \left[\|U_i^{l+1} - U_i^l\|^2 + (p_i^{l+1} - p_i^l)^2 \right] \leq \delta,$$

где δ — малое положительное число, перейдем к шагу 5. В противном случае для $l = l + 1$ повторим шаги 2 и 3.

Шаг 5. Проверим необходимое условие оптимальности плана:

$$|\mu(U_i^{l+1}, \xi_{l+1}) - \eta| \leq \delta, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Если оно выполняется, закончим процесс. В противном случае повторим все сначала, скорректировав начальное приближение ξ_0 .

Значения параметров $X[M(\xi)]$, $\mu(U, \xi)$, η прямой градиентной процедуры для критериев D - и A -оптимальности определяем по табл. 1.

Таблица 1 Соответствие значений параметров $X[M(\xi)]$, $\mu(U, \xi)$ и η критериям оптимальности

Критерий	$X[M(\xi)]$	$\mu(U, \xi)$	η
D	$-\ln \det M(\xi)$	$Sp[M^{-1}(\xi)M(U)]$	s
A	$SpM^{-1}(\xi)$	$Sp[M^{-2}(\xi)M(U)]$	$SpM^{-1}(\xi)$

Приведенный алгоритм требует вычисления градиентов

$$\nabla_{\tilde{U}} X[M(\xi)] = \left\| \frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial u_j^{(i)}(t)} \right\|, \quad i = 1, \dots, q, \\ t = 0, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, r;$$

$$\nabla_{\tilde{p}} X[M(\xi)] = \left\| \frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial p_i} \right\|, \quad i = 1, \dots, q.$$

Начнем с критерия D -оптимальности. Для него получаем

$$\frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial u_j^{(i)}(t)} = \frac{\partial [-\ln \det M(\xi)]}{\partial u_j^{(i)}(t)} = \\ = -Sp \left[M^{-1}(\xi) \frac{\partial M(\xi)}{\partial u_j^{(i)}(t)} \right] = \\ = -p_i Sp \left[M^{-1}(\xi) \frac{\partial M(U_i; \theta)}{\partial u_j^{(i)}(t)} \right], \\ i = 1, \dots, q, \quad t = 0, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, r.$$

Для вычисления производных

$$\frac{\partial M(U; \theta)}{\partial u_j(t)} = \left\| \frac{\partial M_{\alpha\beta}(U; \theta)}{\partial u_j(t)} \right\|, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, s,$$

воспользуемся тем, что ИМФ можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит от входного сигнала, а другое — нет (данный факт вытекает из материалов [19]):

$$M_{\alpha\beta}(U; \Theta) = W_{\alpha\beta}(U; \Theta) + V_{\alpha\beta}(\Theta).$$

Здесь

$$W_{\alpha\beta}(U; \Theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ Sp \left[\frac{\partial H(k+1)}{\partial \theta_\alpha} C_0 \bar{x}_A(k+1) \bar{x}_A^T(k+1) C_0^T \frac{\partial H^T(k+1)}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(k+1) \right] + \right. \\ \left. + Sp \left[\frac{\partial H(k+1)}{\partial \theta_\alpha} C_0 \bar{x}_A(k+1) \bar{x}_A^T(k+1) C_\beta^T H^T(k+1) B^{-1}(k+1) \right] \right\}$$

¹Для сигналов, ограниченных по мощности или по амплитуде, когда $\Omega_{\tilde{U}}$ — соответственно координатный шар или параллелепипед, известны явные выражения для проекции [18].

$$\begin{aligned}
 & + Sp \left[\frac{\partial H(k+1)}{\partial \theta_\alpha} C_0 \bar{x}_A(k+1) \frac{\partial A^T(k+1)}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(k+1) \right] + \\
 & + Sp \left[H(k+1) C_\alpha \bar{x}_A(k+1) \bar{x}_A^T(k+1) C_0^T \frac{\partial H^T(k+1)}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(k+1) \right] + \\
 & + Sp \left[H(k+1) C_\alpha \bar{x}_A(k+1) \bar{x}_A^T(k+1) C_\beta^T H^T(k+1) B^{-1}(k+1) \right] + \\
 & + Sp \left[H(k+1) C_\alpha \bar{x}_A(k+1) \frac{\partial A^T(k+1)}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(k+1) \right] + \\
 & + Sp \left[\frac{\partial A(k+1)}{\partial \theta_\alpha} \bar{x}_A^T(k+1) C_0^T \frac{\partial H^T(k+1)}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(k+1) \right] + \\
 & + Sp \left[\frac{\partial A(k+1)}{\partial \theta_\alpha} \bar{x}_A^T(k+1) C_\beta^T H^T(k+1) B^{-1}(k+1) \right] \}, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, s.
 \end{aligned}$$

В соответствии с указанным разложением получаем, что

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial M_{\alpha\beta}(U; \Theta)}{\partial u_j(t)} = \frac{\partial W_{\alpha\beta}(U; \Theta)}{\partial u_j(t)} = \\
 & = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ Sp \left[\frac{\partial H(k+1)}{\partial \theta_\alpha} C_0 \left(\frac{\partial \bar{x}_A(k+1)}{\partial u_j(t)} \bar{x}_A^T(k+1) + \bar{x}_A(k+1) \frac{\partial \bar{x}_A^T(k+1)}{\partial u_j(t)} \right) C_0^T \frac{\partial H^T(k+1)}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(k+1) \right] + \right. \\
 & + Sp \left[\frac{\partial H(k+1)}{\partial \theta_\alpha} C_0 \left(\frac{\partial \bar{x}_A(k+1)}{\partial u_j(t)} \bar{x}_A^T(k+1) + \bar{x}_A(k+1) \frac{\partial \bar{x}_A^T(k+1)}{\partial u_j(t)} \right) C_\beta^T H^T(k+1) B^{-1}(k+1) \right] + \\
 & + Sp \left[\frac{\partial H(k+1)}{\partial \theta_\alpha} C_0 \frac{\partial \bar{x}_A(k+1)}{\partial u_j(t)} \frac{\partial A^T(k+1)}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(k+1) \right] + \\
 & + Sp \left[H(k+1) C_\alpha \left(\frac{\partial \bar{x}_A(k+1)}{\partial u_j(t)} \bar{x}_A^T(k+1) + \bar{x}_A(k+1) \frac{\partial \bar{x}_A^T(k+1)}{\partial u_j(t)} \right) C_0^T \frac{\partial H^T(k+1)}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(k+1) \right] + \\
 & + Sp \left[H(k+1) C_\alpha \left(\frac{\partial \bar{x}_A(k+1)}{\partial u_j(t)} \bar{x}_A^T(k+1) + \bar{x}_A(k+1) \frac{\partial \bar{x}_A^T(k+1)}{\partial u_j(t)} \right) C_\beta^T H^T(k+1) B^{-1}(k+1) \right] + \\
 & + Sp \left[H(k+1) C_\alpha \frac{\partial \bar{x}_A(k+1)}{\partial u_j(t)} \frac{\partial A^T(k+1)}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(k+1) \right] + \\
 & + Sp \left[\frac{\partial A(k+1)}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial \bar{x}_A^T(k+1)}{\partial u_j(t)} C_0^T \frac{\partial H^T(k+1)}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(k+1) \right] + \\
 & \left. + Sp \left[\frac{\partial A(k+1)}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial \bar{x}_A^T(k+1)}{\partial u_j(t)} C_\beta^T H^T(k+1) B^{-1}(k+1) \right] \right\}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Алгоритм вычисления производных от ИМФ по компонентам входного сигнала $\partial M(U; \Theta)/\partial u_j(t)$ для заданных значений U, Θ при фиксированных j, t может быть следующим¹:

Шаг 1. Задать $Q, R, \bar{x}(0), P(0), \{\partial \bar{x}(0)/\partial \theta_i, i = 1, 2, \dots, s\}$.

Шаг 2. Положить $\partial M(U; \Theta)/\partial u_j(t) = 0; k = 0; x_H(k) = \bar{x}(0); \partial x_H(k)/\partial \theta_i = \partial \bar{x}(0)/\partial \theta_i, i = 1, 2, \dots, s; P(k|k) = P(0)$.

Шаг 3. Определив $u_H(k)$, найти $a(k)$ по формуле (6) и $\{\partial a(k)/\partial \theta_i, i = 1, 2, \dots, s\}$ по формуле:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a(k)}{\partial \theta_i} = & \frac{\partial f[x_H(k), u_H(k), k]}{\partial \theta_i} - \frac{\partial^2 f[x_H(k), u_H(k), k]}{\partial \theta_i \partial x(k)} x_H(k) - \frac{\partial f[x_H(k), u_H(k), k]}{\partial x(k)} \frac{\partial x_H(k)}{\partial \theta_i} + \\
 & + \frac{\partial^2 f[x_H(k), u_H(k), k]}{\partial \theta_i \partial u(k)} [u(k) - u_H(k)].
 \end{aligned}$$

При помощи выражения (7) получить $\Phi(k)$ и $\{\partial \Phi(k)/\partial \theta_i, i = 1, 2, \dots, s\}$.

¹Приводится здесь впервые. Разработан на основе материалов [19].

Шаг 4. Если $k = 0$, вычислить:

$$\bar{x}_A(k+1) = \begin{bmatrix} \Phi(0)\bar{x}(0) + a(0) \\ \frac{\partial\Phi(0)}{\partial\theta_1}\bar{x}(0) + \Phi(0)\frac{\partial\bar{x}(0)}{\partial\theta_1} + \frac{\partial a(0)}{\partial\theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial\Phi(0)}{\partial\theta_s}\bar{x}(0) + \Phi(0)\frac{\partial\bar{x}(0)}{\partial\theta_s} + \frac{\partial a(0)}{\partial\theta_s} \end{bmatrix}$$

и перейти к шагу 8.

Шаг 5. Найти $\tilde{K}(k)$ по формуле:

$$\tilde{K}(k) = \Phi(k)K(k).$$

Шаг 6. Сформировать матрицы $\Phi_A(k)$, $a_A(k)$ в соответствии с равенствами:

$$\Phi_A(k) = \begin{bmatrix} \Phi(k) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial\Phi(k)}{\partial\theta_1} - \tilde{K}(k)\frac{\partial H(k)}{\partial\theta_1} & \Phi(k) - \tilde{K}(k)H(k) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\Phi(k)}{\partial\theta_s} - \tilde{K}(k)\frac{\partial H(k)}{\partial\theta_s} & 0 & \dots & \Phi(k) - \tilde{K}(k)H(k) \end{bmatrix};$$

$$a_A(k) = \begin{bmatrix} a(k) \\ \frac{\partial a(k)}{\partial\theta_1} - \tilde{K}(k)\frac{\partial A(k)}{\partial\theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial a(k)}{\partial\theta_s} - \tilde{K}(k)\frac{\partial A(k)}{\partial\theta_s} \end{bmatrix}.$$

Шаг 7. Вычислить $\bar{x}_A(k+1)$ по формуле:

$$\bar{x}_A(k+1) = \Phi_A(k)\bar{x}_A(k) + a_A(k).$$

Шаг 8. Найти $x_H(k+1)$ и $\{\partial x_H(k+1)/\partial\theta_i, i = 1, 2, \dots, s\}$ при помощи выражения (3). Вычислить $\{\partial A(k+1)/\partial\theta_i, i = 1, 2, \dots, s\}$, воспользовавшись равенством (8). Определить $H(k+1)$ по формуле (9) и $\{\partial H(k+1)/\partial\theta_i, i = 1, 2, \dots, s\}$.

Шаг 9. Сформировать матрицу $\Gamma(k)$ и найти $P(k+1|k)$, $B(k+1)$, $K(k+1)$, $P(k+1|k+1)$, используя выражения (12)–(15).

Шаг 10. Определить $\partial a(k)/\partial u_j(t)$ и $\{\partial^2 a(k)/(\partial\theta_i \partial u_j(t)), i = 1, 2, \dots, s\}$ по формулам:

$$\frac{\partial a(k)}{\partial u_j(t)} = \frac{\partial f[x_H(k), u_H(k), k]}{\partial u(k)} \frac{\partial u(k)}{\partial u_j(t)};$$

$$\frac{\partial^2 a(k)}{\partial\theta_i \partial u_j(t)} = \frac{\partial^2 f[x_H(k), u_H(k), k]}{\partial\theta_i \partial u(k)} \frac{\partial u(k)}{\partial u_j(t)}.$$

Шаг 11. Если $k = 0$, вычислить $\partial\bar{x}_A(k+1)/\partial u_j(t)$ по формуле:

$$\frac{\partial\bar{x}_A(k+1)}{\partial u_j(t)} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{\partial a(0)}{\partial u_j(t)} \\ \frac{\partial^2 a(0)}{\partial\theta_1 \partial u_j(t)} \\ \dots \\ \frac{\partial^2 a(0)}{\partial\theta_s \partial u_j(t)} \end{bmatrix}, & \text{если } t = 0; \\ 0, & \text{если } t \neq 0 \end{cases}$$

и перейти к шагу 14.

Шаг 12. Сформировать вектор $\partial a_A(k)/\partial u_j(t)$ в соответствии с равенством:

$$\frac{\partial a_A(k)}{\partial u_j(t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a(k)}{\partial u_j(t)} \\ \frac{\partial^2 a(k)}{\partial\theta_1 \partial u_j(t)} \\ \dots \\ \frac{\partial^2 a(k)}{\partial\theta_s \partial u_j(t)} \end{bmatrix}.$$

Шаг 13. Вычислить $\partial \bar{x}_A(k+1)/\partial u_j(t)$ по формуле:

$$\frac{\partial \bar{x}_A(k+1)}{\partial u_j(t)} = \begin{cases} \Phi_A(k) \frac{\partial \bar{x}_A(k)}{\partial u_j(t)} + \frac{\partial a_A(k)}{\partial u_j(t)}, & t \leq k; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 14. Используя выражение (19), получить приращение $\Delta(\partial M(U; \Theta)/\partial u_j(t))$, отвечающее текущему значению k .

Шаг 15. Положить

$$\frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_j(t)} = \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_j(t)} + \Delta \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_j(t)}.$$

Шаг 16. Увеличить k на единицу. Если $k \leq N-1$, перейти к шагу 3. В противном случае закончить процесс.

Получить выражение для градиента по весам не составляет особого труда, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial p_i} &= \frac{\partial [-\ln \det M(\xi)]}{\partial p_i} = \\ &= -Sp \left[M^{-1}(\xi) \frac{\partial M(\xi)}{\partial p_i} \right] = \\ &= -Sp \left[M^{-1}(\xi) M(U_i; \theta) \right], \quad i = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

Перейдем к критерию A -оптимальности. В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial u_j^{(i)}(t)} &= \frac{\partial [Sp M^{-1}(\xi)]}{\partial u_j^{(i)}(t)} = Sp \left[\frac{\partial M^{-1}(\xi)}{\partial u_j^{(i)}(t)} \right] = \\ &= -Sp \left[M^{-1}(\xi) \frac{\partial M(\xi)}{\partial u_j^{(i)}(t)} M^{-1}(\xi) \right] = \\ &= -p_i Sp \left[M^{-1}(\xi) \frac{\partial M(U_i; \theta)}{\partial u_j^{(i)}(t)} M^{-1}(\xi) \right] = \\ &= -p_i Sp \left[M^{-2}(\xi) \frac{\partial M(U_i; \theta)}{\partial u_j^{(i)}(t)} \right], \\ & \quad i = 1, \dots, q, \quad t = 0, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, r; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial p_i} &= \frac{\partial Sp M^{-1}(\xi)}{\partial p_i} = Sp \left[\frac{\partial M^{-1}(\xi)}{\partial p_i} \right] = \\ &= -Sp \left[M^{-1}(\xi) \frac{\partial M(\xi)}{\partial p_i} M^{-1}(\xi) \right] = \\ &= -Sp \left[M^{-1}(\xi) M(U_i; \theta) M^{-1}(\xi) \right] = \\ &= -Sp \left[M^{-2}(\xi) M(U_i; \theta) \right], \quad i = 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

Другой подход (его называют двойственным) к решению оптимизационной задачи (18) основан на теореме эквивалентности из [21] и заключается в минимизации $X[M(\xi)]$ по набору аргументов $\{U_i, p_i\}_{i=1}^q$ при ограничениях $U_i \in \Omega_U, p_i \geq 0, \sum_{i=1}^q p_i = 1$. В этом случае рассматриваемая задача уже не является задачей выпуклого программирования, но размерность вектора варьируемых параметров может оказаться значительно меньше, чем при прямом подходе.

