943

Portal de Problemas de Matemáticas

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Recuperación: evaluaciones

- Ernesto Javier Espinosa Herrera
- Ignacio Canals Navarrete
- Manuel Meda Vidal
- Carlos Antonio Ulín Jiménez

Básicas

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Recuperación: evaluaciones

Portal de Problemas de Matemáticas
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
Primer parcial: evaluaciones
Este material fue aprobado para su publicación por el Consejo Editorial de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Unidad Azcapotzalco de la UAM, en su sesión del día 12 de julio del 2004.

Portal de Problemas de Matemáticas
Cálculo Diferencial e Integral I

Recuperación: evaluaciones

Ernesto Javier Espinosa Herrera (coordinador)
Ignacio Canals Navarrete
Manuel Meda Vidal
Carlos Antonio Ulín Jiménez

AZCAPOTZALCO

2892872

Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Azcapotzalco
2006

Universidad Autónoma Metropolitana

RECTOR
Dr. Adrián Gerardo de Garay Sánchez

SECRETARIA
Dra. Sylvie Jeanne Turpin Marion

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
Mtro. José Ángel Rocha Martínez

JEFE DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
Dr. Juan Manuel Velázquez Arcos

COORDINADORA GENERAL DE DESARROLLO ACADÉMICO
Dra. Norma Rondero López

COORDINADOR DE EXTENSIÓN UNIVERSITARIA
DI Jorge Armando Morales Aceves

JEFE DE LA SECCIÓN DE PRODUCCIÓN Y DISTRIBUCIÓN EDITORIALES
DCG Edgar Barbosa Álvarez Lerín

UAM-Azcapotzalco

© M. en C. Ernesto Javier Espinosa Herrera
Dr. Ignacio Canals Navarrete
M. en C. Manuel Meda Vidal
Dr. Carlos Antonio Ulín Jiménez

© Departamento de Ciencias Básicas
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Captura de datos:
Jorge Ulises Ramírez Guerrero

Diseño de portada:
Lucila Montoya García

Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Cuidado editorial:
Concepción Asuar

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel. 5318-9222 / 9223
Fax 5318-9222

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

Número de registro de obra
ISBN de la colección: 970-31-0372-3
ISBN del volumen: 970-31-0329-4
Primera edición, 2005
Segunda reimpresión, 2006
Impreso en México

Todo el material de este trabajo se encuentra en línea en la dirección:
http://canek.azc.uam.mx

Índice general

Prefacio

El material de este trabajo es parte de un Proyecto aprobado por el Consejo Divisional de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, con el nombre de *Material de Apoyo para los Cursos de Cálculo Diferencial e Integral, y Ecuaciones Diferenciales. Portal de Problemas.* El material completo del Proyecto, desarrollado por los autores del presente Cuaderno, se encuentra en línea, en la dirección http:\\canek.azc.uam.mx.
El Proyecto, hoy conocido como Canek, nace con el objetivo de proporcionar, a los alumnos de Ciencias Básicas e Ingeniería, la solución y el desarrollo detallado de Evaluaciones Departamentales de las Unidades de Enseñanza - Aprendizaje (UUEEAA), del Tronco Básico de las carreras de Ingeniería, aplicadas por el Departamento de Ciencias Básicas, en fechas anteriores. En este Cuaderno, el lector encontrará Evaluaciones de Recuperación de la UEA Cálculo Diferencial e Integral I; en otros cuadernos, se irán publicando diferentes partes del material disponible en la red.

Recuperación, evaluación 1

1. Cierto artículo de lujo se vende en 1 000 pesos. La cantidad de ventas es de 20 000 artículos al año. Se considera imponer un impuesto a las ventas de tales artículos. Si el nivel del impuesto se fija en $R\%$, las ventas caerán en $500R$ artículos al año, ¿qué valor de R dará un ingreso total al gobierno de 1 680 000 pesos al año por concepto de este impuesto? ¿Qué valores de R darán al gobierno un ingreso de al menos 1 920 000 pesos al año?

▼ El total de artículos que se venden cobrando $R\%$ de impuesto es $20\,000 - 500R$; el precio de venta de estos artículos es $1\,000\,(20\,000 - 500R)$. El impuesto que se paga por esta venta es

$$1\,000\,(20\,000 - 500R) \times \frac{R}{100} = 1\,680\,000, \text{ según lo enunciado,}$$

o sea

$$200R - 5R^2 = 1\,680 \Rightarrow R^2 - 40R + 336 = 0.$$

Resolvemos esta cuadrática

$$R = \frac{40 \pm \sqrt{1\,600 - 4 \times 336}}{2} = \frac{40 \pm 16}{2} = \begin{cases} 28 \\ 12\,. \end{cases}$$

Existen dos soluciones para el impuesto: 28% y 12%.

Para resolver la segunda pregunta, hacemos el mismo planteamiento y nos queda la desigualdad

$$1\,000\,(20\,000 - 500R) \times \frac{R}{100} \geq 1\,920\,000,$$

o sea,

$$200R - 5R^2 \geq 1\,920 \Rightarrow R^2 - 40R + 384 \leq 0.$$

Vamos a calcular las raíces de la cuadrática

$$R = \frac{40 \pm \sqrt{1\,600 - 4 \times 384}}{2} = \frac{40 \pm 8}{2} = \begin{cases} 24 \\ 16\,. \end{cases}$$

Tenemos entonces $R^2 - 40R + 384 = (R - 16)(R - 24)$. Para saber dónde la cuadrática es negativa usamos la tabla

	Signo de		
Intervalo	$R - 16$	$R - 24$	$R^2 - 40R + 384$
$R < 16\,(< 24)$	−	−	+
$16 < R < 24$	+	−	−
$R > 24\,(> 16)$	+	+	+

Primer parcial, evaluación 1

1. Si se lanza una pelota hacia arriba desde la azotea de un edificio que tiene 20 m de altura con una velocidad inicial de 5 m/seg., entonces la altura sobre el suelo t segundos después será

$$h(t) = 20 + 5t - 5t^2.$$

¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota por lo menos 10 m arriba del suelo?

▼ Ya que la altura de la pelota viene dada por la función $h(t)$, resolver la desigualdad

$$20 + 5t - 5t^2 \geq 10$$

es la respuesta a la pregunta del problema.

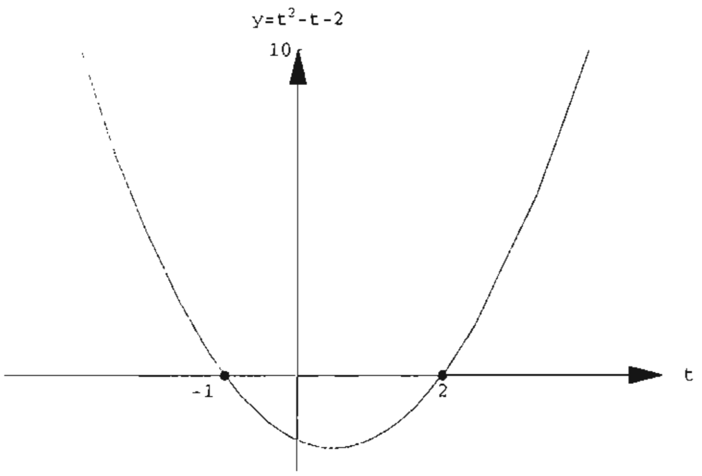
Se tiene:

$$-5t^2 + 5t + 10 \geq 0 \Rightarrow -5(t^2 - t - 2) \geq 0 \Rightarrow t^2 - t - 2 \leq 0.$$

Para resolver esta desigualdad factorizamos el trinomio e igualamos a cero:

$$(t-2)(t+1) = 0 \Rightarrow \text{, las raíces son -1 y 2.}$$

Graficamos la parábola $y = t^2 - t - 2$:



Aquí se ve que la solución de la última desigualdad es $[-1, 2]$.

Para este problema se tiene que $t \geq 0$, por lo tanto la solución definitiva es $[0, 2]$.

Y siendo así, la pelota estará 10 m arriba del suelo los primeros 2 segundos.

Observa que $h(0) = 20$ y $h(2) = 10$.

3. Para la siguiente función
$$f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{x}{x^2-9}$$
determine:

(a) Dominio y raíces

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

Raíces. Vemos que:
$$f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{x}{x^2-9} = \frac{2x+3}{x^2-9};$$
la raíz de la función es $x = -\dfrac{3}{2}$.

(b) Asíntotas horizontales y verticales

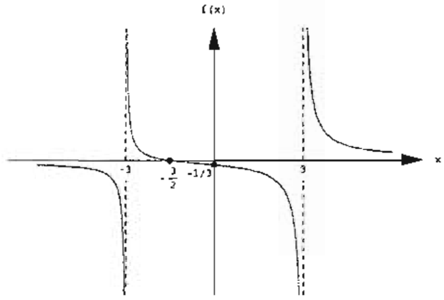
▼ Puesto que
$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2-9} = \frac{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{9}{x^2}\right)} = \frac{2+\dfrac{3}{x}}{x\left(1-\dfrac{9}{x^2}\right)}, \quad x \neq 0$$
calculamos:
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\dfrac{3}{x}}{x\left(1-\dfrac{9}{x^2}\right)} = 0;$$
entonces, $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Se tiene también que $x = -3$ y $x = 3$ son las asíntotas verticales.
Vamos a calcular los límites laterales en esos puntos:

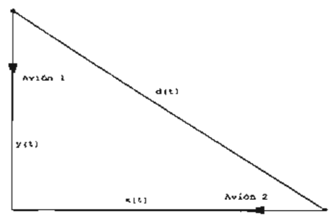
Primero $x = -3$.
Si $x \to -3^- \Rightarrow x < -3 \Rightarrow x + 3 < 0 \Rightarrow x + 3 \to 0^-$, entonces:
$$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{x\to-3^-} \left(\frac{2x+3}{x-3} \times \frac{1}{x+3}\right) = \frac{-3}{-6} \times \text{“}\left(\frac{1}{0^-}\right)\text{”} = -\infty.$$
Si $x \to -3^+ \Rightarrow x > -3 \Rightarrow x + 3 > 0 \Rightarrow x + 3 \to 0^+$, entonces:
$$\lim_{x\to-3^+} f(x) = \lim_{x\to-3^+} \left(\frac{2x+3}{x-3} \times \frac{1}{x+3}\right) = \frac{-3}{-6} \times \text{“}\left(\frac{1}{0^+}\right)\text{”} = +\infty.$$
Segundo $x = 3$
Si $x \to 3^- \Rightarrow x < 3 \Rightarrow x - 3 < 0 \Rightarrow x - 3 \to 0^-$, entonces:
$$\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-} \left(\frac{2x+3}{x+3} \times \frac{1}{x-3}\right) = \frac{9}{6} \times \text{“}\left(\frac{1}{0^-}\right)\text{”} = -\infty.$$
Si $x \to 3^+ \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x - 3 > 0 \Rightarrow x - 3 \to 0^+$, entonces:
$$\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+} \left(\frac{2x+3}{x+3} \times \frac{1}{x-3}\right) = \frac{9}{6} \times \text{“}\left(\frac{1}{0^+}\right)\text{”} = +\infty.$$

(c) Bosquejo gráfico

▼ Con toda la información anterior tenemos que el bosquejo gráfico de $f(x)$ es:



4. Un controlador aéreo sitúa 2 aviones a la misma altitud, convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto de encuentro (véase figura). Uno de ellos (avión 1) está a 150 millas de ese punto y vuela a 450 millas por hora. El otro (avión 2) está a 200 millas del punto y vuela a 600 millas por hora.



(a) ¿A qué velocidad decrece la distancia entre los aviones?

▼ En todo momento, t arbitrario, se tiene la relación:

$$d^2(t) = x^2(t) + y^2(t);$$

derivando con respecto a t:

$$2d(t)d'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$$

y despejando $d'(t)$:

$$d'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}.$$

Si escribimos como t_0 el instante al que se refiere el enunciado, tenemos que:

$$d'(t_0) = \frac{x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}} =$$

$$= \frac{200 \times (-600) + 150 \times (-450)}{\sqrt{(200)^2 + (150)^2}} = \frac{-187500}{250} = -750 \text{ millas/h}.$$

(b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias diferentes?

▼ El tiempo que tienen los aviones para llegar al punto $(0, 0)$ es

$$\frac{200}{600} = \frac{1}{3} \text{ hora}, \ \frac{150}{450} = \frac{1}{3} \text{ hora.}$$

Es decir, los aviones chocarían en 20 minutos si no se cambia la trayectoria.

5. Grafique la función $f(x) = x^{\frac{1}{5}}(x + 3)$, señalando claramente:

(a) Dominio y raíces

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R}$.

Raíces: $x = 0$ y $x = -3$.

(b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

▼ Derivamos para conocer los intervalos de monotonía:

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}(x + 3) + x^{\frac{1}{5}} = \frac{x + 3 + 5x}{5x^{\frac{4}{5}}} =$$
$$= \frac{6x + 3}{5x^{\frac{4}{5}}} = \frac{3}{5} \times \frac{2x + 1}{x^{\frac{4}{5}}}.$$

El signo de la primera derivada lo da $2x + 1$. Vemos que

$x = -\frac{1}{2}$ es un punto crítico;

$f(x)$ es decreciente si $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$;

$f(x)$ es creciente si $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

(c) Máximos y mínimos relativos

▼ Por lo anterior $x = -\frac{1}{2}$ es un mínimo local, por el criterio de la primera derivada.

(d) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo

▼ Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{3}{5}\left[\frac{x^{\frac{4}{5}} \times 2 - (2x + 1) \times \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}}{x^{\frac{8}{5}}}\right] = \frac{6}{5} \times \frac{x^{\frac{4}{5}} - \dfrac{4x + 2}{5x^{\frac{1}{5}}}}{x^{\frac{8}{5}}} =$$
$$= \frac{6}{5} \times \frac{\dfrac{5x - 4x - 2}{5x^{\frac{1}{5}}}}{x^{\frac{8}{5}}} = \frac{6}{25} \times \frac{x - 2}{x^{\frac{9}{5}}} =$$
$$= \frac{6}{25} \times \frac{1}{x^{\frac{4}{5}}} \times \frac{x - 2}{x};$$

vemos entonces que x & $x - 2$ son los que dan el signo de la segunda derivada. Puesto que se anulan en $x = 0$ y en $x = 2$, nos ayudamos de la tabla siguiente para conocer los intervalos de concavidad de la función $f(x)$

	Signo de		
Intervalo	x	$x - 2$	$f''(x)$
$x < 0 (< 2)$	$-$	$-$	$+$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$-$
$x > 2 (> 0)$	$+$	$+$	$+$

$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0) \bigcup (2, +\infty)$;
$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(0, 2)$.

(e) Puntos de inflexión

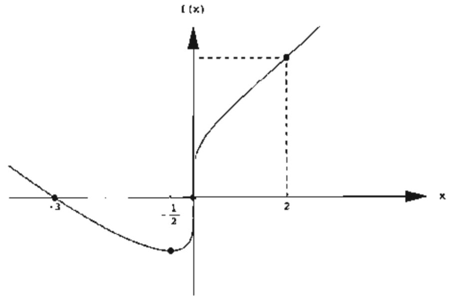
▼ Por lo anterior, en $x = 2$ cambia la concavidad, y por lo tanto es un punto de inflexión.

(f) Máximos y mínimos absolutos (si los hubiese)

▼ En $x = -\dfrac{1}{2}$ tiene un mínimo absoluto;
$f(x)$ no tiene máximo absoluto.

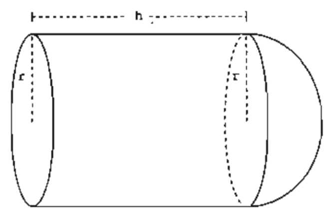
(g) Gráfica de la función

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es



6. Una lata de aceite tiene la forma de un cilindro con fondo plano en la base y una semiesfera en la parte superior. Si esta lata debe contener un volumen de 1 000 pulgadas cúbicas y se desprecia el espesor del material, determine las dimensiones que minimizan la cantidad de material necesario para fabricarla.