6.2 Двойственная градиентная процедура построения непрерывных оптимальных планов¹

Шаг 1. Зададим начальный невырожденный план ξ_0 и по формуле (17) вычислим нормированную матрицу $M(\xi_0)$ плана. Положим $l = 0$.

Шаг 2. Найдем локальный максимум

$$U^l = \arg \max_{U \in \Omega_U} \mu(U, \xi_l)$$

методом проекции градиента. Если окажется, что $|\mu(U^l, \xi_l) - \eta| \leq \delta$, закончим процесс. Если $\mu(U^l, \xi_l) > \eta$, перейдем к шагу 3. В противном случае будем искать новый локальный максимум.

Шаг 3. Вычислим τ_l по формуле

$$\tau_l = \arg \min_{0 \leq \tau \leq 1} X[M(\xi_{l+1}^\tau)].$$

Здесь

$$\xi_{l+1}^\tau = (1 - \tau) \xi_l + \tau \xi(U^l),$$

где $\xi(U^l)$ — одноточечный план, размещенный в точке U^l .

Шаг 4. Составим план

$$\xi_{l+1} = (1 - \tau_l) \xi_l + \tau_l \xi(U^l),$$

произведем его «очистку» в соответствии с рекомендациями из [4], положим $l = l + 1$ и перейдем к шагу 2.

Приведенный алгоритм требует вычисления градиента

$$\nabla_U \mu(U, \xi) = \left\| \frac{\partial \mu(U, \xi)}{\partial u_j(t)} \right\|, \quad t = 0, 1, \dots, N-1, \\ j = 1, 2, \dots, r.$$

¹Соответствие значений параметров $X[M(\xi)], \mu(U, \xi), \eta$ двойственной процедуры критериям A - и D -оптимальности также см. по табл. 1.

Для критерия D -оптимальности получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(U; \xi)}{\partial u_j(t)} &= \frac{\partial Sp[M^{-1}(\xi)M(U)]}{\partial u_j(t)} = \\ &= Sp \left[M^{-1}(\xi) \frac{\partial M(U)}{\partial u_j(t)} \right], \quad t = 0, 1, \dots, N-1, \\ & \qquad \qquad \qquad j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

В случае критерия A -оптимальности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(U; \xi)}{\partial u_j(t)} &= \frac{\partial Sp[M^{-2}(\xi)M(U)]}{\partial u_j(t)} = \\ &= Sp \left[M^{-2}(\xi) \frac{\partial M(U)}{\partial u_j(t)} \right], \quad t = 0, 1, \dots, N-1, \\ & \qquad \qquad \qquad j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Итак, рассмотрены две принципиально разные градиентные процедуры построения непрерывных оптимальных планов. До решения конкретной задачи не представляется возможным судить, эффективность какой из них окажется выше. Проведенный анализ позволил организовать вычисление градиентов функционалов $X[M(\xi)]$ и $\mu[U, \xi]$ по рекуррентным аналитическим формулам. Основу алгоритмов вычисления указанных градиентов составили алгоритмы нахождения информационной матрицы одноточечного плана $M(U; \Theta)$ из [19] и ее производных $\partial M(U; \Theta) / \partial u_j(t)$.

Практическое применение построенного непрерывного оптимального плана

$$\xi^* = \left\{ \begin{array}{l} U_1^*, U_2^*, \dots, U_q^* \\ p_1^*, p_2^*, \dots, p_q^* \end{array} \right\}, \quad \sum_{i=1}^q p_i^* = 1, \quad p_i^* \geq 0, \\ U_i^* \in \Omega_U, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

затруднено тем обстоятельством, что веса p_i^* представляют собой, вообще говоря, произвольные вещественные числа, заключенные в интервале от нуля до единицы. Возможный алгоритм «округления» непрерывного плана до дискретного изложен в [7].

Разработанный в рамках системы MATLAB программный комплекс включает в себя модули, отвечающие за вычисление информационной матрицы и ее производных по компонентам входного сигнала, нахождение ММП-оценок неизвестных параметров моделей гауссовских нелинейных дискретных систем, синтез A - и D -оптимальных входных сигналов (реализованы прямая и двойственная градиентные процедуры).

7 Пример активной идентификации динамической системы

Рассмотрим следующую модель стохастической нелинейной дискретной системы:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right) x(k) + \\ &+ \frac{0,01}{\theta_1} [u(k) - x(k)] e^{0,25[u(k) - x(k)]} + \frac{0,1}{\theta_1} w(k); \quad (20) \\ y(k+1) &= x(k+1) + v(k+1), \\ & \qquad \qquad \qquad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (21) \end{aligned}$$

где θ_1, θ_2 — неизвестные параметры системы, причем $2 \leq \theta_1 \leq 10, 0,05 \leq \theta_2 \leq 2$.

Будем считать, что выполнены все априорные предположения из разд. 2, причем

$$\begin{aligned} E[w(k)w(i)] &= 0,6\delta_{ki} = Q\delta_{ki}; \\ E[v(k+1)v(i+1)] &= 0,3\delta_{ki} = R\delta_{ki}; \\ E[x(0)] &= 0 = \bar{x}(0); \\ E\{[x(0) - \bar{x}(0)][x(0) - \bar{x}(0)]\} &= 0,01 = P(0). \end{aligned}$$

Выполнив временную линеаризацию модели (20), (21) относительно номинальной траектории

$$\left. \begin{aligned} x_H(k+1) &= \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right) x_H(k) + \\ &+ \frac{0,01}{\theta_1} [u_H(k) - x_H(k)] e^{0,25[u_H(k) - x_H(k)]}, \\ & \qquad \qquad \qquad k = 0, 1, \dots, N-1; \\ x_H(0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

получим линеаризованную модель вида (10), (11), в которой

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{0,01}{\theta_1} \left\{ [1 + 0,25(u_H(k) - x_H(k))] u(k) - \right. \\ &\quad \left. - 0,25 [u_H(k) - x_H(k)]^2 \right\} e^{0,25[u_H(k) - x_H(k)]}; \\ \Phi(k) &= 1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} - \frac{0,01}{\theta_1} \{1 + 0,25 [u_H(k) - \\ &\quad - x_H(k)]\} e^{0,25[u_H(k) - x_H(k)]}; \\ \Gamma(k) &= \frac{0,1}{\theta_1}; \quad A(k+1) = 0; \quad H(k+1) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, необходимо оценить параметры θ_1, θ_2 , входящие в $a(k), \Phi(k)$ и $\Gamma(k)$.

Считаем, что для номинальной траектории (22) $u_H(k) = u(k), k = 0, 1, \dots, N-1$, обеспечивается

наилучшее приближение построенной линеаризованной модели к своему нелинейному аналогу.

Выберем область планирования $\Omega_U = \{U \in R^N | 10 \leq u(k) \leq 15, k = 0, 1, \dots, N - 1\}$ и критерий A -оптимальности.

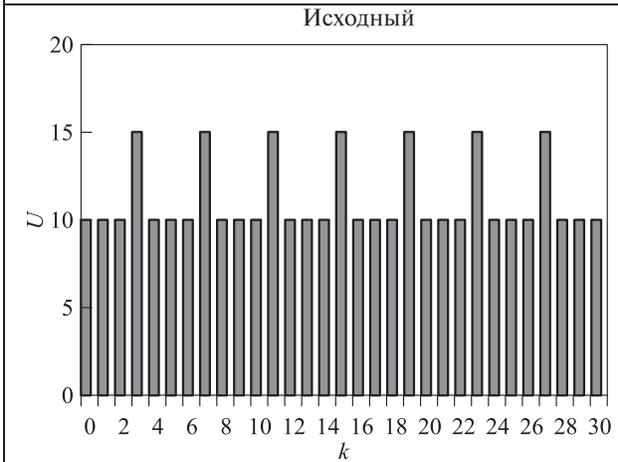
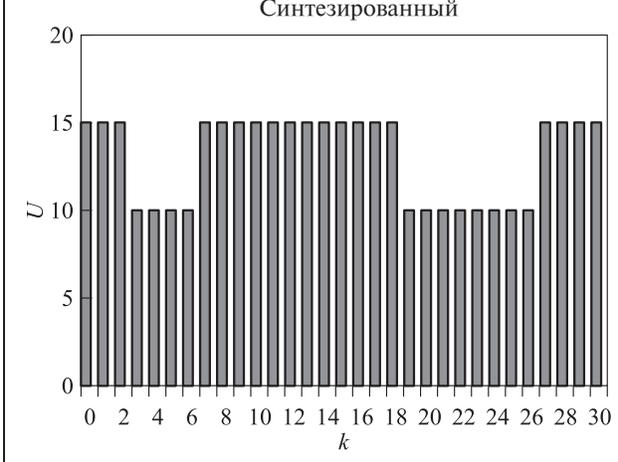
Для того чтобы ослабить зависимость результатов оценивания от выборочных данных, произведем пять независимых запусков системы и усредним полученные оценки неизвестных параметров. Реализации выходных сигналов получим компьютерным моделированием при истинных значениях параметров $\theta_1^* = 4, \theta_2^* = 0,5$ и $N = 31$.

О качестве идентификации в пространстве параметров и в пространстве откликов будем судить соответственно по значениям коэффициентов k_θ и k_Y , вычисляющихся по следующим формулам:

$$k_\theta = \frac{\|\theta^* - \hat{\theta}_{cp}\|}{\|\theta^* - \hat{\theta}_{cp}^*\|} = \sqrt{\frac{(\theta_1^* - \hat{\theta}_{1cp})^2 + (\theta_2^* - \hat{\theta}_{2cp})^2}{(\theta_1^* - \hat{\theta}_{1cp}^*)^2 + (\theta_2^* - \hat{\theta}_{2cp}^*)^2}};$$

$$k_Y = \frac{\|Y_{cp} - \hat{Y}_{cp}\|}{\|Y_{cp} - \hat{Y}_{cp}^*\|} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{N-1} (y_{cp}(k+1) - \hat{y}_{cp}(k+1|k+1))^2}{\sum_{k=0}^{N-1} (y_{cp}(k+1) - \hat{y}_{cp}^*(k+1|k+1))^2}};$$

Таблица 2 Результат выполнения процедуры активной идентификации

Входной сигнал	Номер запуска системы	Значения оценок параметров	
		$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
<p>Исходный</p> 	1	6,6782	0,4520
	2	6,1915	0,4014
	3	3,2376	0,5220
	4	3,8666	0,5807
	5	4,7786	0,5493
	Средние значения по запускам	4,9505	0,5011
<p>Синтезированный</p> 	1	4,7958	0,4888
	2	4,5351	0,4962
	3	3,6677	0,4967
	4	3,2482	0,4975
	5	4,8276	0,5340
	Средние значения по запускам	4,2151	0,5026

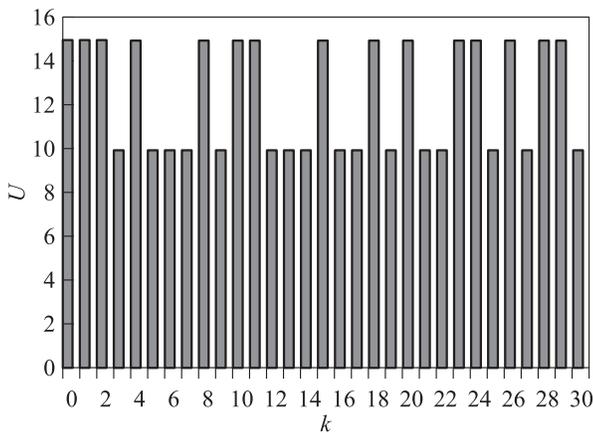


Рис. 1 Тестовый сигнал U для анализа качества прогнозирования на основе результатов из табл. 2

где θ^* — вектор истинных значений параметров; $\hat{\theta}_{cp}$ — вектор усредненных оценок неизвестных значений параметров по исходному входному сигналу; $\hat{\theta}_{cp}^*$ — вектор усредненных оценок неизвестных значений параметров по синтезированному входному сигналу; $Y_{cp} = \{y_{cp}(k + 1), k = 0, 1, \dots, N - 1\}$, $\hat{Y}_{cp} = \{\hat{y}_{cp}(k + 1|k + 1), k = 0, 1, \dots, N - 1\}$, $\hat{Y}_{cp}^* = \{\hat{y}_{cp}^*(k + 1|k + 1), k = 0, 1, \dots, N - 1\}$ — усредненные по всем запускам последовательности измерений для вектора θ , равного θ^* , $\hat{\theta}_{cp}$, $\hat{\theta}_{cp}^*$ соответственно, при некотором выбранном допустимом входном сигнале $U \in \Omega_U$.

Результаты выполнения процедуры активной параметрической идентификации представлены в табл. 2 (оптимальный план получился одноточечным).

Данные, приведенные в табл. 2, показывают, что коэффициент $k_\theta \approx 4,4$. В пространстве откликов

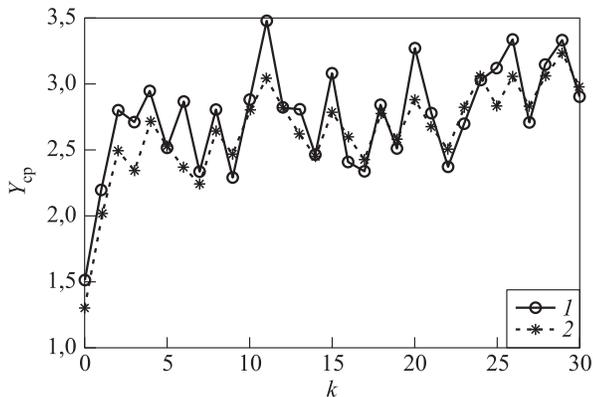


Рис. 2 Графическое представление $Y_{cp}(k + 1)$ (1) и $\hat{Y}_{cp}(k + 1|k + 1)$ (2) при U , изображенном на рис. 1

при псевдослучайном входном сигнале U , приведенном на рис. 1, $k_Y \approx 1,3$. Последовательности Y_{cp} , \hat{Y}_{cp} , \hat{Y}_{cp}^* изображены на рис. 2 и 3.

8 Заключение

Дано систематическое изложение наиболее существенных для практики вопросов теории и техники активной параметрической идентификации гауссовских нелинейных дискретных систем. Рассмотрен случай вхождения неизвестных параметров в уравнения состояния и наблюдения, начальные условия и ковариационные матрицы помех динамики и ошибок измерений. Приведен разработанный алгоритм для вычисления производных от информационной матрицы по компонентам входного сигнала, позволяющий использовать при синтезе входного сигнала метод проектирования градиента и в результате сократить время поиска оптимального плана эксперимента. Приведены оригинальные градиентные алгоритмы активной идентификации, позволяющие решать задачи оптимального оценивания параметров методом максимального правдоподобия с привлечением прямой и двойственной процедур синтеза A - и D -оптимальных входных сигналов. На примере одной модельной структуры продемонстрирована эффективность и целесообразность применения концепции активной параметрической идентификации при построении моделей нелинейных систем.

Литература

1. Сейдж Э. П., Мелса Дж. Л. Идентификация систем управления. — М.: Наука, 1974.

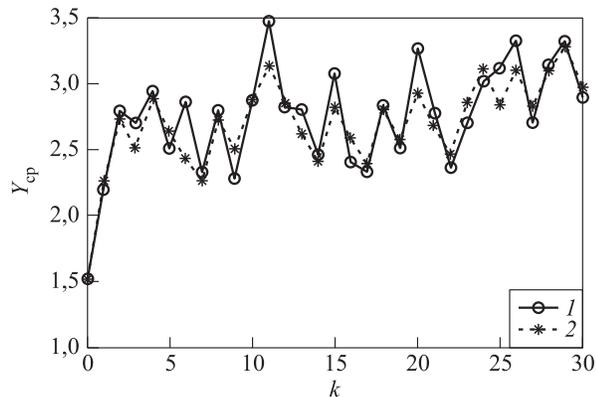


Рис. 3 Графическое представление $Y_{cp}(k + 1)$ (1) и $\hat{Y}_{cp}^*(k + 1|k + 1)$ (2) при U , изображенном на рис. 1

2. *Эйххофф П.* Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния. — М.: Мир, 1975.
3. *Грон Д.* Методы идентификации систем. — М.: Мир, 1979.
4. *Федоров В. В.* Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов). — М.: Наука, 1971.
5. *Денисов В. И.* Математическое обеспечение системы ЭВМ — экспериментатор. — М.: Наука, 1977.
6. *Горский В. Г., Адлер Ю. П., Талалай А. М.* Планирование промышленных экспериментов (модели динамики). — М.: Металлургия, 1978.
7. *Ермаков С. М., Жиглявский А. А.* Математическая теория оптимального эксперимента. — М.: Наука, 1987.
8. *Денисов В. И., Чубич В. М., Черникова О. С.* Активная идентификация стохастических линейных дискретных систем во временной области // Сиб. журн. индустр. матем., 2003. Т. 6. № 3(15). С. 70–87.
9. *Денисов В. И., Чубич В. М., Черникова О. С.* Активная параметрическая идентификация стохастических линейных дискретных систем в частотной области // Сиб. журн. индустр. матем., 2007. Т. 10. № 1(29). С. 70–89.
10. *Денисов В. И., Чубич В. М., Черникова О. С., Бобылева Д. И.* Активная параметрическая идентификация стохастических линейных систем. — Новосибирск: НГТУ, 2009.
11. *Синицын И. Н.* Рецензия на книгу В. И. Денисова, В. М. Чубича, О. С. Черниковой, Д. И. Бобылевой «Активная параметрическая идентификация стохастических линейных систем» // Системы высокой доступности, 2009. № 3. С. 56.
12. *Казаков И. Е.* Статистические методы проектирования систем управления. — М.: Машиностроение, 1969.
13. *Пугачев В. С., Казаков И. Е., Евланов Л. Г.* Основы статистической теории автоматических систем. — М.: Машиностроение, 1974.
14. *Gupta N. K., Mehra R. K.* Computational aspects of maximum likelihood estimation and reduction in sensitivity function calculations // IEEE Trans. Automat. Control, 1974. Vol. 19. No. 6. P. 774–783.
15. *Áström K. J.* Maximum likelihood and prediction errors methods // Automatica, 1980, Vol. 16. P. 551–574.
16. *Огарков М. А.* Методы статистического оценивания параметров случайных процессов. — М.: Энергоатомиздат, 1980.
17. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. — М.: Мир, 1982.
18. *Сухарев А. Г., Тимохов В. В., Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. — М.: Наука, 1986.
19. *Чубич В. М.* Вычисление информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных систем // Науч. вест. НГТУ, 2009. № 1(34). С. 23–40.
20. *Льюнг Л.* Идентификация систем: Теория для пользователя. — М.: Наука, 1991.
21. *Mehra R. K.* Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems — survey and new results // IEEE Trans. Automat. Control, 1974. Vol. 19. No. 6. P. 753–768.

АГЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ТЕРРИТОРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

К. С. Чиркунов¹

Аннотация: Рассмотрена агентная система, имитирующая развитие экономики страны (строительство новых производств, повышение общего уровня доходов) на базе модели территориальной системы. Элементы модели представлены в виде автономных единиц, способных к взаимодействию друг с другом, — агентов.

Ключевые слова: агентные алгоритмы переговоров; территориальная система; моделирование; экономическое районирование

1 Введение

Для моделирования процессов формирования и развития территориальных образований изначально применялись методики «сверху вниз» с последующей корректировкой решений «снизу вверх», которые предполагали организацию вычислений с выделенным центром. Такой подход использовали А. Г. Аганбегян, К. А. Багриновский, А. Г. Гранберг (об этом упоминается в работе [1]). Новые подходы с использованием агентов (М. Вулдридж, Й. Шоэм, К. Литон-Браун и др.) позволяют описать территориальную систему как совокупность взаимодействующих между собой агентов [2, 3]. Решения на глобальном уровне (на уровне всей системы) возникают как результат локальных коопераций ее элементов.

Для чего нужно развивать новые подходы при уже неоднократно успешно зарекомендовавшем себя на практике существующем аппарате моделирования развития территориальных систем?

Ответ на этот вопрос можно найти, например, в работе известного американского философа науки Пола Фейерабенда [4]. По его мнению, ряд наиболее важных формальных свойств теории обнаруживается благодаря контрасту, а не анализу. Ученый, желающий более глубоко уяснить свои концепции, должен вводить новые.

Не вдаваясь, подобно Полу Фейерабенду, в крайний релятивизм, примем его утверждение о том, что всякая устоявшаяся методология — даже наиболее очевидная — имеет свои пределы. Отступим от нескольких догматов, которые были «провозглашены» в рамках традиционного моделирования территориальной системы нашей страны, и предпримем попытку смоделировать систему как совокупность взаимодействующих агентов при от-

сутствии вертикальных иерархических связей на верхнем уровне. При этом сохраним ряд изначально существовавших в этой области понятий.

В процессе построения агентной модели необходимо решить целый ряд задач: определить структуру агентов и их коммуникации, описать среду системы, составить алгоритмы кооперативных взаимодействий (в том числе алгоритм определения набора новых производств, алгоритм установления межрайонных, внешних товарно-материальных связей и т. д.), привести обоснования использованных решений. Все эти вопросы так или иначе должны быть затронуты в работе.

2 Территориальная система как совокупность агентов экономических районов

В данном разделе опишем общие базовые понятия и простую схему агентной модели территориальной системы.

2.1 Что такое агент?

В этом подразделе следовало бы дать четкую и ясную формулировку понятия «агент» и перейти к следующему. Однако не все так просто. Известно по меньшей мере шесть различных определений этого понятия в работах, посвященных агентному моделированию, из которых ни одно нельзя назвать общим, полным и ясным. Наиболее важным свойством агента можно считать автономность, иногда также отмечают обучаемость (способность к адаптации), но зачастую это свойство опускается. Агент действует в некоторой среде и обладает

¹Институт систем информатики им. А. П. Ершова СО РАН, cyril.chirkunov@computer.org

способностью получать информацию об объектах, которые в ней находятся. Будем считать, что среда является полностью наблюдаемой, т. е. агент может получить информацию обо всех объектах, которые в ней находятся (более формально составляющие среды будут описаны далее). Также агент может оказывать воздействие на среду и изменять ее состояние. Надо сказать, что среда в данной модели не является детерминированной для одного агента, т. е. изначально она не гарантирует только один исход после любого действия агента. Однако агенты могут договариваться друг с другом и, как следствие, обеспечивать детерминированность среды для определенного набора действий. В данной работе будем предполагать, что агенты действуют одновременно, а среда является динамичной и дискретной.

Отдельно выделяют характеристики интеллектуальных агентов (в некоторых работах — интеллектуальных в слабом смысле).

1. Реактивность — способность своевременно реагировать на воспринятые изменения среды.
2. Проактивность — способность проявлять инициативу для достижения своих целей.
3. Социальные навыки — способность к взаимодействию с другими агентами «ради дела».

Будем считать, что агенты предлагаемой модели обладают следующими характеристиками: они способны оперативно реагировать на изменения внешней конъюнктуры, могут выступать инициаторами переговоров с другими агентами и взаимодействовать с другими агентами ради общей и собственной выгоды.

Каждый агент имеет функцию полезности, которая в численном выражении показывает, насколько хорошо «живется» агенту в системе. Агент прилагает все усилия, чтобы повысить ее значение, но при этом старается увеличить и полезность общественную, которая задается как сумма значений функции полезности всех агентов. В качестве значений функции полезности будет выступать доход, получаемый агентом в системе.

Популяция взаимодействующих агентов совместно со средой образует *многоагентную систему* (МАС).

2.2 Схема модели

Теперь покажем, каким образом можно представить территориальную систему в виде МАС.

На рис. 1 показана простая схема такой модели. Агенты, представляющие экономические районы (агенты ЭР), потребляют ресурсы, которые

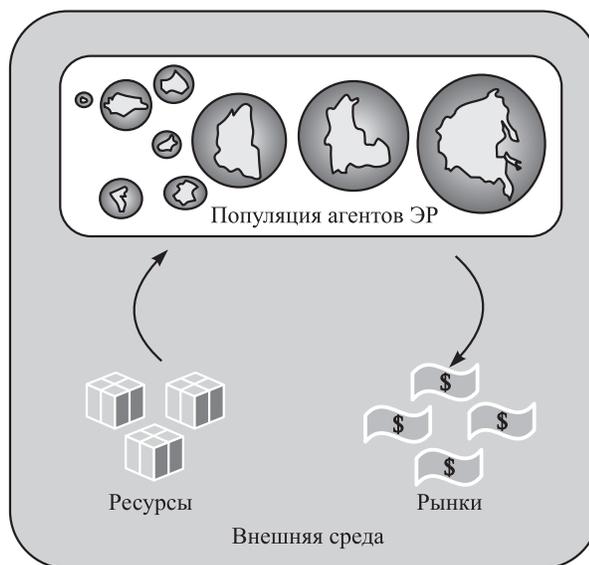


Рис. 1 Взаимодействие популяции агентов ЭР и внешней среды

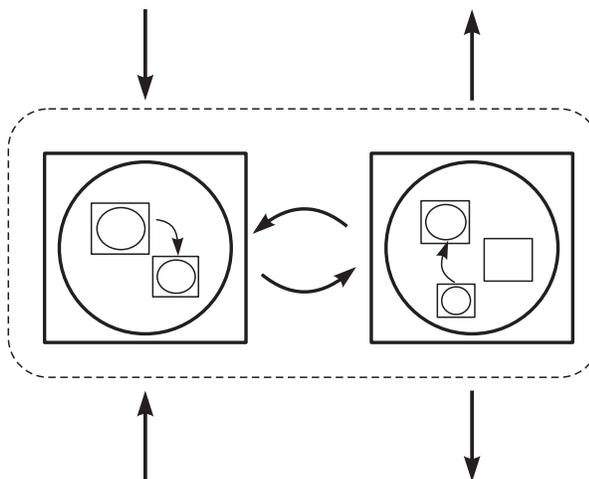


Рис. 2 Схема устройства модели территориальной системы

предоставляет им внешняя среда (т.е. территориальная система поглощает импортную продукцию), и, в свою очередь, генерируют товарную массу для внешней среды (т.е. система экспортирует на внешние рынки произведенную на своей территории продукцию).

На схеме, приведенной на рис. 2, территориальная система описывается посредством активных сущностей (агентов) и пассивных сущностей

(объектов). Агенты обозначаются кругами, объекты, которые они могут использовать, изображены в виде окружающих их квадратов. Агенты верхнего уровня иерархии (большие кружки) содержат в себе популяцию агентов и объекты нижнего уровня (маленькие кружки и квадраты). Пунктиром обозначена граница популяции агентов. Как и на рис. 1, стрелками показаны материально-товарные связи. Однако здесь уже видно, что агенты взаимодействуют и друг с другом: помимо внешних связей (жирные линии со стрелками), направленных либо наружу, либо внутрь популяции, появились и внутренние (линии со стрелками средней толщины и тонкие). Большими квадратами обозначены ареалы районов, малыми — площадки для размещения территориально-производственных комплексов (ТПК). Большие круги — агенты ЭР, генерирующие товарный поток в рамках своей межрайонной специализации и поглощающие материалы и продукцию, необходимую для производства и других хозяйственных нужд.

Иными словами, если агент ЭР₁ нуждается в какой-либо продукции из межрайонных отраслевых специализаций ЭР₂, то он «договаривается» с агентом ЭР₂ и между ними устанавливается товарно-материальная связь. Маленькие кружки показывают агентов ТПК, отношения между которыми устанавливаются по такому же принципу, как и между агентами ЭР, но только внутри их родителя. Детальное рассмотрение агентов ТПК выходит за рамки данной работы.

Можно заметить, что некоторые квадраты-площадки являются вакантными. Это значит, что на данном месте еще не размещен ТПК. Территориально-производственные комплексы могут динамически формироваться внутри незанятых площадок в ходе процесса симуляции.

При описании модели использовалось представление о территориально-производственном комплексе, которое содержится в работах Н. Н. Колосовского.

Определение 1. *Территориально-производственный комплекс — совокупность расположенных рядом друг с другом взаимосвязанных производств.*

Понятие было введено в экономическую географию в 1940-х гг. В исходном определении речь шла о взаимосвязанных и взаимообусловленных производствах, от размещения которых на определенной территории достигается дополнительный экономический эффект за счет использования общей инфраструктуры, кадровой базы, мощностей и т. д.

Определение 2. *Экономический район — это территориально связанные части единого народного хозяйства страны с различной специализацией, постоян-*

ным обменом производимых товаров и другими экономическими отношениями.

Более детально о модели территориальной системы будет рассказано в следующем разделе.

3 Математическое и алгоритмическое описание задачи развития территориальной системы

Введем динамическое (т. е. меняющееся в ходе исполнения) множество товарных рынков M , которое будет иметь следующую структуру:

$$M = M^{\text{EX}} \cup M^{\text{NR}} \cup M^{\text{I}},$$

где M^{EX} — множество товарных рынков за пределами территории страны, внешние рынки; M^{NR} — множество межрайонных товарных рынков, описывающее потребности районов в тех или иных видах продукции, ресурсов и т. д.; M^{I} — множество внутренних районных товарных рынков, описывающее потребности, которые могут быть удовлетворены только в рамках района.

Элемент $m \in M$ имеет следующую структуру: $m = \langle pr, d \rangle$, где $pr \in PR$ — это товар из множества возможных товаров, $d \in C$ ($C \in \mathcal{R}$) — денежная величина объема рынка.

Обозначим через TS множество территориальных систем:

$$TS = \{ts | ts — территориальная система\}.$$

Введем множество ER экономических районов, которое формально можно задать так: $ER = \{er | er — экономический район\}$.

Будем считать, что все территориально-производственные комплексы являются элементами одного и того же множества TPC .

Далее опишем функцию развития территориальной системы.

Функция U действует на множестве TPC , и ее аргументы и значения — элементы этого множества: $U : TPC \rightarrow TPC$.

Доход, получаемый системой, будем обозначать через R , где R — это функция, определенная на множестве территориальных систем TS и отображающая его на множество действительных чисел \mathcal{R} . В качестве аргумента функции выступает производственная территориальная система, а ее значением служит действительное число.

Определение 3. U — программа развития для $ts \in TS$, если $R(U(ts)) > R(ts)$.

Определение 4. Будем говорить, что U^* — оптимальная программа развития для $ts \in TS$ среди всех программ развития U для $ts \in TS$, если $R(U^*(ts)) \leq R(U(ts))$ для любой такой U .

Территориальную систему $ts \in TS$ представим в виде структуры $ts = \langle ER_0, L_{TS}, env \rangle$.

Итак, территориальная система описывается при помощи входящих в нее экономических районов ($ER_0 \subseteq ER$), связей между ними (которые задаются через функцию $L_{TS} : ER \times ER \rightarrow M^{NR}$, действующую на пару экономических районов и отображающую ее на подмножество множества межрайонных товарных рынков) и структурой внешней среды.

Структура внешней среды $env \in ENV$ (где ENV — множество всех сред) специфицируется как $env = \{S^{EX}, M^{EX}\}$, где S^{EX} — множество внешних ресурсов (товарных, сырьевых и т.д.), M^{EX} — множество внешних рынков.

Далее определим структуру самого экономического района.

Элемент $er \in ER$ можно представить в виде $er = \langle TPC_0, SQ, L_{TPC_0} \rangle$, где $TPC_0 \subset TPC$ — множество территориально-производственных комплексов, SQ — множество площадок, на которых можно разместить ТПК, L_{TPC_0} — это функция материально-товарных связей между ТПК, $L_{TPC_0} : TPC_0 \times TPC_0 \rightarrow M^I$. Она отображает два ТПК на некоторое подмножество множества внутрирайонных рынков.

Теперь рассмотрим, что в себя включает элемент $sq \in SQ$. Он имеет структуру $sq = \langle G, NR, NP \rangle$, где участок двумерного пространства $G \subset \mathcal{R}^2$ задает локацию площадки, $NR \subseteq S^I$ (S^I — множество внутрирайонных ресурсов) обозначает имеющиеся на площадке множество природных ресурсов, $NP \subseteq LP^I$ (LP^I — внутрирайонные трудовые ресурсы) обозначает имеющиеся на площадке трудовые ресурсы.

Опишем теперь активные сущности системы — агентов.

Агенты экономических районов. Такие агенты имеют собственное внутреннее состояние, состоящее из элемента $er \in ER_0$, могут взаимодействовать как друг с другом, так и со средой, в которую помещена система. Внешнее состояние агента описывается набором производственных специализаций экономического района в виде $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$, где f_i является элементом множества производственных специализаций $f_i \in F$, $i \in \{1, \dots, n\}$. В рамках данной модели предполагается, что производственные специализации ЭР образуются за счет внешних специализаций ТПК, находящихся на территории ЭР.

В модели также используются агенты ТПК, но их описание выходит за рамки данной работы.

Будем считать, что любая производственная специализация f соответствует некоторому элементу из множества товаров $pr \in PR$.