▼ Usamos la figura



El volumen total consta de dos partes: el volumen del cilindro más el volumen de la semiesfera:

$$V = \pi r^2 h + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = 1\,000. \tag{A}$$

El material usado coincide con el área total de la superficie exterior que consta del área de la base, más el área lateral del cilindro y el área de la semiesfera:

$$M = \pi r^2 + 2\pi r h + \frac{1}{2} \times 4\pi r^2. \tag{B}$$

Ésta es la función a la cual deseamos minimizar. Consta de dos variables. De la relación (A) despejamos h:

$$\pi r^2 h = 1\,000 - \frac{2}{3}\pi r^3 \Rightarrow h = \frac{1\,000}{\pi r^2} - \frac{2}{3}r. \tag{C}$$

Sustituimos este valor en (B) y obtenemos:

$$\begin{aligned} M(r) &= \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1\,000}{\pi r^2} - \frac{2}{3}r\right) + 2\pi r^2 = \\ &= 3\pi r^2 + \frac{2\,000}{r} - \frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}. \end{aligned}$$

Calculamos primera y segunda derivada:

$$\begin{aligned} M'(r) &= \frac{5}{3}\pi 2r - \frac{2\,000}{r^2} = \frac{10\pi r^3 - 6\,000}{3r^2} \\ M''(r) &= \frac{10}{3}\pi + 2\,000\frac{2r}{r^4} = \frac{10}{3}\pi + 4\,000\frac{1}{r^3} > 0, \quad \text{mínimo}. \end{aligned}$$

Calculamos puntos críticos igualando a cero la primera derivada:

$$M'(r) = 0 \Rightarrow 10\pi r^3 - 6\,000 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{600}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{600}{\pi}} = \left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5.75882.$$

Sustituyendo este valor en (C):

$$\begin{aligned} h &= \frac{1\,000}{\pi\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{3}\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1\,000}{600} \times \frac{600}{\pi\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{3}\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{5}{3}\frac{\left(\frac{600}{\pi}\right)}{\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{3}\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{3}\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \\ &= \left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = r, \end{aligned}$$

es decir, hallamos que la lata con las condiciones dadas debe tener la altura del cilindro igual que el radio de la base.

Recuperación, evaluación 2

1. Resolver la desigualdad $|x^2 - 4| \geq x^2 + x + 1$.

▼ Esta desigualdad es equivalente a las siguientes:

(a) $x^2 - 4 \geq x^2 + x + 1 \Leftrightarrow -4 \geq x + 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -5]$;

(b) $x^2 - 4 \leq -(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq -x^2 - x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 \leq 0$.

Calculamos las raíces de la última cuadrática:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

entonces, $2x^2 + x - 3 = 2(x-1)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$.

Usamos la siguiente tabla para resolver la desigualdad $2x^2 + x - 3 \leq 0$:

	Signo de		
Intervalo	$x + \frac{3}{2}$	$x - 1$	$2x^2 + x - 3$
$x < -\frac{3}{2} (< 1)$	$-$	$-$	$+$
$-\frac{3}{2} < x < 1$	$+$	$-$	$-$
$x > 1 (> -\frac{3}{2})$	$+$	$+$	$+$

Por lo tanto, $2x^2 + x - 3 \leq 0$ se cumple si $x \in \left[-\dfrac{3}{2}, 1\right]$.

La solución de la desigualdad original es la unión de los dos casos anteriores, es decir,

$$x \in (-\infty, -5] \bigcup \left[-\frac{3}{2}, 1\right].$$

2. Sean $f(x) = -\dfrac{x^2}{36 - x^2}$ & $g(t) = \sqrt{8 - 3t}$, encontrar:

(a) D_f & D_g

▼ Puesto que $36 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 6$, tenemos que:

Dominio de $f(x)$: $D_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid 36 - x^2 \neq 0 \} = \mathbb{R} - \{ -6, 6 \}$.

Puesto que $8 - 3t \geq 0 \Leftrightarrow 8 \geq 3t \Leftrightarrow \frac{8}{3} \geq t$, entonces:

Dominio de $g(x)$: $D_g = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 8 - 3t \geq 0 \,\} \Leftrightarrow D_g = \left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$.

(b) $(f \circ g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ y sus respectivos dominios

▼ Vemos que

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{8-3x}) = -\frac{(\sqrt{8-3x})^2}{36 - (\sqrt{8-3x})^2} =$$
$$= -\frac{8-3x}{36-(8-3x)} = -\frac{8-3x}{28+3x}.$$

Para que $x \in D_{f \circ g}$, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. $x \in D_g = \left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$;
2. $g(x) \in D_f \Leftrightarrow \sqrt{8-3x} \in \mathbb{R} - \{-6, 6\}$;

   $\sqrt{8-3x}$ es siempre positivo, por lo tanto nunca puede ser igual a -6.

   Vamos a calcular cuando $\sqrt{8-3x} = 6 \Rightarrow 8 - 3x = 36 \Rightarrow x = -\frac{28}{3}$.

Por lo tanto:

$$D_{f \circ g} = \left(-\infty, \frac{8}{3}\right] - \left\{-\frac{28}{3}\right\}.$$

Ahora:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-\frac{x^2}{36-x^2}}{\sqrt{8-3x}} = -\frac{x^2}{(36-x^2)\sqrt{8-3x}};$$
$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \bigcap D_g - \{\, x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0 \,\}.$$

Calculamos:

1. $D_f \bigcap D_g = \left(-\infty, \frac{8}{3}\right] \bigcap [\mathbb{R} - \{-6, 6\}] = \left(-\infty, \frac{8}{3}\right] - \{-6\}$;
2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{8-3x} = 0 \Leftrightarrow 8 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$.

Por lo tanto:

$$D_{\frac{f}{g}} = \left(-\infty, \frac{8}{3}\right) - \{-6\}.$$

3. Sea $f(x) = \dfrac{4x^3 - 4x^2 - 3x}{2x^3 + 3x^2 - 9x}$, encontrar:

(a) Dominio y raíces

▼ Vemos que

$$f(x) = \frac{x(4x^2 - 4x - 3)}{x(2x^2 + 3x - 9)} = \frac{4x^2 - 4x - 3}{2x^2 + 3x - 9}, \quad \text{si } x \neq 0.$$

Vamos a factorizar el numerador y denominador, encontrando sus raíces:

1. Numerador $4x^2 - 4x - 3$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{8} = \frac{4 \pm 8}{8} = \begin{cases} \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Así:

$$4x^2 - 4x - 3 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right).$$

2. Denominador $2x^2 + 3x - 9$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \frac{-3 \pm 9}{4} = \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ -\frac{12}{4} = -3. \end{cases}$$

Así:

$$2x^2 + 3x - 9 = 2(x+3)\left(x - \frac{3}{2}\right).$$

Sustituyendo,

$$f(x) = \frac{4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{2(x+3)\left(x - \frac{3}{2}\right)} = 2\frac{x + \frac{1}{2}}{x+3}, \quad \text{si } x \neq 0 \text{ y } x \neq \frac{3}{2};$$

concluimos entonces que su dominio es:
$D_f = \mathbb{R} - \left\{-3, 0, \frac{3}{2}\right\}$.

Por otro lado, la única raíz de f es $x = -\frac{1}{2}$.

(b) Puntos de discontinuidad y su clasificación

▼ $x = 0$ es una discoutiuuidad removible y se tiene que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2\frac{x + \frac{1}{2}}{x+3} = 2\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{3};$$

$x = \frac{3}{2}$ es una discontinuidad removible y se tiene que

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{3}{2}} 2\frac{x + \frac{1}{2}}{x+3} = 2\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + 3} = 2\frac{2}{\frac{9}{2}} = \frac{8}{9};$$

se tiene también que $x = -3$ es uua discontinuidad infinita.

(c) Ecuaciones de sus asíntotas verticales y horizontales

▼ Puesto que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2\frac{1 + \frac{1}{2x}}{1 + \frac{3}{x}} = 2,$$

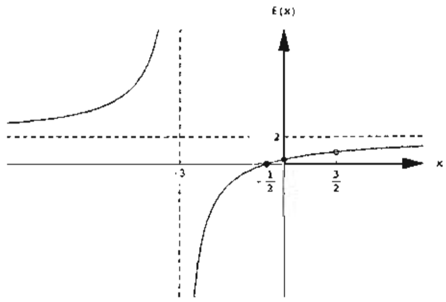
tenemos que $y = 2$ es la única asiutota horizontal.

Se ve también que $x = -3$ es una asíntota vertical. Vamos a calcular los límites laterales para ver el comportamiento asintótico de la funcióu en este número:

1. $x \to -3^- \Rightarrow x + 3 < 0 \Rightarrow x + 3 \to 0^-$
   por lo que
   $$\lim_{x \to -3^-} f(x) = 2 \text{``}\left(\frac{-3 + \frac{1}{2}}{0^-}\right)\text{''} = 2 \text{``}\left(\frac{-\frac{5}{2}}{0^-}\right)\text{''} = \text{``}\left(\frac{-5}{0^-}\right)\text{''} = +\infty.$$
2. $x \to -3^+ \Rightarrow x + 3 > 0 \Rightarrow x + 3 \to 0^+$
   por lo que
   $$\lim_{x \to -3^+} f(x) = 2 \text{``}\left(\frac{-3 + \frac{1}{2}}{0^+}\right)\text{''} = 2 \text{``}\left(\frac{-\frac{5}{2}}{0^+}\right)\text{''} = \text{``}\left(\frac{-5}{0^+}\right)\text{''} = -\infty.$$

(d) Esbozo gráfico

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es



4. Sea $f(x) = 6x^5 - 5x^3$, encontrar:

(a) Intervalos de monotonía, máximos y mínimos

▼ Calculamos la derivada
$$f'(x) = 30x^4 - 15x^2 = x^2(30x^2 - 15).$$

Las raíces de la derivada son $x = 0$ y cuando
$$30x^2 - 15 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0.7071067\,.$$

El signo de la derivada lo da el factor $30x^2 - 15 = 30\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Usamos la tabla siguiente para ver los intervalos de monotonía:

	Signo de		
Intervalo	$x + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$f'(x)$
$x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(< \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-$	$-$	$+$
$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$+$	$-$	$-$
$x > \frac{\sqrt{2}}{2} \left(> -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$+$	$+$	$+$

entonces, $f(x)$ es creciente en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty,\right)$.

Se tiene que $f(x)$ es decreciente en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

por lo tanto, aplicando el criterio de la primera derivada, en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, se tiene un máximo local estricto; y en $x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, se tiene un mínimo local estricto.

(b) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión

▼ Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 120x^3 - 30x = 30x(4x^2 - 1)$$

y vemos que:

$$4x^2 - 1 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Para calcular los intervalos de concavidad usamos la tabla:

	Signo de			
Intervalo	$x+\frac{1}{2}$	x	$x-\frac{1}{2}$	$f''(x)$
$x < -\frac{1}{2} (< 0 < \frac{1}{2})$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-\frac{1}{2} < x < 0 (< \frac{1}{2})$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(-\frac{1}{2} <) 0 < x < \frac{1}{2}$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x > \frac{1}{2} (> 0 > -\frac{1}{2})$	$+$	$+$	$+$	$+$

entonces, $f(x)$ es cóncava hacia abajo, $f''(x) < 0$, en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Y $f(x)$ es cóncava hacia arriba, $f''(x) > 0$, en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Debido a que existen cambios de concavidad y a la continuidad de f, se tienen puntos de inflexión en $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$.

(c) Decir si la función es par o impar

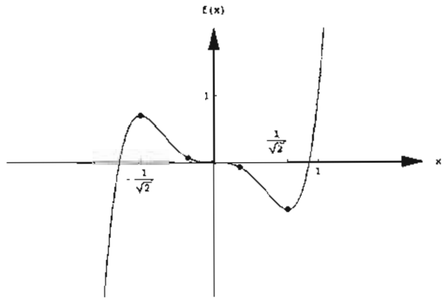
▼ Puesto que

$$f(-x) = 6(-x)^5 - 5(-x)^3 = -6x^5 + 5x^3 = -(6x^5 - 5x^3) = -f(x),$$

tenemos entonces que $f(x)$ es una función impar.

(d) Esbozo gráfico

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es:



5. Encontrar la ecuación de la recta tangente a

$$2x^2 - 3y^3 + \frac{2y}{xy - 1} = -5$$

en el punto $(0, 1)$.

▼ Las coordenadas del punto $(0, 1)$ satisfacen la ecuación

$$2 \times 0^3 - 3 \times 1^3 + \frac{2 \times 1}{0 \times 1 - 1} = -3 - 2 = -5 .$$

Existe una función $y = \phi(x)$ definida implícitamente. Vamos a derivar la ecuación con respecto a x para obtener:

$$\begin{aligned}
4x - 9y^2y' + 2\frac{(xy-1)y' - y(y + xy')}{(xy-1)^2} = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow 4x - 9y^2y' + 2\frac{xyy' - y' - y^2 - xyy'}{(xy-1)^2} = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow 4x - 9y^2y' + 2\frac{-y' - y^2}{(xy-1)^2} = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow 4x - 9y^2y' - \frac{2}{(xy-1)^2}y' - \frac{2y^2}{(xy-1)^2} = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \left[-9y^2 - \frac{2}{(xy-1)^2}\right] y' = -4x + \frac{2y^2}{(xy-1)^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow y' = \frac{-4x + \dfrac{2y^2}{(xy-1)^2}}{-9y^2 - \dfrac{2}{(xy-1)^2}} .
\end{aligned}$$

Valuamos $y'(0, 1)$:

$$y'(0,1) = \frac{\frac{2}{1}}{-9 - \frac{2}{1}} = \frac{2}{-11} ,$$

y por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 1)$ con pendiente $-\dfrac{2}{11}$ es

$$\frac{y-1}{x-0} = -\frac{2}{11} \Rightarrow y = -\frac{2}{11}x + 1 .$$

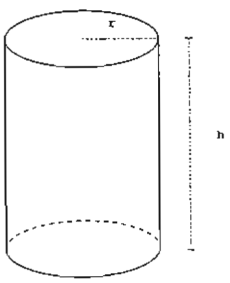
6. Calcular $f'(z)$ si $f(z) = \sqrt{4z^2 + \sqrt{27-2z}}$.

▼ Tenemos

$$f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{4z^2+\sqrt{27-2z}}}\left[8z + \frac{1}{2\sqrt{27-2z}}(-2)\right] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{4z^2+\sqrt{27-2z}}}\left[8z - \frac{1}{\sqrt{27-2z}}\right] .$$

7. Determinar el volumen máximo posible para un cilindro circular recto, si el área total de su superficie, incluyendo las dos tapas, es de 150π cm^2.

▼ Usamos la figura



El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h,$$

ésta es la función de la que deseamos calcular su máximo.

El área total es:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 150\pi, \text{ de acuerdo al enunciado.}$$

Despejamos h de la ecuación anterior y la sustituimos en el volumen

$$r^2 + rh = 75$$
$$h = \frac{75 - r^2}{r} = \frac{75}{r} - r$$
$$V(r) = \pi r^2\left(\frac{75}{r} - r\right) = 75\pi r - \pi r^3 .$$

Podemos derivar el volumen, con respecto a r:

$$V'(r) = 75\pi - 3\pi r^2 .$$

Calculamos la segunda derivada:

$$V''(r) = -6\pi r < 0, \text{ cóncava hacia abajo la gráfica de } V(r).$$

Para calcular los puntos críticos, igualamos a cero la derivada:

$$V'(r) = 0 \Rightarrow 75\pi - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{75}{3} = 25 \Rightarrow r = 5 .$$

Con este valor del radio, que da un máximo absoluto para el volumen, calculamos h:

$$h = \frac{75}{3} - 5 = 20$$

$$h_{\text{máx}} = 4r_{\text{máx}} .$$

Recuperación, evaluación 3

1. Resolver la desigualdad $2x + 5 \leq \dfrac{14}{x+1}$.

▼ Desde luego $x + 1 \neq 0$, es decir, $x \neq -1$, por lo que -1 no pertenece al conjunto solución de la desigualdad. Pueden ocurrir entonces dos cosas:

$$\text{o bien } x + 1 > 0 \text{ o bien } x + 1 < 0.$$

Analicemos el caso primero en que $x + 1 > 0$, es decir, que $x > -1$.

Multiplicando a ambos miembros de la desigualdad por $x + 1$ se preserva el sentido de la desigualdad; la propuesta es equivalente a

$$(2x+5)(x+1) \leq \frac{14}{x+1}(x+1).$$

Esto es:

$$2x^2 + 2x + 5x + 5 \leq 14 \Rightarrow 2x^2 + 7x + 5 - 14 \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 9 \leq 0\,.$$

Averigüemos cuando

$$2x^2 + 7x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49+72}}{4} =$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-7 \pm 11}{4} = \begin{cases} \dfrac{-18}{4} \\ \dfrac{4}{4} \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{9}{2} \\ 1\,. \end{cases}$$

Hallemos el signo del polinomio $f(x) = 2x^2 + 7x - 9$ en los intervalos $\left(-\infty, -\dfrac{9}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{9}{2}, 1\right)$ y $(1, +\infty)$, tomando un punto en cada uno de ellos, digamos:

$$-5 \in \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right),\ 0 \in \left(-\frac{9}{2}, 1\right) \text{ y } 2 \in (1, +\infty)\,.$$

Calculamos $f(x)$ en estos puntos:

$f(-5) = 2(-5)^2 + 7(-5) - 9 = 2 \times 25 - 35 - 9 = 50 - 44 = 6 > 0$, ahora como el polinomio es continuo en $\mathbb{R}$ y no es cero en $\left(-\infty, -\dfrac{9}{2}\right)$, entonces, en todo el intervalo tiene el mismo signo; luego $f(x) > 0$ para $x \in \left(-\infty, -\dfrac{9}{2}\right)$.