3.1 Переговоры о специализации

В процессе функционирования территориальной системы агенты экономических районов договариваются друг с другом о наборе специализаций системы. Каждый агент ЭР способен предложить только какой-то ограниченный спектр специализаций, в то время как все множество имеющихся в системе специализаций может быть шире. Более того, каждый район может делать лишь частичный вклад в конкретную специализацию системы. Например, один экономический район er_1 производит 60%, а другой экономический район er_2 производит 40% от всего объема продукции pr , поставляемой на внешний рынок. Однако для этого случая трудоемкость реализации переговоров даже для десяти районов и нескольких десятков специализаций является весьма впечатляющей, поэтому в данной работе будем исходить из предположения, что каждый экономический район в рамках специализации производит 100% требуемого товара.

Алгоритм ведения переговоров между агентами состоит из двух шагов:

- (1) генерация предложений;
- (2) выбор единственного предложения из уже имеющихся.

В зависимости от выбранного метода реализации шаги могут повторяться по нескольку раз. Например, это может произойти, когда агенты на каждой итерации алгоритма получают новую дополнительную информацию, которая влияет на состав генерируемых ими предложений.

Представим сделку λ между агентами ЭР в следующем виде:

$$\lambda = \left\{ \underbrace{f_1^1, \dots, f_{n_1}^1}_{\text{набор специализаций } er_1}, \dots, \underbrace{f_1^{|ER_0|}, \dots, f_{n^{|ER_0|}}^{|ER_0|}}_{\text{набор специализаций } er_2} \right\},$$

где f_j^i — производственная специализация er_i из набора, предлагаемого агентом экономического района er_i .

Каждый экономический район может иметь несколько возможных наборов собственных специализаций

$$\left\{ \begin{array}{l} \{f_{1,1}, \dots, f_{1,n_{j_1}}\}, \\ \{f_{2,1}, \dots, f_{2,n_{j_2}}\}, \\ \dots, \\ \{f_{m,1}, \dots, f_{m,n_{j_m}}\}, \\ \{ \} \end{array} \right\}.$$

Заметим, что это множество содержит в качестве элемента также и пустое множество.

Все множество сделок Λ описывается декартовым произведением множеств возможных наборов собственных специализаций экономических районов $er \in ER_0$:

$$\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} \{f_{1,1}^1, \dots, f_{1,n_{j_1,1}}^1\}, \\ \{f_{2,1}^1, \dots, f_{2,n_{j_2,1}}^1\}, \\ \dots \\ \{f_{m_1,1}^1, \dots, f_{m_1,n_{j_1,m_1}}^1\}, \end{array} \right\} \times \dots$$

$$\dots \times \left\{ \begin{array}{l} \{f_{1,1}^{|ER|}, \dots, f_{1,n_{j_1,1}}^{|ER|}\} \\ \{f_{2,1}^{|ER|}, \dots, f_{2,n_{j_2,1}}^{|ER|}\} \\ \dots \\ \{f_{m_{|ER|},1}^{|ER|}, \dots, f_{m_{|ER|},n_{j_{|ER|},m_{|ER|}}}^{|ER|}\} \end{array} \right\}$$

Теперь попытаемся оценить трудоемкость построения такого множества. Это важно ввиду следующего. Предположим, имеется некоторое множество сделок и необходимо выбрать такую из них, при которой территориальная система получит наибольший доход среди всех остальных сделок.

Так как элементы множества не упорядочены, задача выбора сделки (задача поиска в неупорядоченном массиве) в худшем случае будет иметь трудоемкость, пропорциональную числу элементов этого множества.

В данной работе будем исходить из предположения, что один экономический район производит товаров в рамках своей специализации вполне достаточно, чтобы полностью покрыть потребность в них на внешнем рынке, а также считаем, что число новых возможных специализаций для района и размер предлагаемого набора специализаций для развития невелики: 3 и 2 соответственно. Также учитываем то, что состав специализаций района может иметь переменную длину от 0 до 2 (т.е. множество предложений может содержать пустое множество). Однако полное число возможных специализаций для территориальной системы может быть и больше. Число экономических районов равно 12 (в соответствии с делением, принятым в [5]). При таких допущениях подсчитаем максимальное число сделок:

$$(C_3^2 + C_3^1 + 1)^{12} = 13841287201 \approx 1,4 \cdot 10^{10}.$$

Замечание: можно уменьшить размер получаемого множества путем введения ограничения на набор

специализаций для системы, т.е. он не должен содержать повторяющихся позиций, так как одинаковые специализации приводят к конкуренции, что, в свою очередь, влечет снижение доходов агентов и, следовательно, всей системы.

Алгоритм 1. Выбор набора специализаций территориальной системы.

1. Выбирается агент, принимающий предложения от других агентов, — посредник. Например, это может быть агент, соответствующий экономическому району с номером 1.

Замечание: экономические районы можно упорядочить по названиям в лексикографическом порядке, а затем присвоить им порядковые номера.

2. Агенты ЭР формируют наборы возможных специализаций и посылают их агенту-посреднику.
3. Агент-посредник на основе полученной информации формирует множество сделок и выбирает ту, которая принесет наибольший доход территориальной системе, с помощью функции R .
4. Окончательная сделка рассылается агентом-посредником всем остальным агентам.
5. Агенты из полученного сообщения извлекают свое множество специализаций.

Примечание 1. Можно преобразовать данный алгоритм в полностью децентрализованный, если обязать агентов рассылать свои предложения друг другу. Каждый агент, зная функцию R , может самостоятельно сформировать множество сделок и выбрать среди них наиболее полезную для популяции, после чего определить свой состав производственных специализаций. Можно утверждать, что все агенты получают в итоге одну и ту же сделку, если задать дополнительное условие: в случае, если доход от разных сделок одинаковый, то предпочтение отдается той, которая лексикографически меньше всех других.

Примечание 2. Для получения приемлемой сделки также можно использовать *монотонный протокол уступок и стратегию Жозена*, описанные в книге Вулдриджа, посвященной многоагентному моделированию [2]. Такое решение не гарантирует достижения глобального максимума на множестве сделок, однако с помощью него возможно заключение Парето-оптимальных сделок.

3.2 Функции развития и алгоритм выбора специализаций района

Теперь перейдем к вопросу формирования предложений в рамках экономического района $er \in ER$.

Будем считать, что каждый экономический район $er \in ER$ уже имеет некоторую совокупность отраслей специализации $\{f_1, \dots, f_n\}$, которая формируется за счет входящих в его состав ТПК.

Введем семейство функций $CH : 2^F \rightarrow 2^F$ (где F , как уже упоминалось, является множеством производств по специализациям):

- 1) CH_0 — пустая функция, которая отображает аргумент сам на себя;
- 2) CH_1 — функция, которая «ликвидирует» производства с отрицательной прибылью. Предположим, что имеется совокупность производственных отраслей экономического района $er \in ER_0$ представленная в виде $\{f_1, f_2\}$, причем f_2 является убыточной. Тогда $CH_1(\{f_1, f_2\}) = \{f_1\}$. Если убыточным окажется и производство f_1 , то значением функции станет пустое множество.
- 3) CH_2 — функция, отвечающая за применение новых технологий. Она не изменяет размер множества отраслей специализации экономического района $er \in ER$, однако способствует повышению доходности отрасли. Пусть имеются новые технологии для f_1 . Тогда $CH_2(\{f_1, f_2\}) = \{f'_1, f_2\}$.
- 4) CH_3 — функция, отвечающая за открытие новой производственной специализации или освоение нового ресурса. Пусть $\{f_1\}$ — имеющийся набор специализаций для экономического района $er \in ER$ и появилась возможность открытия новой специализации f_2 . Тогда $\{f_1, f_2\}$ будет принадлежать к множеству области значений данной функции. Заметим, что вариантов открытия новой производственной специализации может быть несколько, соответственно, для одного аргумента может быть несколько значений функции. В данной работе будем рассматривать только случай, когда функция либо не определена (как для данного аргумента, так и вообще), либо имеет единственное значение. В нашем случае $CH_3(\{f_1\}) = \{f_1, f_2\}$.

Замечание: Функции CH_1, CH_2, CH_3 заданы лишь частично, т.е. они определены не на всем множестве 2^F . Доопределим их функцией CH_0 , которая определена на всем множестве 2^F .

Теперь опишем простой алгоритм принятия решения о применении той или иной функции из

семейства CH (он используется агентами ЭР для формирования наборов специализаций при проведении переговоров). Для этого введем дополнительную функцию дохода экономического района для заданного набора специализаций (которая определяется аналогично функции дохода для территориальных систем). Функция $R : ER \times F \rightarrow \mathcal{R}$ преобразует экономический район с заданным набором отраслей в величину дохода, который будет иметь район с такими производствами.

Алгоритм 2. Выбор программы развития района.

Входные данные: er и $\{f_1, \dots, f_n\}$ (экономический район er с набором специализаций).

Последовательно применяем функции CH_0, CH_1, CH_2, CH_3 к одному и тому же набору $\{f_1, \dots, f_n\}$ и среди результатов выбираем те, при которых функция R принимает наибольшее значение.

Выходные данные: результаты в виде $\{f_1^*, \dots, f_n^*\}$ (набор специализаций, оптимальный по доходу на множестве результатов применения функций из семейства CH от аргумента $\{f_1, \dots, f_n\}$ для района er).

Очевидно, $R(er, \{f_1, \dots, f_n\}) \leq R(er, \{f_1^*, \dots, f_n^*\})$.

Замечание 1. В силу того что функций всего четыре, можно использовать все получившиеся результаты (а не только оптимальные) для дальнейшего выбора набора специализаций территориальной системы. Это увеличивает пространство возможных решений на уровне системы.

(Правильнее будет сказать, что число классов функций заданного вида равно четырем, однако в данной работе считается, что каждый из классов содержит только один элемент.)

Применение функции CH_3 на внутрирайонном уровне может приводить к тому, что в er возникнет потребность в определенном товаре, что может привести к появлению межрайонного рынка $m \in M^{NR}$ так же, как и к увеличению числа внешних связей территориальной системы.

4 Заключение

В работе описан один из возможных подходов к моделированию развития территориальных систем. Были освещены далеко не все аспекты, а лишь самые ключевые моменты: представление территориальной системы с помощью взаимодействующих агентов, выбор программы развития экономического района, формирование набора специализаций территориальной системы путем переговоров. В написании статьи очень помогли

работы М. К. Бандмана, М. Вулдриджа, Ф. Котлера, Н. Н. Колосовского и др. [1, 2, 6, 7].

В дальнейшем планируется подробно остановиться на алгоритмах модернизации и формирования ТПК в пределах экономического района в рамках описанной формальной модели.

Литература

1. Бандман М. К., Бурматова О. П., Воробьева В. В. Моделирование формирования территориально-производственных комплексов. — Новосибирск: Наука, 1976.
2. Wooldridge M. An introduction to multiagent systems. — New York: John Wiley & Sons, 2002.
3. Shoham Y., Leyton-Brown K. Multiagent systems: Algorithmic, game-theoretic, and logical foundations. — Cambridge University Press, 2009.
4. Фейерабенд П. Против метода. Очерк анархистской теории познания / Пер. с англ. А. Л. Никифорова. — М.: АСТ, 2007.
5. Общероссийский классификатор экономических регионов ОК 024-95 (ОКЭР). Утвержден постановлением Госстандарта РФ от 27 декабря 1995 г. № 640, в ред. изменения № 1, ноябрь 1998 г., с изм. и доп. № 2/99, № 3/2000, № 4/2001, № 5/2001.
6. Котлер Ф. Маркетинг менеджмент. — СПб.: Питер, 2001.
7. Колосовский Н. Н. Теория экономического районирования. — М.: Мысль, 1969.

О ДВУХ МОДЕЛЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

П. В. Демин¹

Аннотация: Приводятся два примера решения проблем, возникающих при организации инвестиционных процессов, связанных с модернизацией экономики. Первый относится к проблеме, возникающей в банке при решении вопроса выбора для финансирования из некоторого множества проектов. Второй — к решению задачи распределения инвестиционного ресурса между предприятиями, входящими в состав холдинга.

Ключевые слова: инвестиционный процесс; инновация; банковское финансирование; ресурсы; холдинг

1 Введение

В данной работе приводятся два примера решения проблем, возникающих при организации инвестиционных процессов, связанных с модернизацией экономики. Первый относится к проблеме, возникающей в банке при решении вопроса выбора для финансирования из некоторого множества проектов. Второй — к решению задачи распределения инвестиционного ресурса между предприятиями, входящими в состав холдинга. В первом случае проблеме удается свести к оптимальной дискретной задаче, в которой оптимизируется суммарный доход, полученный банком за рассматриваемый период времени. В качестве ограничений рассматриваются лимиты на доступные ресурсы в каждый из рассматриваемых моментов времени. Во втором случае решение сводится к построению многоэтапной модели распределения инвестиционных ресурсов. Обе задачи решаются при наличии как в банке, так и в холдинге базы первичных данных о предприятиях в целом, позволяющих рассчитывать необходимые для решения параметры и функции. Это объединяет оба примера. В силу сложности и размерности возникающих оптимизационных задач для решения используются элементы эвристических методик.

2 Модель выбора в банке проектов для финансирования

Важнейшим условием реализации инновационного проекта является наличие ресурсного обеспечения. Много в процессе поиска и предоставления необходимых ресурсов зависит от банка, клиентом которого является субъект, планирующий эту

реализацию. Рассмотрим модель, позволяющую банку выбрать вариант финансирования подмножества проектов из некоторого множества инвестиционных проектов. Учитывая, что такие проекты, как правило, отличаются большими сроками реализации и объемами финансирования (медленные процессы), задача решается на фоне текущей кредитной деятельности банка (быстрые процессы). Общие характеристики текущей деятельности банка входят параметрами в модель выбора подмножества инвестиционных проектов.

2.1 Формальная постановка

При формализации задачи важным является понятие варианта финансирования инвестиционного проекта. Пусть I — множество проектов, которые находятся в портфеле у банка и из числа которых банк может выбирать проекты для финансирования в соответствии с наличием ресурсов и представлениями о целесообразности их выделения. Введем переменные x_{iq} , где $q \in Q_i$, $i \in I$, Q_i — множество вариантов финансирования i -го проекта. Варианты могут различаться, например, сроками начала финансирования или объемами ресурсов, необходимых в конкретные моменты времени. Будем полагать, что

$$x_{iq} = \begin{cases} 1, & \text{если проект } i \in I \text{ финансируется} \\ & \text{по варианту } q \in Q_i; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим

$$x = \{x_{iq} / x_{iq} = 0, 1, q \in Q_i, i \in I\},$$

$$x \in X = \left\{ x / \sum_q x_{iq} \leq 1, i \in I \right\}.$$

¹Государственное образовательное учреждение «Московская академия рынка труда и информационных технологий», pdemin@mail.ru

Введем величины a_{iqt}, b_{iqt} , где a_{iqt} — объем ресурсов, необходимых для финансирования проекта $i \in I$ в момент $t \in [0, T]$, если финансирование происходит по варианту $q \in Q_i$, b_{iqt} — объем ресурсов, который возвращается банку в момент $t \in [0, T]$ при финансировании проекта по варианту $q \in Q_i$.

Будем также считать, что текущая деятельность банка заключается в обслуживании кредитных и депозитных договоров и ее можно описать следующими зависимостями ($t \in [0, T]$):

$z(t)$ — средний суммарный остаток на расчетных счетах банка в момент времени t ;

$d(t)$ — средний суммарный остаток на депозитных счетах в момент времени t ;

$S(t)$ — средняя суммарная величина выплат процентов по депозитным счетам в момент времени t ;

$A(t)$ — величина предоставляемых в момент времени t кредитных ресурсов;

$B(t)$ — величина возвращаемых в момент времени t кредитных ресурсов.

Тогда задачу выбора вариантов финансирования инвестиционных проектов можно записать в виде

$$\max_{x \in X} \sum_i \sum_q \left[\sum_t b_{iqt} - a_i^0 \right] x_{iq}, \quad (1)$$

$$\sum_{\tau=1}^t \left[\sum_i \sum_q a_{iq\tau} x_{iq} + A(\tau) \right] \leq z(t) + d(t) + \sum_{\tau=1}^t \left[B(\tau) - S(\tau) + \sum_i \sum_q b_{iq\tau} x_{iq} \right], \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где a_i^0 — суммарная величина ресурсов, необходимых для финансирования i -го проекта.

Задача (1), (2) имеет прозрачный физический смысл: для финансирования выбираются проекты, которые приносят максимальный доход банку, при этом сумма размещенных активов в каждый момент времени не должна превышать текущих пассивов. (Здесь для простоты изложения будем считать, что собственные средства банка полностью расходуются на предоставление краткосрочных кредитов).