De la misma manera:

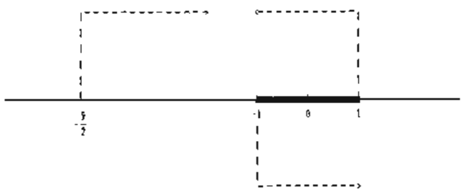
$f(0) = 2 \times 0^2 + 7 \times 0 - 9 = 2 \times 0 + 0 - 9 = 0 - 9 = -9 < 0$, por lo que $f(x) < 0$ para $x \in \left(-\dfrac{9}{2}, 1\right)$;

$f(2) = 2 \times 2^2 + 7 \times 2 - 9 = 2 \times 4 + 14 - 9 = 8 + 5 = 13 > 0$, de donde se sigue que $f(x) > 0$ para $x \in (1, +\infty)$.

Ahora busquemos $x > -1 \Leftrightarrow x \in (-1, +\infty)$, donde $f(x) = 2x^2 + 7x - 9 \le 0$, es decir,

$$x \in (-1, +\infty) \bigcap \left[-\frac{9}{2}, 1\right] = (-1, 1] .$$

Como se ve en la figura siguiente:

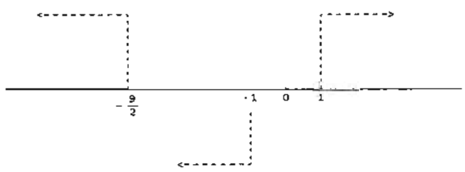


Considerando ahora que $x < -1 \Leftrightarrow x + 1 < 0$, al multiplicar a ambos miembros de la desigualdad por $x + 1$ se invierte el sentido de la desigualdad, y la que tenemos que resolver ahora es:

$$2x + 5 \le \frac{14}{x+1} \Leftrightarrow (2x + 5)(x + 1) \ge 14 \Leftrightarrow f(x) = 2x^2 + 7x - 9 \ge 0.$$

Esto es, $x \in (-\infty, -1) \bigcap \left\{ \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right] \bigcup [1, +\infty) \right\} = \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right]$.

Lo anterior se visualiza como sigue:



Por lo que en definitiva, el conjunto solución es

$$\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right] \bigcup (-1, 1] .$$

Como podremos verificar, $-\frac{9}{2}$ y 1 satisfacen la desigualdad propuesta, pues al hacer $x = -\frac{9}{2}$ & $x = 1$ respectivamente:

$$2\left(-\frac{9}{2}\right) + 5 = -9 + 5 = -4 \le \frac{14}{-\frac{9}{2}+1} = \frac{14}{-\frac{7}{2}} = -\frac{14 \times 2}{7} = -4, \text{ y también}$$

$$2 \times 1 + 5 = 2 + 5 = 7 \le \frac{14}{1+1} = \frac{14}{2} = 7 .$$

Pero en cambio, como se demuestra, $x = -2$ & $x = 2$ no la satisfacen:

$$2(-2) + 5 = -4 + 5 = 1 \not\leq \frac{14}{-2+1} = \frac{14}{-1} = -14;$$
$$2(2) + 5 = 4 + 5 = 9 \not\leq \frac{14}{2+1} = \frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}.$$

2. Resolver la desigualdad $|-2x - 4| \geq 3 - 2x$.

▼ Esta desigualdad equivale a las dos desigualdades

$$-2x - 4 \geq 3 - 2x, \text{ la primera y } -2x - 4 \leq -(3 - 2x), \text{ la segunda,}$$

por lo que tenemos que resolver cada una y unir los conjuntos solución resultantes.

Trasponiendo términos en la primera obtenemos que:

$$-2x - 4 \geq 3 - 2x \Leftrightarrow -2x + 2x \geq 3 + 4 \Leftrightarrow 0 \geq 7.$$

Lo cual no ocurre para cualquier x, de lo que se desprende que el conjunto solución de esta desigualdad es el conjunto vacío, $\emptyset$.

Haciendo lo mismo en la segunda tenemos:

$$-2x - 4 \leq -(3 - 2x) \Leftrightarrow -2x - 4 \leq -3 + 2x \Leftrightarrow -2x - 2x \leq -3 + 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right).$$

Por lo que el conjunto solución es precisamente

$$\emptyset \bigcup \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right).$$

Confirmemos, por ejemplo, que $x = -\frac{1}{4}$ sí satisface la desigualdad, poniendo en lugar de x, $-\frac{1}{4}$

$$\left|-2\left(-\frac{1}{4}\right) - 4\right| = \left|+\frac{2}{4} - 4\right| = \left|\frac{1}{2} - 4\right| = \left|\frac{1-8}{2}\right| = \left|-\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2} \geq$$
$$\geq 3 - 2\left(-\frac{1}{4}\right) = 3 + \frac{2}{4} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}.$$

3. Sean

$$f(x) = 1 - 2x^2;\ g(x) = \sqrt{3x - 1}\ \&\ h(x) = \frac{-2}{x-2};$$

determinar:

(a) Los siguientes dominios: D_f, D_g & D_h

▼ Dominio de f: $D_f = \mathbb{R}$;

Dominio de g: $D_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid 3x - 1 \geq 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 3x \geq 1 \} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq \frac{1}{3} \right\} = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right);$

y, por último:

Dominio de h: $D_h = \mathbb{R} - \{ x \in \mathbb{R} \mid x - 2 = 0 \} = \mathbb{R} - \{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2 \} = \mathbb{R} - \{ 2 \}$.

(b) Las funciones: $\left[\left(\dfrac{f}{g}\right)\circ h\right](x)$ & $(g^2h - f)(x)$

▼ Tenemos que

$$\left[\left(\frac{f}{g}\right)\circ h\right](x) = \frac{f}{g}[h(x)] = \frac{f}{g}\left(\frac{-2}{x-2}\right) = \frac{f\left(\dfrac{-2}{x-2}\right)}{g\left(\dfrac{-2}{x-2}\right)} = \frac{1-2\left(\dfrac{-2}{x-2}\right)^2}{\sqrt{3\dfrac{-2}{x-2}-1}} =$$

$$= \frac{1-2\dfrac{4}{(x-2)^2}}{\sqrt{\dfrac{-6}{x-2}-1}} = \frac{\dfrac{(x-2)^2-8}{(x-2)^2}}{\sqrt{\dfrac{-6-(x-2)}{x-2}}} = \frac{(x-2)^2-8}{(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{-6-x+2}} =$$

$$= \frac{x^2-4x-4}{(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{-4-x}}\,.$$

$$(g^2h - f)(x) = (g^2h)(x) - f(x) = g^2(x)h(x) - f(x) =$$

$$= (\sqrt{3x-1})^2\frac{-2}{x-2} - (1-2x^2) = \frac{(3x-1)(-2)-(1-2x^2)(x-2)}{x-2} =$$

$$= \frac{-6x+2-x+2+2x^3-4x^2}{x-2} = \frac{2x^3-4x^2-7x+4}{x-2}\,.$$

4. Sea $f(x) = \dfrac{4x^3-2x^2-12x}{2x^3-x^2-3x}$

determinar:

(a) Dominio y raíces

▼ Dominio de f: como $f(x)$ es una función racional su dominio es el complemento de las raíces del denominador. Como

$$2x^3 - x^2 - 3x = x(2x^2 - x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$\text{y como } 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{4} = \frac{1\pm\sqrt{25}}{4} = \frac{1\pm 5}{4} = \begin{cases}\dfrac{3}{2}\\ -1\,,\end{cases}$$

se tiene entonces que $D_f = \mathbb{R} - \left\{-1, 0, \dfrac{3}{2}\right\}$.

Las raíces deben ser los puntos donde se anule el numerador:

$$4x^3 - 2x^2 - 12x = 2x(2x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ y también}$$

$$x = \frac{1\pm\sqrt{1+48}}{4} = \frac{1\pm\sqrt{49}}{4} = \frac{1\pm 7}{4}\begin{cases}2\\ -\dfrac{3}{2}\,.\end{cases}$$

Pero, como $0 \notin D_f$, entonces las únicas raíces son $-\dfrac{3}{2}$ y 2.

(b) Puntos de discontinuidad y clasificación

▼ La función f es discontinua en las raíces del denominador -1, 0 y $\dfrac{3}{2}$. Ahí tenemos que

$$\lim_{x\to -1^{\mp}} f(x) = \lim_{x\to -1^{\mp}} \frac{2^2x(x-2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}{2x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+1)} = \lim_{x\to -1^{\mp}} \frac{2(x-2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+1)} = \mp\infty,$$

pues el $\lim\limits_{x\to -1}(x-2) = -3$ y el $\lim\limits_{x\to -1}\left(x-\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2}$ son negativos.

Y en cambio, el $\lim\limits_{x\to -1} 2\left(x+\frac{3}{2}\right) > 0$.

Mientras que el $\lim\limits_{x\to -1^-}(x+1) = 0$ con valores negativos y el $\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1) = 0$ con valores positivos

Por otro lado

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{2(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)} = \frac{2(-2)\frac{3}{2}}{\left(-\frac{3}{2}\right)1} = \frac{-6}{-\frac{3}{2}} = \frac{6\times 2}{3} = 4;$$

por último

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}^{\mp}} f(x) = \lim_{x\to \frac{3}{2}^{\mp}}\frac{2(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)} = \pm\infty .$$

Pues el $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} 2\left(x+\frac{3}{2}\right)$ y el $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}(x+1)$ son positivos. Además $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}(x-2) < 0$.

Y el $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^-}\left(x-\frac{3}{2}\right) = 0$ con valores negativos; pero el $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^+}\left(x-\frac{3}{2}\right) = 0$ con valores positivos.

Luego, $x = -1$ & $x = \frac{3}{2}$ son discontinuidades esenciales: específicamente ambas son infinitas; mientras que en $x = 0$ hay una discontinuidad removible.

(c) Ecuaciones de sus asíntotas verticales y horizontales

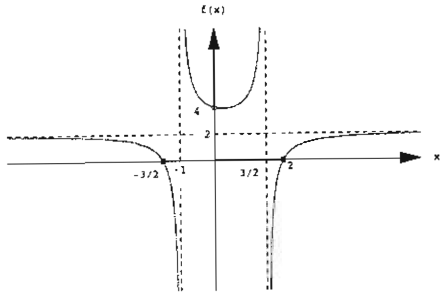
▼ Por lo que acabamos de ver, las rectas $x = -1$ & $x = \frac{3}{2}$ son asíntotas verticales, y para hallar la horizontal calculamos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left(4-\frac{2}{x}-\frac{12}{x^2}\right)}{x^3\left(2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4-\frac{2}{x}-\frac{12}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}} = \frac{4-0-0}{2-0-0} = \frac{4}{2} = 2,$$

luego la recta $y = 2$ es asíntota horizontal

(d) Esbozo gráfico

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es



5. Sea $f(x) = \frac{9}{5}x^5 - 3x^3$, determinar:

(a) Intervalos de monotonía, máximos y mínimos

▼ La monotonía de la función nos la da su derivada:

$$f'(x) = 9x^4 - 9x^2 = 9x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ ó } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = -1 \text{ ó } x = 1\,.$$

Veamos el signo de la derivada fuera de estos tres puntos críticos, aprovechando el hecho de que es continua en $\mathbb{R}$.

Los tres puntos críticos dividen al eje real en cuatro subintervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Elegimos un punto en cada uno de ellos y determinamos el signo de la derivada en él, que será el mismo que tiene en todo el intervalo, ya que ahí no tiene raíces. Así:

$-2 \in (-\infty, -1) \Rightarrow f'(-2) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$;

$-\frac{1}{2} \in (-1, 0) \Rightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ en $(-1, 0) \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-1, 0)$;

$\frac{1}{2} \in (0, 1) \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ en $(0, 1) \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $(0, 1)$; y por último,

$2 \in (1, +\infty) \Rightarrow f'(2) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ en $(1, +\infty) \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(1, +\infty)$.

También de aquí resulta que en $x = -1$ hay un máximo, pues la función pasa de ser creciente a ser decreciente; y en $x = 1$ hay un mínimo, porque ahora la función cambia de decreciente a creciente.

El mínimo es $f(1) = \frac{9}{5} - 3 = \frac{9 - 15}{5} = -\frac{6}{5}$.

Y el máximo es $f(-1) = -\frac{9}{5} + 3 = \frac{-9 + 15}{5} = \frac{6}{5}$, naturalmente, pues la función es impar.

(b) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión

▼ De esto nos habla la segunda derivada:

$$f''(x) = (9x^4 - 9x^2)' = 36x^3 - 18x = 18x(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0.707106781\,.$$

Procedamos exactamente igual a como lo hicimos para discernir la monotonía de f. Sean:

$$-1 \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$
$$-\frac{1}{2} \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right);$$
$$\frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y por último}$$
$$1 \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right);$$

$f''(-1) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow f(x)$ es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

$f''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \Rightarrow f(x)$ es cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$;

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \text{ en } \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia abajo en } \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$f''(1) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \text{ en } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right) \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia arriba en } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right).$$

En $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y en $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ hay puntos de inflexión, ya que en ellos la curva continua cambia el sentido de su concavidad.

Los puntos de la gráfica de f son:

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(-\frac{1}{2^{1/2}}\right)\right] = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{9}{5}2^{-5/2} + 3 \times 2^{-3/2}\right) \approx \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0.74246212\right);$$

$$[0, f(0)] = (0, 0)$$

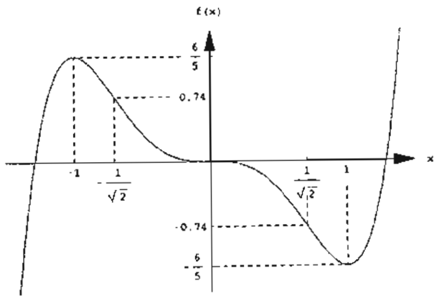
$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{1}{2^{1/2}}\right)\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -0.74246212\right).$$

(c) Decir si la función es par o impar

▼ Ya veíamos que era impar.

(d) Esbozo gráfico

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es



6. Calcular $f'(x)$, si $f(x) = \sqrt{4x^2 + \sqrt{27 - 2x}}$.

Además, determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de coordenadas $(1, 3)$.

▼ Escribamos:

$$f(x) = [4x^2 + (27 - 2x)^{1/2}]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{8x + \dfrac{-2}{2\sqrt{27 - 2x}}}{2\sqrt{4x^2 + \sqrt{27 - 2x}}} = \frac{8x\sqrt{27 - 2x} - 1}{2\sqrt{(27 - 2x)(4x^2 + \sqrt{27 - 2x})}}.$$

Luego, la pendiente de la recta tangente en el punto $(1, 3)$ es

$$f'(1) = \frac{8\sqrt{27 - 2} - 1}{2\sqrt{25(4 + 5)}} = \frac{40 - 1}{2\sqrt{225}} = \frac{39}{2 \times 15} = \frac{39}{30};$$

y la ecuación de la recta tangente requerida es

$$y-3=\frac{39}{30}(x-1)\Rightarrow y=\frac{39}{30}x-\frac{39}{30}+3\Rightarrow y=\frac{39}{30}x+\frac{51}{30}.$$

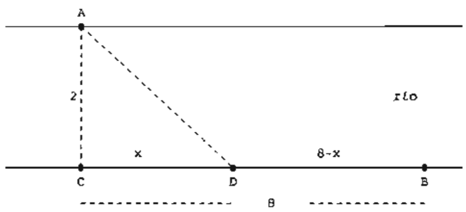
Observación: el punto $(1,3)$ sí pertenece a la gráfica de la función, pues

$$f(1)=\sqrt{4+\sqrt{27-2}}=\sqrt{4+\sqrt{25}}=\sqrt{4+5}=\sqrt{9}=3.$$

7. Un hombre se encuentra en un punto A de la orilla de un río rectilíneo de 2 km de ancho. Sea C el punto enfrente de A en la otra orilla. El hombre desea llegar a un punto B situado a 8 km a la derecha y en la misma orilla de C.

El hombre puede remar en su bote cruzando el río hasta el punto D entre B y C. Si rema a 6 km/h y corre a 8 km/h ¿a qué distancia debe estar D del punto C, para llegar al punto B lo más pronto posible?

▼ Hagamos un bosquejo figurado de la situación:



Queremos hallar x de manera que el tiempo para ir de A a D por el río, y de D a B por la orilla, sea mínimo. Por el teorema de Pitágoras $AD=\sqrt{4+x^2}$; entonces, el tiempo empleado para recorrer esta distancia es $t_1=\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{6}$ horas ya que

tiempo empleado $=\dfrac{\text{espacio recorrido}}{\text{velocidad}}$, puesto que velocidad $=\dfrac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo empleado}}$.

El tiempo para recorrer DB es $t_2=\dfrac{8-x}{8}$ horas.