2.2 Построение решения поставленной задачи

Задачу (1), (2) запишем в виде:

$$\max_{x \in X} \{f(x) | g(x) \geq 0\}, \quad (3)$$

где $f(x)$ — целевая функция, $g(x) \geq 0$ — вектор ограничений. Пусть $L(x, y) = f(x) + y \times g(x)$ —

функция Лагранжа для задачи (3). Известно, что $\max_{x \in X} \min_{y \geq 0} L(x, y) \leq \min_{y \geq 0} \max_{x \in X} L(x, y) = \omega^*$.

Нахождение $\max_{x \in X} \min_{y \geq 0} L(x, y)$ соответствует решению исходной задачи (3). Задачу $\min_{y \geq 0} \max_{x \in X} L(x, y)$ называют двойственной. Решение двойственной задачи позволяет получить оценку сверху ω^* для значения исходной задачи и служит эвристическим способом построения допустимого решения для исходной задачи. Обоснование метода решения двойственной задачи содержится в [1]. Его идея заключается в следующем. Можно показать, что

$$\omega^* = \min_{\omega, y} \{ \omega | \omega \geq f(x) + y \times g(x), x \in X_y, y \geq 0 \}, \quad (4)$$

где $X_y = \text{Arg max}_x \{L(x, y) | y \geq 0, x \in X\}$, т.е. множество решений, доставляющих максимум функции Лагранжа при всех возможных неотрицательных значениях вектора двойственных переменных. Задачу (4) можно решать методами линейного программирования, итерационно добавляя существенные ограничения и отбрасывая несущественные. При этом из построенных элементов множества X_y , допустимых для исходной задачи, выбирается такой, который максимизирует целевую функцию исходной задачи. Несмотря на то, что строго доказать существование допустимого для исходной задачи элемента множества X_y удалось только для одного ограничения, реальные вычисления показывают, что такой элемент получается практически всегда.

3 Модель распределения ресурсов между предприятиями холдинга

В период инновационного развития экономики в крупных холдингах возникает задача распределения ресурсов развития между предприятиями с таким расчетом, чтобы получить максимальный желаемый эффект. Рассмотрим многоэтапную модель распределения ресурсов, влияющих на инновационное развитие предприятий, входящих в холдинг. Решения о распределении ресурсов развития принимаются (как это обычно и происходит в жизни) в дискретные моменты времени. Предложенный алгоритм оптимизации не претендует на глобальность, но прозрачен и прост в реализации. Его можно рассматривать как инструмент при скользящем планировании распределения ресурсов, когда решения принимаются на шаг вперед.

3.1 Описание холдинговой структуры

Рассмотрим организационную структуру холдингового типа. Предприятия связаны холдинго-

выми отношениями, позволяющими одному из них (головной компании) определять решения, принимаемые другими участниками холдинга.

Головная компания осуществляет: централизованное управление активами холдинга; управление корпоративной стратегией; мониторинг процессов, проходящих в холдинге в необходимом временном режиме; контроль интегральных и мониторинг частных целевых показателей бизнес-планов.

3.2 Модель холдинговой системы

Рассматриваемая система является иерархической, с вертикальными связями. В системе имеется управляющий центр и элементы более низкого уровня.

Пусть в состав холдинговой структуры входит N предприятий, t — номер дискретного интервала времени, на котором рассматривается деятельность холдинга, всего рассматривается T интервалов времени. Предположим, что для n -го элемента холдинговой системы можно построить функцию $F_n(z_{nt})$, где $F_n(\cdot)$ — объем выпущенной продукции (в денежном выражении) на конец рассматриваемого периода; z_{nt} — объем средств, направляемых на улучшение и модернизацию n -го производства в интервале времени t . Обозначим $z = \{z_t | t, \dots, T\}$, $z_t = \{z_{nt} | n = 1, \dots, N\}$.

Целью управляющего центра является рост консолидированной прибыли холдинга на протяжении долгосрочного периода. В качестве критерия развития холдинга примем функционал $\sum_n b_n F_n(z_{nT})$. Таким образом, рассматривается задача нахождения

$$\max_z \sum_n b_n F_n(z_{nT}) \quad (5)$$

при выполнении ограничений

$$\sum_n z_{nt} \leq \lambda \sum_n F_n(z_{n,t-1}), \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad z \geq 0. \quad (6)$$

Параметр λ считается заданным центром. Предполагается, что для $t = 0$ известен начальный распределяемый инвестиционный ресурс.

Вместо решения задачи (5), (6) будем для каждого t , начиная с 1, последовательно решать оптимальные задачи

$$\max_{z_t} \left\{ \sum_n b_n F_n(z_{nt}) \mid \sum_n z_{nt} \leq \lambda \sum_n F_n(z_{n,t-1}), \quad z_t \geq 0 \right\}. \quad (7)$$

Оптимизацию по z_t для каждого t можно проводить с помощью процедуры динамического программирования [2]. Не вдаваясь в подроб-

ности этой хорошо известной процедуры, отметим только, что в ходе ее реализации при перемещении от N до 1 строятся функции $\varphi_n(c) = \max_{z_t} \left\{ \sum_{k=n}^N b_k F_k(z_{kt}) \mid \sum_{k=n}^N z_{kt} \leq c, c \geq 0 \right\}$, удовлетворяющие рекуррентному соотношению $\varphi_{n-1}(c) = \max_{z_{n-1,t}} \{ \varphi_n(c - z_{n-1,t}) + b_{n-1} F_{n-1}(z_{n-1,t}) \}$.

Затем при перемещении в обратном направлении получают оптимальное решение задачи (7), т. е. находят распределение инвестиций по предприятиям, входящим в холдинг.

4 Заключение

В работе рассмотрены две модели, связанные с организацией финансирования инвестиционных процессов. Одна модель описывает процесс выбора проектов для финансирования в банке. Вторая — процесс распределения инвестиционных ресурсов между предприятиями, входящими в состав холдинга.

Задачи, встающие при организации инвестиционных процессов, подобные рассмотренным выше, возникают и в банках, и в крупных холдингах повсеместно. Если реализовать приведенные модели в соответствующих интерактивных системах для организации финансирования инвестиционных процессов, то практическая польза окажется существенно выше, чем при простом поиске оптимальных решений поставленных задач. Например, кредитное управление банка чрезвычайно заинтересовано в оценке дохода (ω^*), который можно получить при имеющемся портфеле проектов и прогнозе доступных ресурсов. Более того, эффективность решений по привлечению ресурсов банком может быть существенно повышена, если заранее указать моменты времени, в которые намечается избыток или недостаток ресурсов, а это модель позволяет сделать.

Несмотря на востребованность, постановочные работы подобного плана практически отсутствуют. В какой-то мере это объясняется тем, что необходимые для моделей параметрические зависимости рассчитываются при наличии в организации базы первичных данных по организации в целом.

Литература

1. Демин В. К., Малащенко Ю. Е. Получение оценочных решений для задач оптимального резервирования // Известия АН СССР, Техническая кибернетика, 1974. № 1. С. 112–117.
2. Замков О. И., Черемных Ю. А., Толстопятенко А. В. Математические методы в экономике: Учебник. — 4-е изд., стереотип. — М.: Дело и сервис, 2004. 368 с.

АЛГОРИТМ СРАВНЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ РАДУЖНОЙ ОБОЛОЧКИ ГЛАЗА НА ОСНОВЕ КЛЮЧЕВЫХ ТОЧЕК*

Е. А. Павельева¹, А. С. Крылов²

Аннотация: Предложен алгоритм сравнения изображений радужных оболочек глаза на основе сравнения ключевых точек изображений. Ключевые точки определяются как точки с наибольшим значением свертки с функциями преобразования Эрмита. Для повышения эффективности алгоритма предложено исследовать только те области изображения, которые свободны от век, ресниц и бликов, а также учитывать возможность поворота глаза. Предложенный алгоритм протестирован на общедоступной базе изображений радужных оболочек глаз CASIA-IrisV3.

Ключевые слова: биометрическая идентификация; радужная оболочка глаза; преобразование Эрмита; ключевые точки

1 Введение

Извлечение информативных признаков изображений радужной оболочки глаза состоит из двух этапов: сегментации (определения областей радужной оболочки на изображении) и параметризации (вычисления информативных признаков). На этапе сегментации [1] на изображении выделяются области радужной оболочки, не закрытые ресницами, веками и бликами (рис. 1). Эти области радужной оболочки называются маской радужной оболочки. На этапе параметризации [2, 3] извлекаются ин-

формативные признаки (параметры) изображения радужной оболочки для областей маски радужной оболочки. По этим параметрам происходит сравнение и идентификация радужных оболочек.

В работе [4] предложен метод параметризации радужных оболочек на основе выделения ключевых точек радужной оболочки методом преобразования Эрмита [5]. Этот метод показал хорошие результаты на базе данных CASIA-IrisV3 [6], но, тем не менее,

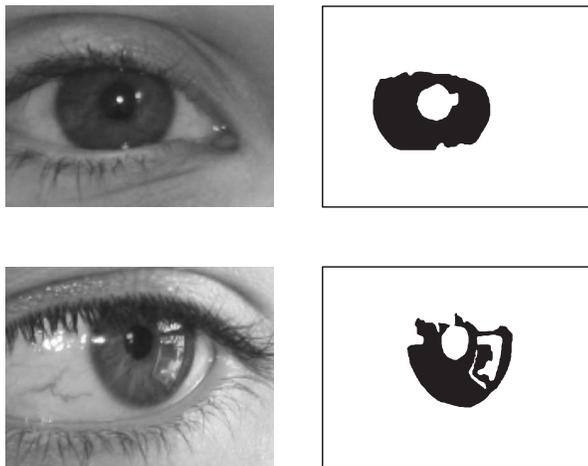


Рис. 1 Примеры изображений радужных оболочек глаз и их масок

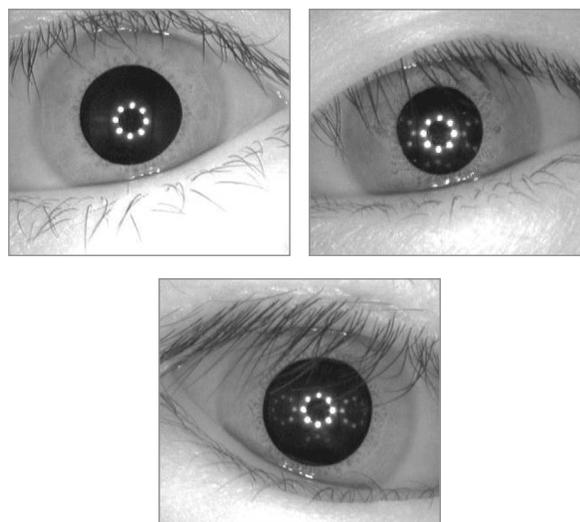


Рис. 2 Примеры изображений глаз из базы данных CASIA

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-07-00433 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. Статья подготовлена по результатам работы секции «Биометрия» 20-й Международной конференции по компьютерной графике и зрению Графикон-2010, г. С.-Петербург, 20–24 сентября 2010 г.

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, paveljeva@yandex.ru

²Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, kryl@cs.msu.ru

0,23% глаз были распознаны неверно. Примеры глаз из базы данных CASIA показаны на рис. 2.

В данной работе предложена модификация метода ключевых точек идентификации человека по радужной оболочке глаза. Для каждого изображения из базы данных автоматически строится маска, определяющая области радужной оболочки без посторонней информации — век, ресниц и бликов. Для пары глаз общей маской называется пересечение индивидуальных масок. При сравнении двух радужных оболочек ключевые точки ищутся только внутри областей их общей маски.

2 Постановка задачи

Общая схема алгоритма распознавания человека по ключевым точкам, предложенная в [4] и используемая в данной работе, заключается в следующем.

После выделения (локализации) радужная оболочка глаза переводится в прямоугольное нормализованное изображение (рис. 3). Далее в области параметризации нормализованного изображения находятся ключевые точки радужной оболочки методом преобразования Эрмита. Для определения обладателя входной радужной оболочки в базе данных происходит сравнение матриц ключевых точек [4].

Ранее в качестве области параметризации рассматривалась только правая верхняя четверть нормализованного изображения (см. рис. 3). В данной работе анализируется все нормализованное изображение, из которого выделяется область параметризации (маска).

При сравнении изображений радужных оболочек на изображениях не должны присутствовать области век, бликов и ресниц. В противном случае большинство ключевых точек будут соответство-



Рис. 3 Локализация и нормализация радужной оболочки

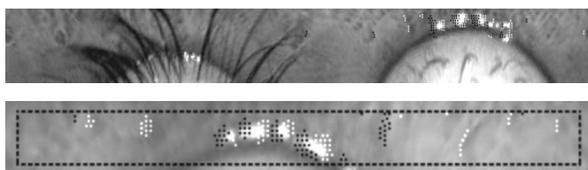


Рис. 4 Нормализованное изображение глаза, на область параметризации (пунктирная область) которого попали веко и блики

вать этим областям (рис. 4), так как в них происходит наибольший скачок интенсивности изображения, характеризуемый сверткой с выбранной в [4] функцией преобразования Эрмита $\varphi_{1,0}$ (рис. 5). Поэтому в данной работе строится маска изображения, закрывающая области бликов, век и ресниц, попадающих на радужную оболочку.

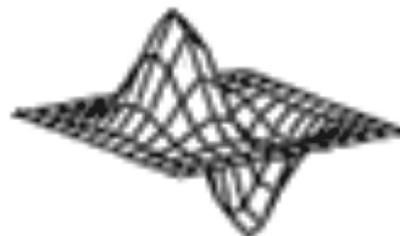


Рис. 5 Функция преобразования Эрмита $\varphi_{1,0}(x, y) = -(\sqrt{2}/\pi)xe^{-(x^2+y^2)}$

3 Построение маски изображения

Маска изображения радужной оболочки $mask$ в точке (i, j) равна 1, если точка не закрыта веком, ресницами или бликами. В противном случае значение маски в данной точке равно 0. Для нахождения бликов, век и ресниц используется детектор границ Канни [7] (Canny Edge detector).

Бликами считаются точки исходного изображения с интенсивностью выше 245, лежащие на определенных методом Канни границах или прилегающие к ним. Метод Канни применяется в работе дважды: сначала с порогами $TL = 0$, $TH = 30$ для сильно размытого Гауссом с $\sigma = 5$ изображе-

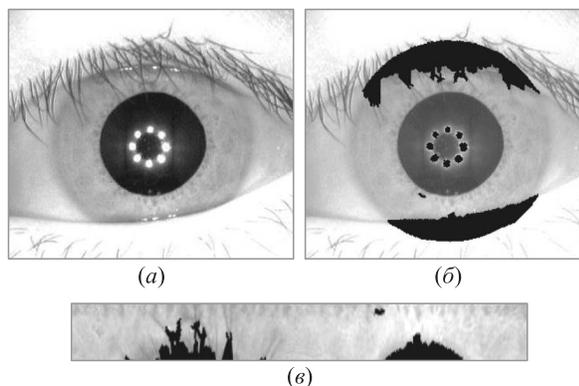


Рис. 6 Исходное изображение (а); изображение с наложением маски (б); маска на нормализованном изображении (в). Черные области — точки, не принадлежащие маске

ния (выделяются наиболее четкие границы); затем с параметрами $\sigma = 1$, $TL = 0$, $TH = 50$. При втором применении метода рассматриваются лишь те границы, которые примыкают к выделенным на предыдущем этапе четким границам.

Результат работы алгоритма выделения маски изображения показан на рис. 6.

4 Определение угла поворота глаза методом полярного преобразования Эрмита

Если одно изображение повернуто на угол φ относительно другого (рис. 7), то при их сравнении необходимо учитывать угол поворота. Для этого нормализованное изображение перед параметризацией необходимо циклически сдвинуть (что соответствует повороту исходного изображения) на число пикселей, соответствующее углу поворота.

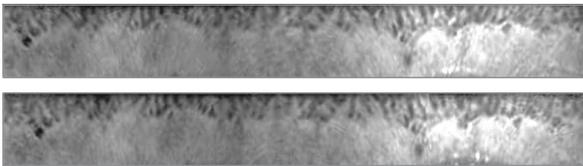


Рис. 7 Нормализованные изображения двух радужных оболочек до поворота

Для определения угла поворота глаза в работе используется метод полярного преобразования Эрмита.