La función de la que vamos a buscar su máximo es

$$T(x)=t_1+t_2=\frac{\sqrt{4+x^2}}{6}+\frac{8-x}{8}.$$

Su derivada es

$$T'(x)=\frac{2x}{2\times 6\sqrt{4+x^2}}-\frac{1}{8}=0\Leftrightarrow\frac{x}{6\sqrt{4+x^2}}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow 6\sqrt{4+x^2}=8x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 36(4+x^2)=8^2x^2\Leftrightarrow 144=64x^2-36x^2\Leftrightarrow 28x^2=144\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{144}{28}=\frac{36}{7}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{36}{7}}=\frac{6}{\sqrt{7}}\approx 2.26 \text{ km, es decir,}$$

éste es el único punto crítico.

Calculamos la segunda derivada:

$$T''(x) = \frac{6\sqrt{4+x^2} - \dfrac{6x2x}{2\sqrt{4+x^2}}}{(6\sqrt{4+x^2})^2} = \frac{6(4+x^2) - 6x^2}{36(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} = \frac{24+6x^2-6x^2}{36(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} =$$
$$= \frac{24}{36(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} = \frac{2}{3(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}\,.$$

Observemos que $T'' > 0$ siempre y en particular $T''(2.26) > 0$, por lo cual existe un mínimo local en $x = 2.26$ km; podemos considerar que el dominio de la función T es $D_T = [0, 8]$, pues no tendria sentido desembarcar a la izquierda de C ni más allá de B; luego el mínimo es el menor de los tres números:

$$T(0) = \frac{2}{6} + \frac{8-0}{8} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}\text{ h } = 1.\bar{3}\text{ hora};$$
$$T(2.26) = \frac{\sqrt{4+(2.26)^2}}{6} + \frac{8-2.26}{8} = \frac{\sqrt{9.14}}{6} + \frac{5.74}{8} = 1.2175\text{ hora};$$
$$T(8) = \frac{\sqrt{4+8^2}}{6} + \frac{8-8}{8} = \frac{\sqrt{4+68}}{6} + \frac{0}{8} \approx 1.41421352\text{ hora}.$$

Luego efectivamente el tiempo mínimo se logra si desembarca a 2.26 km de C.

Recuperación, evaluación 4

1. Considere la función $f(x) = \dfrac{2x}{(2x-4)^2}$ y determine:

   (a) El dominio, raíces e intervalos de continuidad

   ▼ Su dominio: $D_f = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 2x - 4 \neq 0 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \,\} = \mathbb{R} - \{\, 2 \,\}$;
   Su raíz es $x = 0$.
   $f(x)$ es continua en su dominio.

   (b) Asíntotas verticales y horizontales

   ▼ Si escribimos:

   $$f(x) = \frac{2x}{4(x-2)^2} = \frac{x}{2(x^2-4x+4)} = \frac{1}{2(x-4-\frac{4}{x})},$$

   vemos que:

   $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0;$$

   por lo tanto, $y = 0$ es una asíntota horizontal.
   Vemos también que $x = 2$ es una asíntota vertical.
   Tenemos que:

   $$\lim_{x\to 2^{\mp}} f(x) = +\infty.$$

   (c) Los intervalos de monotonía, los puntos máximos y mínimos (absolutos y relativos)

   ▼ Partiendo de

   $$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x}{(x-2)^2},$$

   calculamos la derivada

   $$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x-2)^2 - x \times 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{1}{2} \times \frac{(x-2) - 2x}{(x-2)^3} =$$
   $$= \frac{1}{2} \times \frac{-2-x}{(x-2)^3} = -\frac{1}{2} \times \frac{x+2}{(x-2)^3}.$$

   El signo de esta derivada viene dado por $-(x-2)$ y $x+2$.
   Construimos la tabla:

	Signo de		
Intervalo	$x+2$	$-(x-2)$	$f'(x)$
$x < -2\,(< 2)$	$-$	$+$	$-$
$-2 < x < 2$	$+$	$+$	$+$
$x > 2\,(> -2)$	$+$	$-$	$-$

y concluimos que:

$f(x)$ es creciente para x en $(-2, 2)$; y que

$f(x)$ es decreciente para x en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$.

Con esta información se ve que $f(x)$ no tiene máximo relativo ni absoluto y que en $x = -2$, $f(x)$ tiene un mínimo local que también es absoluto, en el punto

$[-2, f(-2)] = \left(-2, \dfrac{-4}{64}\right) = \left(-2, -\dfrac{1}{16}\right)$.

(d) Los intervalos de concavidad y puntos de inflexión

▼ Partiendo de

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{x+2}{(x-2)^3},$$

calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{(x-2)^3 - (x+2) \times 3(x-2)^2}{(x-2)^6} = -\frac{1}{2} \times \frac{(x-2) - (3x+6)}{(x-2)^4} =$$
$$= -\frac{1}{2} \times \frac{x-2-3x-6}{(x-2)^4} = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x-8}{(x-2)^4} = \frac{x+4}{(x-2)^4}.$$

El signo de la segunda derivada lo produce $x + 4$, así:

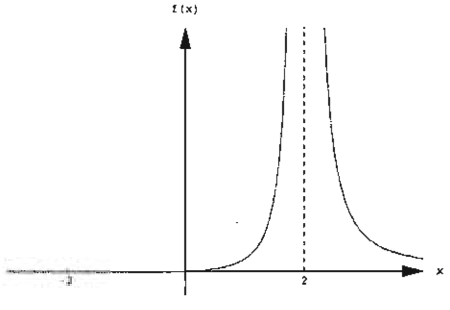
$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -4)$ pues $f''(x) < 0$;

$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-4, +\infty)$ ya que $f''(x) > 0$;

En $x = -4$ hay un punto de inflexión.

(e) Bosquejo gráfico y rango

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es



$$R_f = \left[-\frac{1}{16}, +\infty\right).$$

2. La altura de un objeto a los t segundos, después de dejarlo caer desde 500 pies, está dada por

$$s(t) = 500 - 16t^2.$$

(a) ¿En qué intervalo de tiempo el objeto se encuentra arriba de 356 pies?

▼ Contestar esta pregunta es equivalente a resolver la desigualdad:

$$500 - 16t^2 > 356 \Leftrightarrow 144 > 16t^2 \Leftrightarrow 9 > t^2 \Leftrightarrow 3 > |t|\,.$$

La solución de la desigualdad es $t \in (-3, 3)$, pero considerando que $t \geq 0$, el objeto se encuentra arriba de 356 pies si $t \in [0, 3)$.

(b) Calcule la velocidad media del objeto en el intervalo de tiempo $[1, 4]$

▼ Si efectuamos los siguientes calculos:

$$\frac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = \frac{(500 - 16 \times 16) - (500 - 16)}{3} = \frac{-256 + 16}{3} = \frac{-240}{3} = -80,$$

comprobamos que la velocidad media es de -80 pies/s. El objeto cae.

(c) Determine la velocidad instantánea al tiempo t

▼ ¿En qué momento la velocidad instantánea es igual a la velocidad media calculada eu el inciso anterior?

Calculamos la velocidad instantánea

$$v(t) = s'(t) = -32t$$

y con ello comprobamos que

$$-32t = -80 \Leftrightarrow t = 2.5 \text{ segundos.}$$

Nótese que $2.5 \in (1, 4)$. Se cumple con el teorema del Valor Medio.

3. Considere la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{13 - x^2} - x - 1}{x^2 - 5x + 6}\,.$$

(a) Viendo la tabla de valores de f, calcule $\lim_{x \to 2} f(x)$ con dos cifras decimales exactas

x	$f(x)$
1.997	1.66096
1.998	1.66286
1.999	1.66476
2	Indeterminado
2.001	1.66858
2.002	1.67049
2.003	1.67241

▼ Se comprueba que $\lim_{x \to 2} f(x) = 1.66$

(b) Calcule exactamente $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, usando la expresión algebraica de la función

▼ Vemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{13-x^2}-x-1}{x^2-5x+6} &= \frac{\sqrt{13-x^2}-(x+1)}{x^2-5x+6}\times\frac{\sqrt{13-x^2}+(x+1)}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)} = \\
&= \frac{(13-x^2)-(x+1)^2}{x^2-5x+6}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)} = \\
&= \frac{13-x^2-(x^2+2x+1)}{x^2-5x+6}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)} = \\
&= \frac{-2x^2-2x+12}{x^2-5x+6}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)} = \\
&= -2\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)} = \\
&= -2\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-3)}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)} = \\
&= -2\frac{x+3}{x-3}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)} \quad (\text{si } x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2).
\end{aligned}
$$

Entonces

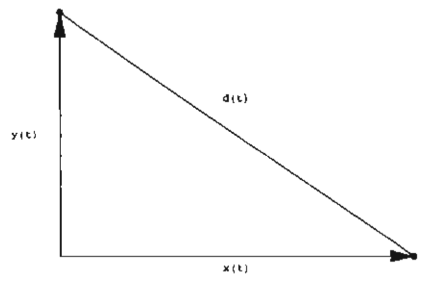
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2}\left[-2\frac{x+3}{x-3}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)}\right] \\
&= -2\frac{5}{-1}\times\frac{1}{\sqrt{13-4}+(2+1)} = \frac{10}{6} = 1.6667.
\end{aligned}
$$

¿Cuál es la tercera cifra decimal exacta del valor del límite?