Пусть $l_{i,j}$ — декартовы коэффициенты Эрмита [8, 9] для изображения, т.е. коэффициенты Фурье разложения изображения в ряд по функциям Эрмита (собственным функциям преобразования Фурье):

$$l_{i,j} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} I(x,y) \psi_{i,j}(x,y) dx.$$

Полярные коэффициенты Эрмита $l_{n-k,k}^p$ вычисляются через декартовы коэффициенты Эрмита $l_{n-m,m}$ по формулам:

$$l_{n-k,k}^p = \sum_{m=0}^n G_n^{\tilde{c}p}(m,k) l_{n-m,m};$$

$$G_n^{\tilde{c}p}(m,k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_{n-m,m}^c(\omega) \tilde{\alpha}_{n-k,k}^p(\omega) d\omega;$$

$$\alpha_{n-m,m}^c(\omega) = \sqrt{\frac{n!}{(n-m)!m!}} \cos^{n-m} \omega \sin^m \omega,$$

$$m = 0, \dots, n;$$

$$\tilde{\alpha}_{n-k,k}^p(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2^n(n-k)!k!}{n!}} \sqrt{2} \cos(n-2k)\omega, & 0 \leq k < \frac{n}{2}; \\ \sqrt{\frac{2^n(n-k)!k!}{n!}}; & k = n-k; \\ \sqrt{\frac{2^n(n-k)!k!}{n!}} \sqrt{2} \sin(n-2k)\omega, & \frac{n}{2} < k \leq n \end{cases}$$

и обладают следующим свойством: при повороте исходного изображения на угол φ полярные коэффициенты пересчитываются по формуле:

$$\begin{bmatrix} l_{n-m,m}^p(\varphi) \\ l_{m,n-m}^p(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(n-2m)\varphi & \sin(n-2m)\varphi \\ -\sin(n-2m)\varphi & \cos(n-2m)\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{n-m,m}^p \\ l_{m,n-m}^p \end{bmatrix}.$$

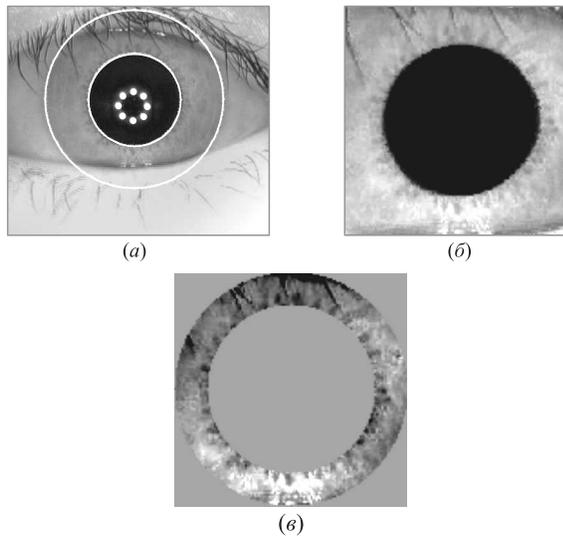


Рис. 8 Исходное изображение (а) и получение нормализованного изображения (б) и (в)

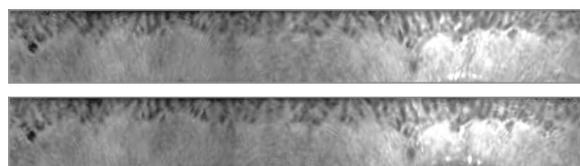


Рис. 9 Нормализованные изображения после поворота

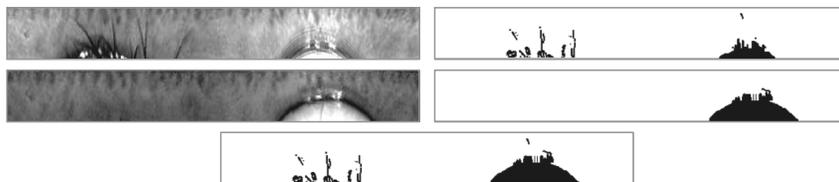


Рис. 10 Общая маска двух изображений (маска обозначена белым цветом) и сужение общей маски

Таким образом, для вычисления полярных коэффициентов Эрмита для повернутого на заданный угол φ изображения достаточно умножить коэффициенты исходного изображения (без поворота) на матрицу поворота.

Для того чтобы вычислять угол поворота одного глаза относительно другого, изображения глаз приводятся к нормализованному виду — квадрату фиксированного размера $N \times N$. Для этого сначала зрачок переводится в центр оболочки и приводится к нормализованному размеру ($r' = N/3$). Далее радужная оболочка приводится к фиксированному размеру шириной в 64 пикселя, и нормализованным изображением считается часть изображения, попавшая в квадрат $N \times N$ (рис. 8, б). Для определения угла поворота в нормализованном изображении рассматривается только кольцевая область радужной оболочки (рис. 8, в).

Далее считаются полярные коэффициенты Эрмита $l_{n-i,i}$ для $n = 0, 1, \dots, 63$, $i = 0, 1, \dots, n$ для изображения и полярные коэффициенты для этого же изображения, повернутого на углы $\varphi = \pm 2^\circ, \pm 4^\circ, \dots, \pm 20^\circ$. Все эти коэффициенты сравниваются с полярными коэффициентами второго изображения по метрике суммы квадратов отклонения коэффициентов. Угол, соответствующий минимальному отклонению коэффициентов, считается углом поворота между изображениями глаз. Пример работы алгоритма определения угла поворота показан на рис. 9.

После коррекции поворота двух изображений глаз составляется общая маска этих глаз, являющаяся пересечением масок изображений (рис. 10).

5 Алгоритм нахождения ключевых точек изображений радужных оболочек

Для нахождения ключевых точек гистограмма нормализованного изображения внутри области общей маски приводится к эквализованному виду (рис. 11), и на полученном изображении ищутся ключевые точки. Для этого в каждой точке маскированного изображения вычисляется величина

$F(x_0, y_0) = (I(x, y)\varphi_{1,0}(x, y))(x_0, y_0)$, где φ — функция преобразования Эрмита. В качестве кода радужной оболочки (ключевых точек) рассматривается N ($N = 300$) точек, разбитых на две группы: $N/2$ точек с максимальными значениями F (черные точки на рис. 12), удаленных друг от друга не менее чем на 2 пикселя, и аналогично $N/2$ — с минимальными значениями F (белые точки). Выбор данного числа ключевых точек будет обоснован ниже.

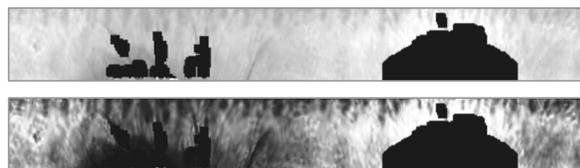


Рис. 11 Нормализованное изображение с наложением общей маски до и после эквализации гистограммы



Рис. 12 Выделение ключевых точек на изображении с наложением общей маски

5.1 Определение оптимального числа ключевых точек для параметризации

В работе [4] было показано, что в случае поиска ключевых точек только в правой верхней четверти нормализованного изображения оптимальным числом является 150 ключевых точек (рис. 13).

На основе этого факта определяется оптимальное число ключевых точек для параметризации маскированного изображения. Поскольку ключевые точки разбиваются на две группы (половина точек с максимальными значениями свертки, половина — с минимальными), то дальнейшие действия производятся с каждой из групп по отдельности.

Пусть для изображения i максимальное значение свертки при выделении ключевых точек равно M_i , а значение свертки для последней взятой ключевой точки из данной группы равно M_i/k_i .

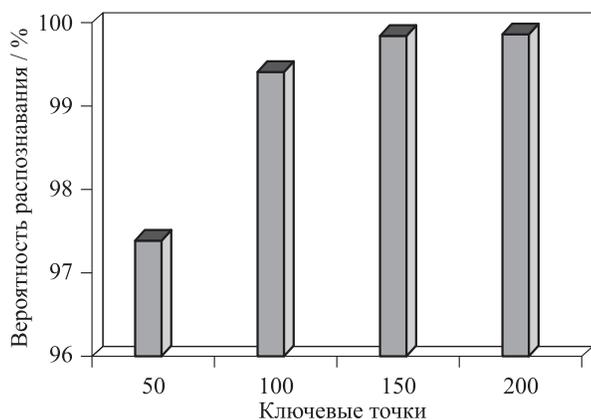


Рис. 13 График зависимости вероятности верного распознавания от числа взятых ключевых точек

Усреднив значения k_i по всей базе данных, получаем значение $k_{\text{mean}} = 2,08$. Соответственно, в данной работе для изображения i ищется N_i ключевых точек, которые попадают в диапазон $[M_i/k_{\text{mean}}, M_i]$. Усреднив это значение по базе данных, получаем $N_{\text{mean}} = 300$.

5.2 Результаты

Для оценки эффективности предложенного метода ключевых точек протестирована часть базы данных, содержащая все изображения глаз, которые в работе [4] (с использованием фиксированной области параметризации — верхней правой четверти изображения радужной оболочки глаза) давали ошибку распознавания. При параметризации радужных оболочек с учетом маски все эти глаза распознаются верно. Таким образом, применение метода ключевых точек в задаче распознавания человека по радужной оболочке глаза позволяет получить 100%-ное распознавание на базе данных CASIA-IrisV3.

6 Заключение

В работе предложен алгоритм сравнения радужных оболочек глаза, полученный путем модифика-

ции ранее предложенного алгоритма, основанного на нахождении ключевых точек методом преобразования Эрмита. В новом алгоритме строится маска областей изображения, свободных от век, ресниц и бликов, с учетом возможности поворота глаза. Предложенный метод распознавания использует оптимальное число ключевых точек и позволяет достичь безошибочного распознавания на базе данных CASIA-IrisV3.

Литература

1. *Proenca H.* Iris recognition: On the segmentation of degraded images acquired in the visible wavelength // IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010. Vol. 32. No. 8. P. 1502–1516.
2. *Daugman J.* How iris recognition works // IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2004. Vol. 14. No. 1. P. 21–30.
3. *Hollingsworth K., Bowyer K., Flynn P.* The best bits in an iris code // IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2009. Vol. 31. No. 6. P. 964–973.
4. *Павельева Е. А., Крылов А. С.* Поиск и анализ ключевых точек радужной оболочки глаза методом преобразования Эрмита // Информатика и её применения, 2010. Т. 4. Вып. 1. С. 79–82.
5. *Martens J.-B.* The Hermite transform-theory // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. P. 1595–1606.
6. База данных CASIA-IrisV3. <http://www.cbsr.ia.ac.cn/IrisDatabase.htm>.
7. *Canny J.* A computational approach to edge detection // IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1986. Vol. 8. P. 34–43.
8. *Martens J.-B.* Local orientation analysis in images by means of the Hermite transform // IEEE Transactions on Image Processing, 1997. Vol. 6. No. 8. P. 1103–1116.
9. *Kutovoi A. V., Krylov A. S.* A new method for texture-based image analysis // GraphiCon'2006: Conference Proceedings. — Novosibirsk, 2006. P. 235–238.

АЛГОРИТМ АВТОМАТИЧЕСКОГО ВЫДЕЛЕНИЯ ЛИЦА НА ТЕРМОГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ*

Н. С. Баша¹, Л. А. Шульга²

Аннотация: Представлен подход к исследованию термографических изображений человека для задач интеллектуального видеонаблюдения. Предложен алгоритм автоматического выделения лица в инфракрасном (ИК) спектре излучения, приведены результаты его работы и проведен анализ эффективности на базе данных, состоящей из 103 термографических портретов 15 человек разного пола, возраста и телосложения, сделанных в различных условиях окружающей среды.

Ключевые слова: распознавание образов; анализ изображений; системы видеонаблюдения; термография; детекция лица

1 Введение

В настоящее время для задач видеонаблюдения все чаще применяются устройства, позволяющие улавливать ИК излучение объекта и получать его температурные карты (термограммы). Для получения термографических изображений используются специальные тепловизионные камеры (тепловизоры или термографы). Существенными преимуществами их использования по сравнению с видеокамерами являются:

- нечувствительность к освещенности объекта и способность работать в полной темноте;
- способность давать вполне приемлемое для опознавания изображение даже при значительном удалении от человека;
- нечувствительность к внешней маскировке (например, элементам макияжа).

Эти отличительные черты позволяют применять термографию в тех условиях, когда получение изображения с видеокамеры недостаточно для реализации поставленных целей [1, 2].

Работы, связанные с задачами распознавания лиц в ИК-диапазоне, ведутся последние 10 лет и решаются с помощью высокочувствительных видеокамер, работающих в отраженном ИК-диапазоне. Возможность применять тепловизионные камеры для данного рода исследований появилась недавно.

Информационными признаками в термографии служат подкожные рисунки артерий и вен, которые уникальны и неизменны для каждого человека, так как сосудистый рисунок не зависит от температуры

лица, пластических операций и фактора старения человека.

2 Методы исследования

2.1 База данных

Для апробации предложенного метода детекции лица была собрана база термографических изображений. Все изображения, приведенные в статье (рис. 1), получены термографом «ИРТИС-2000МЕ» и представляют собой матрицу температур размером 240×320 , снятых в спектральном диапазоне 3–5 мкм, с точностью изменения температур $0,01^\circ\text{C}$. База термографических данных состоит из

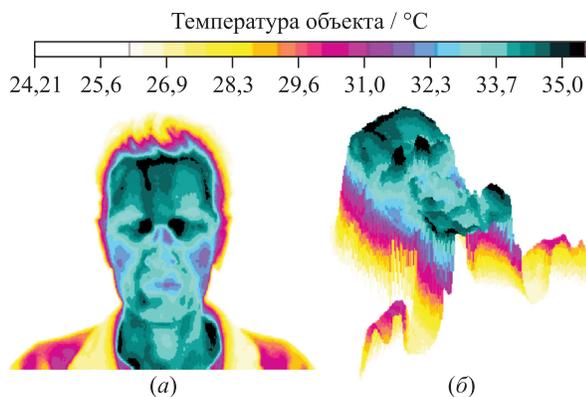


Рис. 1 Изображение лица, полученное термографом «ИРТИС-2000МЕ»: (а) двумерное изображение термограммы лица; (б) трехмерное отображение термограммы лица

*Статья подготовлена по результатам работы секции «Биометрия» 20-й Международной конференции по компьютерной графике и зрению Графикон-2010, г. С.-Петербург, 20–24 сентября 2010 г.

¹Научно-исследовательский институт прикладной акустики, Международный университет природы, общества и человека «Дубна», natalia.basha@niipa.ru

²Научно-исследовательский институт прикладной акустики, luda.shulga@niipa.ru

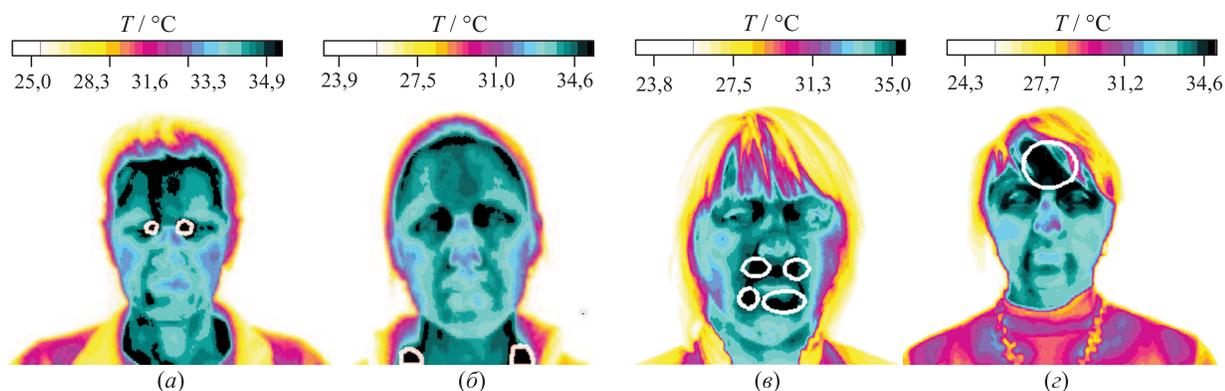


Рис. 2 Изображения лица, полученное термографом: (а) гипертермия области внутренних углов глаз (норма); (б) симметричная гипертермия в области ключиц, на границе с одеждой; (в) гипертермия в области носа и рта; (г) гипертермия в области лба, частично разрываемая волосами

103 снимков 15 людей разного возраста, пола и телосложения. Термограммы получены в разное время суток, при разных условиях окружающей среды (в помещении и на улице). Сбор данных проводился еженедельно в течение 4 месяцев.

2.2 Алгоритм автоматического поиска лиц на термографических изображениях

Проведено исследование физиологических особенностей лица человека с целью выделения универсальной и стабильной температурной области, которую можно использовать как область привязки при выделении области лица.

В результате исследования было выяснено, что внутренний угол глаза здорового человека дает наиболее интенсивный отклик в ИК-диапазоне (рис. 1 и 2, а). Экспериментально были замечены некоторые отклонения от общей тенденции. Основные причины: симметричные зоны, связанные с гипертермией на границе открытых и закрытых участков тела (рис. 2, б), с воспалительными процессами (рис. 2, в), с вегетососудистой дистонией (рис. 2, г). Результаты наблюдений были учтены при разработке алгоритма детекции лица. Поэтому в качестве опорных точек области интереса были выбраны точки внутренних углов глаз (рис. 3, а). Использование данных меток эффективно потому, что с их помощью по коэффициентам пропорциональности на лице можно вычислить размеры самого лица (рис. 3, б) и расположение основных деталей [3].

Рассмотрим алгоритм автоматического выделения области лица, базирующийся на детекции внутренних углов глаз. Анализируя тепловые профили, соответствующие зоне внутренних углов глаз, было установлено, что данные точки на профиле

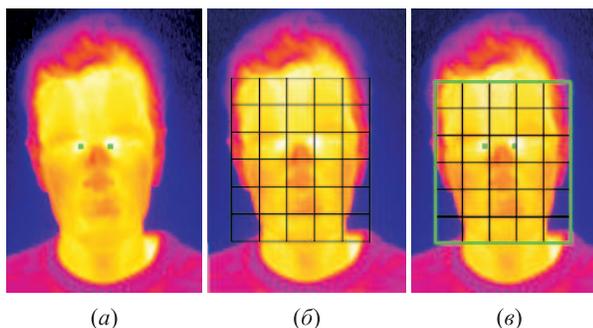


Рис. 3 Алгоритм автоматической детекции лица: (а) выставление меток, соответствующих внутренним углам глаз; (б) наложение маски коэффициентов пропорциональности лица человека; (в) результат детекции лица

представляются в виде двух четко выраженных пиков, симметричных относительно серединной линии лица. Тепловой профиль по строке, соответствующей зоне внутренних углов глаз, приведен на рис. 4.

Разработанный алгоритм выделения области лица состоит из нескольких этапов.

Первый этап: пороговая фильтрация

Первым этапом является предварительная обработка изображения методом пороговой фильтрации с целью выделения из окружающей среды объекта, который может оказаться человеком. Значение порога было установлено экспериментально на уровне $\min + (\max - \min) / 3$, где \min и \max — соответственно минимальное и максимальное значения температуры на термограмме. Для человека это значение порога соответствует температуре кожи и не включает одежду и волосы. Для каждой строки изображения находится левая и правая граница

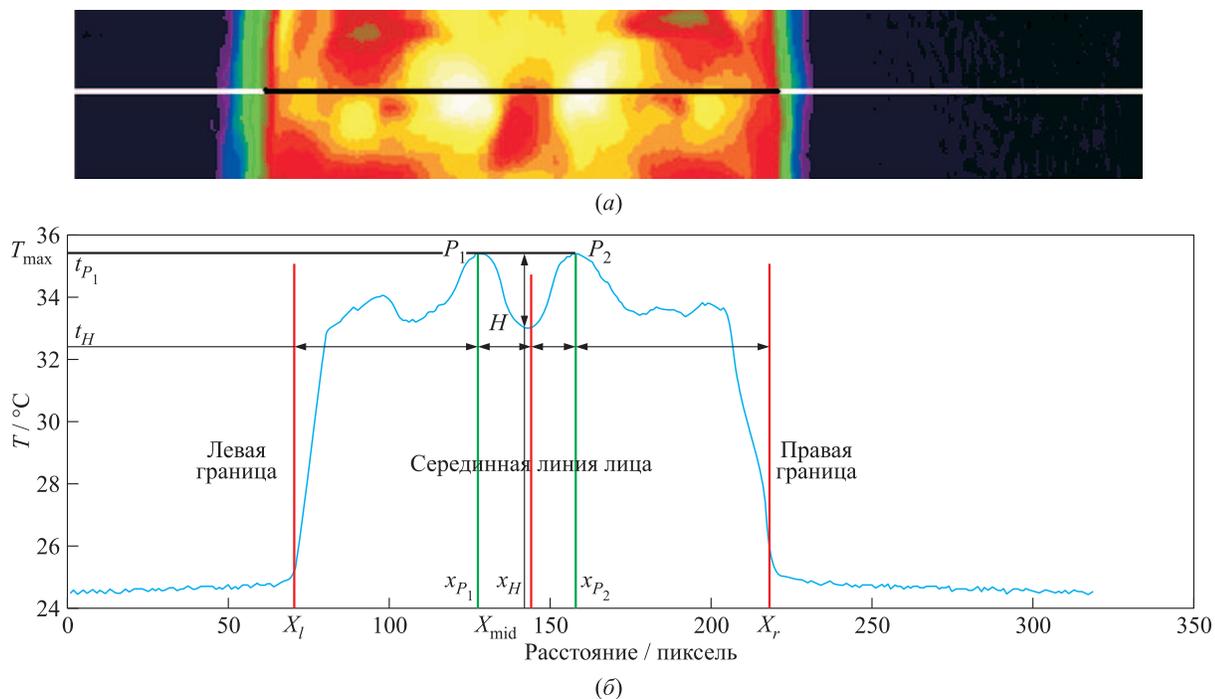


Рис. 4 Тепловой профиль по строке, соответствующей зоне внутренних углов глаз: (а) часть исходного изображения термограммы лица (линией выделена строка, содержащая внутренние углы глаз); (б) соответствующий ей тепловой профиль

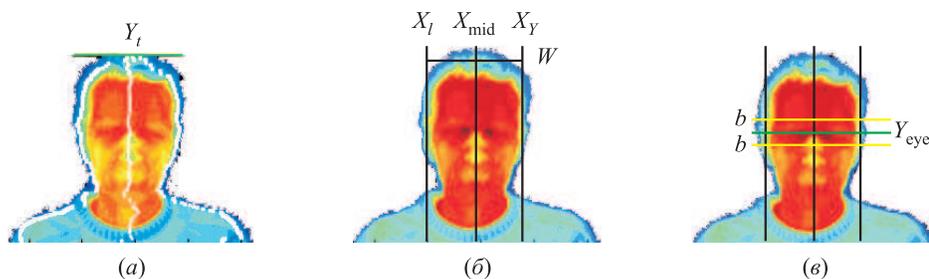


Рис. 5 Процесс выделения лица: (а) этап I: пороговая фильтрация и определение верхней границы лица; (б) этап II: определение моды правой и левой границ лица; (в) этап III: выделение и корректировка линии глаз

области предполагаемого лица, а также точка Y_t для всего изображения, соответствующая верхней точке потенциальной области лица (рис. 5, а).

Второй этап: вычисление интервала для нахождения линии глаз

На втором этапе вычисляется мода для левой и правой границы предполагаемой области лица (X_l и X_r соответственно), мода для средней линии области X_{mid} (как мода середины отрезка между правой и левой границей каждой конкретной строки выделенной области изображения) и мода ширины области W (как мода разности между правой и левой границей каждой конкретной строки выделенной области изображения, рис. 5, б). Эксперименталь-

но было установлено, что значение моды ширины области предполагаемого лица соответствует ширине реального лица на уровне глаз.

Исходя из пропорций лица, значения верхней точки головы и значения средней ширины рассчитывается теоретическое значение линии глаз

$$Y_{eye} = Y_t + \text{round} (0,68 \times W) .$$

Экспериментально установлено, что для нахождения реального уровня глаз необходимо задать окрестность b . Таким образом, реальный уровень глаз будет находиться в диапазоне (рис. 5, в)

$$[Y_{eye} - b; Y_{eye} + b] . \tag{1}$$

Третий этап: поиск линии глаз

Как было установлено выше, глаза являются зонами гипертермии. Поэтому на выделенном интервале (1) ведется поиск значения максимума температуры T_{max} . Затем построчно осуществляется проход маской с двумя пиками (обозначаемыми P_1 и P_2) и впадиной (H) всего выделенного интервала. Среди строк, удовлетворяющих условиям маски, в качестве линии глаз выбирается строка y_0 , где (см. рис. 4):

- значение одного из пиков равно максимуму на интервале

$$t_{P_1} = T_{max} \parallel t_{P_2} - T_{max};$$

- пики симметрично расположены относительно средней линии

$$x_{P_1} - W = W - x_{P_2};$$

- пики симметрично расположены относительно соответствующих границ лица

$$x_{P_1} - X_l = X_r - x_{P_2};$$

- впадина расположена на средней линии

$$x_H = X_{mid};$$

- разница температур между пиком и впадиной больше порогового значения (экспериментально было установлено пороговое значение, равное $0,5^\circ\text{C}$):

$$T_{max} - t_H > 0,5^\circ\text{C},$$

где x_{P_1} , x_H и x_{P_2} — значения абсцисс точек P_1 , H и P_2 , а t_{P_1} , t_H и t_{P_2} — значения температур в точках (x_{P_1}, y_0) , (x_H, y_0) и (x_{P_2}, y_0) соответственно.

Четвертый этап: определение области лица

На изображении расставляются маркеры глаз (соответствующие выбранным пикам P_1 и P_2). Вычисляется ширина области предполагаемого лица на уровне глаз и по ней рассчитывается верхний угол прямоугольника, заключающего потенциальное лицо, его длина и ширина. Выделенная таким образом область принимается за лицо.

Предложенный метод автоматической детекции области лица проверен на базе, состоящей из 103 изображений 15 человек. Результат выделения лица продемонстрирован на рис. 6. По данной выборке доля верного выделения лиц составила 98%. Анализ ошибочно детектированных изображений показал, что ошибка связана с размытостью исходной термограммы (по причине движения объекта во время съемки). В экспериментальных исследованиях установлено, что на качество детекции лица конкретного человека не влияют ни изменение



Рис. 6 Результат работы алгоритма автоматического выделения области лица

прически и волосяного покрова лица (наличия и отсутствия бороды, усов), ни температурные условия сбора изображений. Сбор проводился в лабораторных условиях и на открытом воздухе в зимнее время. В обоих случаях выделение области лица проходило успешно.

Проведена временная оценка работы алгоритма: пакетная обработка 103 изображений составила 157 с; таким образом, среднее время выделения одного лица по термограмме составляет 1,52 с (в среде MatLab).

С целью расширения класса термограмм, на которых применим разработанный метод выделения лица, приведем результаты детекции для термограмм различных объектов.

На рис. 7, а представлен термографический снимок, на котором лицо конкурирует по температуре с другим объектом. Для обработки этого термографического снимка сначала производилась операция сегментирования областей, похожих на лицо (выделены 2 области: «лицо» и «чайник», находящиеся в одном температурном диапазоне и схожие по площади). Далее применялся разработанный алгоритм выделения лица. Объект «чайник» был отбракован на третьем этапе: не были найдены маркеры линии глаз. На рис. 7, в представлен результат детекции лица.

3 Выводы

Предложен алгоритм автоматического выделения лица на термографических изображениях. Описанный алгоритм базируется на поиске внутренних углов глаз, которые являются стабильной гипертермической областью на лице человека. Высокий показатель правильной детекции лица (98%) подтвердил эффективность представленного алгоритма.

Стоит отметить, что данный алгоритм можно использовать как алгоритм автоматического определения присутствия человека в кадре, например для систем контроля доступа и охраны периметра.

В дальнейшем рассмотренный подход можно применять для идентификации личности в интеллектуальных системах видеонаблюдения.

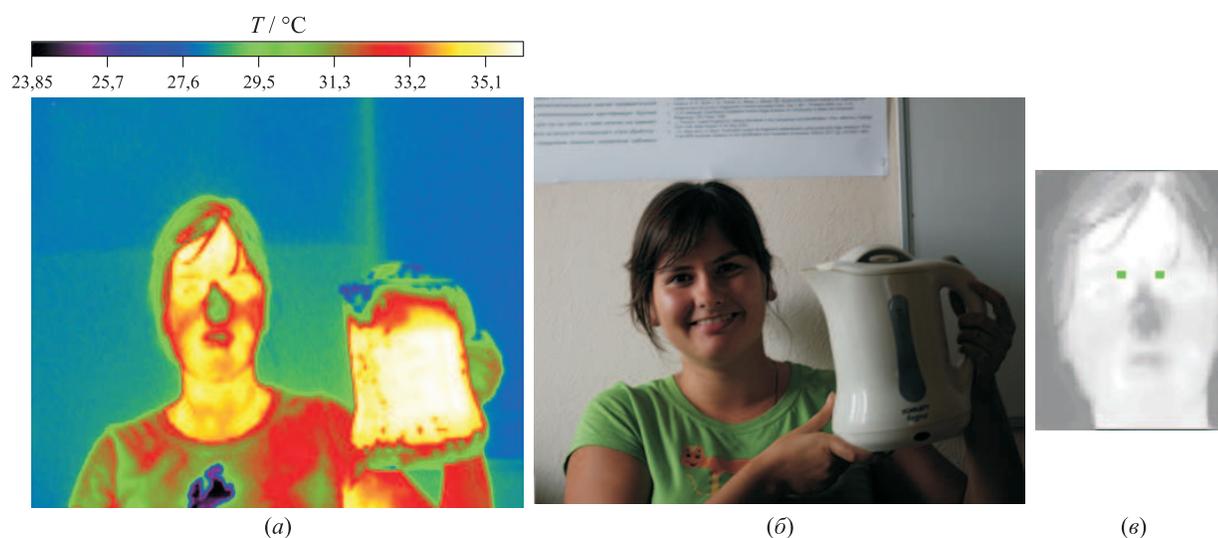


Рис. 7 Результат работы алгоритма автоматического выделения области лица: (а) термограмма; (б) соответствующее ей изображение в видимом диапазоне; (в) результат работы алгоритма выделения лица

Литература

1. *Evans D.* Infrared facial recognition technology being pushed toward emerging applications // *Proc. SPIE*, 1997. Vol. 2962. P. 276–286.
2. *Иваницкий Г. Р.* Современное матричное тепловидение в биомедицине // *Успехи физических наук*, 2006. Т. 176. № 12. С. 1293–1320.
3. *Куприянов В. В., Стовичек Г. В.* Лицо человека: Анатомия, мимика. — М.: Медицина, 1988.

ОБ УТОЧНЕНИИ НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ ОДНОЙ БАЙЕСОВСКОЙ МОДЕЛИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ*

А. А. Кудрявцев¹, С. Я. Шоргин²

Аннотация: Данная работа посвящена одному принципиальному уточнению опубликованных в работе [1] характеристик распределения вероятности непотери вызова в рамках байесовской модели массового обслуживания и надежности. Приводится исправленная формула для соответствующей плотности и выражения для первых двух моментов в несколько упрощенном виде.

Ключевые слова: байесовский подход; системы массового обслуживания; надежность; смешанные распределения; моделирование

В работе [1] в рамках байесовского подхода рассматривается система $M|M|1|0$, в которой интенсивность входящего потока λ имеет вырожденное распределение, а интенсивность обслуживания μ — распределение Эрланга с параметрами n и α .

Одной из задач для такой модели является нахождение основных вероятностных характеристик вероятности не потерять вызов

$$\pi = \frac{1}{1 + \rho},$$

где ρ — коэффициент загрузки системы.

В работе [1] показано, что функция распределения случайной величины π имеет вид

$$F_{\pi}(x) = 1 - e^{-\alpha\lambda x/(1-x)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha\lambda)^k x^k}{(1-x)^k k!}, \quad x \in (0, 1).$$

В этом случае плотность π , как легко видеть, вычисляется по формуле, отличной от приведенной в работе [1], а именно:

$$f_{\pi}(x) = e^{-\alpha\lambda x/(1-x)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha\lambda)^k x^{k-1} (\alpha\lambda x + kx - k)}{k!(1-x)^{k+2}}, \quad x \in (0, 1).$$

Приведем также явные выражения для первых двух моментов π в менее громоздком виде по сравнению с результатами, опубликованными в [1]. Для этого воспользуемся формулой 3.353.5 из [2].

Имеем

$$\begin{aligned} E\pi &= \int_0^1 e^{-\alpha\lambda x/(1-x)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha\lambda)^k x^k (\alpha\lambda x + kx - k)}{k!(1-x)^{k+2}} dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-z} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k (z - k)}{k!(\alpha\lambda + z)} dz = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^{k+1}}{\alpha\lambda + z} dz - k \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^k}{\alpha\lambda + z} dz \right]. \end{aligned}$$

Для упрощения дальнейших выкладок введем следующее обозначение. Пусть $Ei(x)$ — интегральная показательная функция

$$Ei(x) = - \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Используя [2, формула 3.353.5], получаем

$$\begin{aligned} E\pi &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left[(-1)^k (\alpha\lambda)^{k+1} e^{\alpha\lambda} Ei(-\alpha\lambda) + \right. \\ &+ \sum_{m=1}^{k+1} (m-1)! (-1)^{k-m+1} (\alpha\lambda)^{k-m+1} - \\ &- k (-1)^{k-1} (\alpha\lambda)^k e^{\alpha\lambda} Ei(-\alpha\lambda) - \\ &\left. - k \sum_{m=1}^k (m-1)! (-1)^{k-m} (\alpha\lambda)^{k-m} \right] = \end{aligned}$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 11-01-00515 и 11-07-00112.

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, nubigena@hotmail.com

² ИПИ РАН, sshorgin@ipiran.ru

$$= n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\alpha\lambda)^k (\alpha\lambda + k)}{k!} \left[e^{\alpha\lambda} Ei(-\alpha\lambda) - \sum_{m=1}^k \frac{(m-1)!}{(-\alpha\lambda)^m} \right] + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\alpha\lambda)^k ((\alpha\lambda + k + 1)^2 - k - 1)}{k!} \times \left[e^{\alpha\lambda} Ei(-\alpha\lambda) - \sum_{m=1}^k \frac{(m-1)!}{(-\alpha\lambda)^m} \right].$$

Для второго момента π имеем аналогично

$$\begin{aligned} E\pi^2 &= \\ &= \int_0^1 e^{-\alpha\lambda x/(1-x)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha\lambda)^k x^{k+1} (\alpha\lambda x + kx - k)}{k!(1-x)^{k+2}} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-z} z^{k+2}}{(\alpha\lambda + z)^2} dz - k \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^{k+1}}{(\alpha\lambda + z)^2} dz \right] = \\ &= \alpha\lambda n + \frac{n^2 + n}{2} + \end{aligned}$$

Литература

1. Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я. Байесовский подход к анализу систем массового обслуживания и показателей надежности // Информатика и её применения, 2007. Т. 1. Вып. 2. С. 76–82.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971. 1108 с.

TWO-PRIORITY SYSTEM WITH RESERVATION OF CHANNELS AND MARKOV INPUT FLOW

A. V. Pechinkin

IPI RAN, apechinkin@ipiran.ru

The two-priority queueing system with trunk reservation and Markovian input flow of customers is considered. It is supposed that customers of each priority have two different phase-type distributions of their service times. Trunk reservation means that there are some channels which can be used only by customers of high priority. On the basis of researching the special general model, analytic relations that permit to calculate the main stationary characteristics of the queueing system were obtained.

Keywords: queueing system; relative priority; reserving the channels

IMPROVEMENTS OF THE NONUNIFORM ESTIMATE FOR CONVERGENCE OF DISTRIBUTIONS OF POISSON RANDOM SUMS TO THE NORMAL DISTRIBUTION

S. V. Gavrilenko

Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, gavrilenko.cmc@gmail.com

The nonuniform estimates for convergence rate in the central limit theorem have been built. Using these structural improvements, it is shown that absolute constant in the nonuniform estimate for convergence rate in the central limit theorem for Poisson random sums is strictly less than similar constant in the nonuniform estimate for convergence rate in the classical central limit theorem and, assuming finite third moment, it does not exceed 22.7707. As a result, nonuniform estimates for convergence rate of the mixed Poisson, particularly, negative binomial, random sums have been built.

Keywords: central limit theorem; convergence rate; nonuniform estimate; absolute constant; Poisson random sum; mixed Poisson distribution

ON ACCURACY OF APPROXIMATIONS FOR STANDARDIZED CHI-SQUARED DISTRIBUTIONS BY EDGEWORTH–CHEBYSHEV EXPANSIONS

G. Christoph¹ and V. V. Ulyanov²

¹Institute for Mathematical Stochastics, Faculty of Mathematics, University of Magdeburg, Magdeburg, Germany, gerd.christoph@ovgu.de

²Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, vulyan@gmail.com

A standardized chi-squared random variable V_n with n degrees of freedom is considered with Edgeworth–Chebyshev expansions, the computable error bounds of orders $O(n^{-1/2})$, $O(n^{-1})$, and $O(n^{-3/2})$ for approximations of V_n have been obtained. The results are useful in applications, in particular, in analysis of statistics ratio of probability features.

Keywords: asymptotic expansions; error bounds; chi-squared distribution

STABILITY OF FINITE MIXTURES OF GENERALIZED GAMMA-DISTRIBUTIONS WITH RESPECT TO DISTURBANCE OF PARAMETERS

V. Yu. Korolev¹, V. A. Krylov², and V. Yu. Kuz'min³

¹Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University; Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences, vkorolev@comtv.ru

²Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, vkrylov@cs.msu.ru

³Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, silencersshade@gmail.com

Using the example of the “contamination” model, in terms of uniform distance and Levy metric, estimates of the stability of finite mixtures of generalized gamma-distributions against small disturbance of parameters were obtained.

Keywords: generalized gamma-distribution; finite mixture; Levy metric

ON THE ACCURACY OF THE NORMAL APPROXIMATION TO DISTRIBUTIONS OF POISSON RANDOM SUMS

Yu. S. Nefedova¹ and I. G. Shevtsova²

¹Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, julia_n@inbox.ru

²Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, ishevtsova@cs.msu.ru

Two-sided bounds were constructed for the constant in the Berry–Esseen inequality for Poisson random sums of independent identically distributed random variables with finite absolute moments of order $2 + \delta$ with $\delta \in (0, 1]$. The lower bounds were obtained for the first time. For the case $0 < \delta < 1$, the upper bounds were sharpened, and the nonuniform estimates were proved.

Keywords: central limit theorem; Poisson random sums; Berry–Esseen inequality; absolute constant; nonuniform estimate

INFORMATION TECHNOLOGY OF ACTIVE PARAMETRIC IDENTIFICATION OF STOCHASTIC QUASI-LINEAR DISCRETE SYSTEMS

V. M. Chubich

Department of Applied Mathematics, Faculty of Applied Mathematics and Computer Sciences, Novosibirsk State Technical University, chubich_62@ngs.ru

Some theoretical and applied aspects of the active parametric identification of the Gaussian nonlinear discrete systems are considered for the first time. The original results are obtained for the case when the parameters of the mathematical models to be estimated appear in the state and observation equations; the initial conditions and covariance matrices of the dynamic noise and measurements errors were considered. An example of optimal parameter estimation of one model structure is shown.

Keywords: parameter estimation; maximum likelihood method; optimal input signal design; Fisher information matrix; optimality criterion

AGENT MODELING OF TERRITORIAL SYSTEM DEVELOPMENT

K. S. Chirkunov

A. P. Ershov Institute of Informatics Systems, cyril.chirkunov@computer.org

An agent system that reflects development of the country economy (building of new factories, raising of the overall level of income) based on the model of territorial system is considered. The elements of the model are presented in the form of agents, autonomous units capable to interact with each other.

Keywords: agent negotiation algorithms; territorial system; simulation; economic zoning

TWO MODELS OF RESOURCE ALLOCATION UNDER THE ORGANIZATION OF INVESTMENT PROCESSES

P. V. Demin

State Educational Institution "Moscow Academy of the Labor Market and Information Technology,"
pdemin@mail.ru

Two examples of solving the problems that arise during the organization of the investment processes which are associated with the modernization of economy are considered. The first one relates with the problems while choosing for financing a project among the variety. The second one relates with the problem of distribution of the investment resources among the enterprises that are a part of the holding.

Keywords: investment process; innovation; bank financing; resources; holding

IRIS IMAGES COMPARISON ALGORITHM BASED ON IRIS KEY POINTS

E. Pavelyeva¹ and A. Krylov²

¹Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University,
paveljeva@yandex.ru

²Laboratory of Mathematical Methods of Image Processing, Faculty of Computational Mathematics and
Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, kryl@cs.msu.ru

Iris images comparison algorithm using iris key points is proposed. As the iris key points, the points with the maximal convolution values in the Hermite transform are taken. Only iris regions free of glares, eyelashes, and eyelids are analyzed to increase the effectiveness of the algorithm. The iris rotation angle estimation method is also proposed. The proposed algorithm was tested with the public iris images database CASIA-IrisV3.

Keywords: biometrics; iris recognition; Hermite transform; iris key points

ALGORITHM OF AUTOMATIC FACE DETECTION IN THERMAL IMAGES

N. Basha¹ and L. Shulga²

¹Institute of Applied Acoustics, IUNSM "Dubna," natalia.basha@niipa.ru

²Institute of Applied Acoustics, luda.shulga@niipa.ru

An approach for thermal images analysis of intelligent video surveillance systems has been suggested. An automatic face detection algorithm in thermal images is proposed. In order to evaluate the performance of the algorithm, the experiments were carried out on the private database of 103 thermal images of 15 subjects obtained under different environment conditions. The experimental results reveal good performance of the proposed algorithm.

Keywords: pattern recognition; image analysis; video surveillance; thermography; face detection

ON A REFINEMENT OF CERTAIN RESULTS FOR A BAYESIAN QUEUING MODEL

A. A. Kudriavtsev¹ and S. Ya. Shorgin²

¹Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University,
nubigena@hotmail.com

²IPI RAN, sshorgin@ipiran.ru

The paper relates to an essential refinement of published earlier formula for distribution of nonloss probability in a Bayesian reliability model. The paper includes the correct formula for the probability density and improved formulae of the first two moments of mentioned distribution.

Keywords: Bayesian approach; queueing systems; reliability; mixed distributions; modeling

Об авторах

Баша Наталия Алексеевна (р. 1986) — аспирант Международного университета природы, общества и человека «Дубна»

Гавриленко Семен Васильевич (р. 1985) — аспирант кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Демин Павел Валерьевич (р. 1980) — аспирант Государственного образовательного учреждения «Московская академия рынка труда и информационных технологий»

Королев Виктор Юрьевич (р. 1954) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; ведущий научный сотрудник ИПИ РАН

Кристоф Герд (р. 1949) — доктор естественных наук, профессор факультета математики Института математической стохастики, Магдебургский университет им. Отто фон Геррике, ФРГ

Крылов Андрей Серджевич (р. 1956) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математических методов обработки изображений факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Крылов Владимир Андреевич (р. 1985) — аспирант кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Кудрявцев Алексей Андреевич (р. 1978) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Кузьмин Виктор Юрьевич (р. 1986) — аспирант кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Москов-

ского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Нефедова Юлия Сергеевна (р. 1985) — аспирант кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Павельева Елена Александровна (р. 1986) — аспирант факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Печинкин Александр Владимирович (р. 1946) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ИПИ РАН; профессор Российского университета дружбы народов (РУДН)

Ульянов Владимир Васильевич (р. 1953) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Чиркунов Кирилл Сергеевич (р. 1985) — аспирант Института систем информатики им. А. П. Ершова Сибирского отделения РАН

Чубич Владимир Михайлович (р. 1962) — кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета

Шевцова Ирина Геннадьевна (р. 1983) — кандидат физико-математических наук; ассистент кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Шоргин Сергей Яковлевич (р. 1952) — доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора ИПИ РАН

Шульга Людмила Алексеевна (р. 1975) — кандидат технических наук, начальник лаборатории распознавания образцов ФГУП «Научно-исследовательский институт прикладной акустики»

About Authors

Basha Natalia A. (b. 1986) — PhD student, International University of Nature, Society, and the Man “Dubna”

Chirkunov Kirill S. (b. 1985) — PhD student, A. P. Ershov Institute of Informatics Systems, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch

Christoph Gerd (b. 1949) — Doctor of Science in natural sciences, professor, Institute for Mathematical Stochastics, Faculty of Mathematics, Otto-von-Guericke-University Magdeburg, Germany

Chubich Vladimir M. (b. 1962) — Candidate of Science (PhD) in technology, associate professor, Department of Applied Mathematics, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Novosibirsk State Technical University

Demin Pavel V. (b. 1980) — PhD student, State Educational Institution “Moscow Academy of the Labor Market and Information Technology”

Gavrilenko Semyon V. (b. 1985) — PhD student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

Korolev Victor Yu. (b. 1954) — Doctor of Science in physics and mathematics; professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University; leading researcher, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

Krylov Andrey S. (b. 1956) — Doctor of Science in physics and mathematics, Professor, Head of Laboratory of Mathematical Methods of Image Processing, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

Krylov Vladimir A. (b. 1985) — PhD student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

Kudriavtsev Alexei A. (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior scientist, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

Kuz'min Victor Yu. (b. 1986) — PhD student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

Nefedova Yulia S. — (b. 1985) — PhD student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

Pavelyeva Elena A. (b. 1986) — PhD student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

Pechinkin Alexander V. (b. 1946) — Doctor of Sciences in physics and mathematics, principal scientist, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences; professor, Peoples' Friendship University of Russia

Shevtsova Irina G. (b. 1983) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics; assistant professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

Shorgin Sergey Ya. (b. 1952) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Deputy Director, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

Shulga Lyudmila A. (b. 1975) — Candidate of Sciences (PhD) in technology, Head of Pattern Recognition and Image Analysis Department, Institute of Applied Acoustics

Ulyanov Vladimir V. (b. 1953) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

Правила подготовки рукописей статей для публикации в журнале «Информатика и её применения»

Журнал «Информатика и её применения» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информатики и ее приложений. Журнал издается на русском языке. Тематика журнала охватывает следующие направления:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

1. В журнале печатаются результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях. Публикация не должна нарушать закон об авторских правах. Направляя свою рукопись в редакцию, авторы автоматически передают учредителям и редколлегии неисключительные права на издание данной статьи на русском языке и на ее распространение в России и за рубежом. При этом за авторами сохраняются все права как собственников данной рукописи. В связи с этим авторами должно быть представлено в редакцию письмо в следующей форме: Соглашение о передаче права на публикацию:

«Мы, нижеподписавшиеся, авторы рукописи « _____ », передаем учредителям и редколлегии журнала «Информатика и её применения» неисключительное право опубликовать данную рукопись статьи на русском языке как в печатной, так и в электронной версиях журнала. Мы подтверждаем, что данная публикация не нарушает авторского права других лиц или организаций. Подписи авторов: (ф. и. о., дата, адрес)».

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности опубликования представленной статьи в открытой печати.

2. Статья подписывается всеми авторами. На отдельном листе представляются данные автора (или всех авторов): фамилия, полное имя и отчество, телефон, факс, e-mail, почтовый адрес. Если работа выполнена несколькими авторами, указывается фамилия одного из них, ответственного за переписку с редакцией.

3. Редакция журнала осуществляет самостоятельную экспертизу присланных статей. Возвращение рукописи на доработку не означает, что статья уже принята к печати. Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.

4. Решение редакционной коллегии о принятии статьи к печати или ее отклонении сообщается авторам. Редколлегия не обязуется направлять рецензию авторам отклоненной статьи.

5. Корректурa статей высылается авторам для просмотра. Редакция просит авторов присылать свои замечания в кратчайшие сроки.

6. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки. Параметры страницы: формат — А4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху — 2, снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3. Основной текст: стиль — «Обычный»: шрифт Times New Roman, размер 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине. Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 25 страниц указанного формата. Ознакомиться с шаблонами, содержащими примеры оформления, можно по адресу в Интернете: <http://www.ipiran.ru/journal/template.doc>.

7. К рукописи, предоставляемой в 2-х экземплярах, обязательно прилагается электронная версия статьи (как правило, в форматах MS WORD (.doc) или LaTeX (.tex), а также — дополнительно — в формате .pdf) на дискете, лазерном диске или по электронной почте. Сокращения слов, кроме стандартных, не применяются. Все страницы рукописи должны быть пронумерованы.

8. Статья должна содержать следующую информацию на русском и английском языках: название, Ф.И.О. авторов, места работы авторов и их электронные адреса, аннотация (не более 100 слов), ключевые слова. Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в порядке их первого упоминания. Все фамилии авторов, заглавия статей, названия книг, конференций и т. п. даются на языке оригинала, если этот язык использует кириллический или латинский алфавит.

9. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.

10. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:

- указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
- использовать attach (присоединение);
- в случае больших объемов информации возможно использование общеизвестных архиваторов (ZIP, RAR);
- в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.

11. Журнал «Информатика и её применения» является некоммерческим изданием, и гонорар авторам не выплачивается.

Адрес редакции: Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ИПИ РАН

Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05 E-mail: rust@ipiran.ru