Con lo anterior calculado, podemos responder que 6 es la tercera cifra decimal del límite.

4. Dos trenes parten de una estación con 2 horas de diferencia. El primero en partir se dirige hacia el norte con una velocidad de 100 km/h; el segundo en partir se dirige hacia el este a una velocidad de 60 km/h; ¿a qué razón está cambiando la distancia entre los 2 trenes, 3 horas después de partir el segundo tren?

▼ Usamos la figura



Para todo tiempo t, después que ha salido el segundo tren se tiene:

$$d^2(t) = x^2(t) + y^2(t).$$

Derivando con respecto a t tenemos:

$$2d(t)d'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t),$$

entonces

$$d(t)d'(t) = x(t)x'(t) + y(t)y'(t)$$

y

$$d'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{d(t)}. \tag{A}$$

Tenemos la siguiente información:

$x(t) = 60t$ km, $t = 0$ es la salida del segundo tren; $x'(t) = 60$ km/hora.

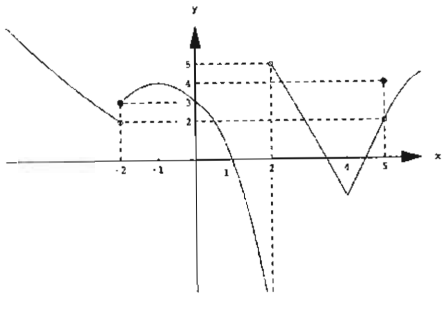
$y(t) = 200 + 100t$ km; cuando $t = 0$, el primer tren ha recorrido 200 km; $y'(t) = 100$ km/hora.

$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$.

Usando esta información en (A), para $t = 3$:

$$d'(3) = \frac{180 \times 60 + 500 \times 100}{\sqrt{180^2 + 500^2}} \approx 114.412 \text{ km/hora}.$$

5. Sea $f(x)$ la función que tiene la siguiente gráfica:



Determinar:

(a) Los intervalos de continuidad y los siguientes valores

$$\lim_{x \to a^-} f(x), \ \lim_{x \to a^+} f(x), \ \lim_{x \to a} f(x), \ \& \ f(a)$$

para $a = -2$, $a = 2$, $a = 5$.

▼ La función es continua en

$$(-\infty, -2) \bigcup [-2, 2) \bigcup (2, 5) \bigcup (5, +\infty).$$

Tenemos

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ no existe; $f(-2) = 3$;

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe; $f(2)$ no está definido;

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 2$; $f(5) = 4$.

(b) La clasificación de discontinuidades ¿En cuáles puntos y con qué valores se puede redefinir $f(x)$ para convertirla en una función continua en esos puntos?

▼ En $x = -2$ se tiene una discontinuidad de salto.

En $x = 2$ se tiene una discontinuidad esencial infinita.

En $x = 5$ se tiene una discontinuidad removible. Si redefinimos la función como $f(5) = 2$, la función se hace continua en este punto.

(c) Los intervalos donde $f' > 0$, $f'(x) < 0$ y los puntos donde $f' = 0$ o donde no existe la derivada:

▼ $f'(x) < 0$ en$(-\infty, -2)$, $(-1, 2)$ y en $(2, 4)$;

$f'(x) > 0$ en $(-2, -1)$, y en $(4, +\infty) - \{5\}$;

$f'(x) = 0$ en $x = -1$;

$f'(x)$ no existe en $x = -2$, $x = 2$, $x = 4$ y $x = 5$.

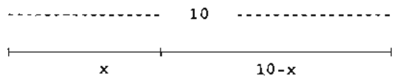
6. Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. Hallar cómo debe cortarse el alambre de modo que el área encerrada sea:

(a) Máxima

(b) Mínima

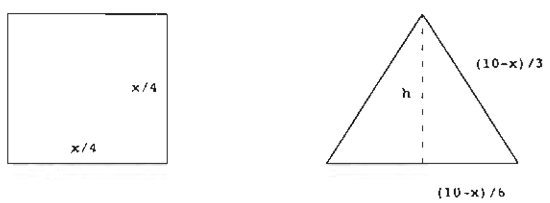
Interpretar prácticamente sus resultados.

▼ Usando la siguiente figura



La parte x del alambre se usa para el cuadradado, por lo tanto cada lado tiene longitud $\dfrac{x}{4}$.

La parte $10 - x$ del alambre se usa para el triángulo, por lo tanto cada lado tiene longitud $\dfrac{10 - x}{3}$.



De la figura del triángulo, obtenemos la siguiente relación usando el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + \left(\frac{10-x}{6}\right)^2 = \left(\frac{10-x}{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{1}{9}(10-x)^2 - \frac{1}{36}(10-x)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 = \frac{3}{36}(10-x)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{6}(10-x).$$

El área del cuadrado

$$A_C(x) = \frac{x^2}{16}.$$

El área del triángulo

$$A_T(x) = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(10-x) \times \frac{\sqrt{3}}{6}(10-x) = \frac{\sqrt{3}}{36}(10-x)^2.$$

El área de ambas figuras

$$A(x) = A_T(x) + A_C(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(10-x)^2.$$

Ésta es la función a la cual deseamos calcular su máximo y mínimo.

Nótese que el dominio de esta función es $D_A = [0, 10]$.

Calculamos la primera derivada:

$$A'(x) = \frac{1}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{36} \times 2(10-x)(-1) = \frac{1}{8}x - \frac{\sqrt{3}}{18}(10-x) =$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{18}x = \frac{9+4\sqrt{3}}{72}x - \frac{5\sqrt{3}}{9}.$$

Calculamos el punto crítico:

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{9+4\sqrt{3}}{72}x - \frac{5\sqrt{3}}{9} = 0 \Rightarrow x = \frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \approx 4.34965.$$

Puesto que al calcular la segunda derivada se tiene

$$A''(x) = \frac{9+4\sqrt{3}}{72} > 0,$$

entonces el punto crítico anterior es un mínimo local.
Calculamos la función $A(x)$ en los extremos de su dominio:

$$A(0) = \frac{\sqrt{3}}{36}100 \approx 4.81125 \text{ y } A(10) = \frac{100}{16} = 6.25.$$

Vemos entonces que la máxima área encerrada es cuando $x = 10$, es decir, sólo se construye el cuadrado.
Y la mínima área encerrada es cuando $x = 4.34965$. Se construyen ambas figuras.

2892872

Recuperación, evaluación 5

1. Para la función $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x}$, determine:

   (a) Dominio, raíces, paridad

   ▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.
   Raíces:
   $$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -2 \Leftrightarrow x = (-2)^{\frac{1}{3}} = -(2)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{2}.$$
   Paridad: puesto que $f(1) = \dfrac{1+2}{1} = 3$ & $f(-1) = \dfrac{-1+2}{-1} = -1$, entonces no se cumple ni $f(1) = f(-1)$ ni $f(-1) = -f(-1)$. Con lo cual, la función no es ni par ni impar.

   (b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

   ▼ Podemos escribir.
   $$f(x) = \frac{x^3+2}{x} = x^2 + \frac{2}{x};$$
   derivamos esta última expresión
   $$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3-2}{x^2} = 2(x-1)\frac{x^2+x+1}{x^2};$$
   el discriminante de la cuadrática x^2+x+1 es:
   $$1^2 - 4 \times 1 \times 1 < 0 \Rightarrow$$
   $\Rightarrow$ la cuadrática no tiene raíces reales y se ve que siempre es positiva.

   Por ejemplo, en $x = 0$ vale $1 > 0$.

   Por lo tanto el signo de la derivada viene dado por el factor $x - 1$.
   Concluimos entonces que:
   $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 1) - \{0\} \Rightarrow f(x)$ es decreciente si $x \in (-\infty, 0)$ y $x \in (0, 1)$;
   $f'(x) > 0$ si $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f(x)$ es creciente si $x \in (1, +\infty)$.

   (c) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión

   ▼ Calculamos la segunda derivada a partir de $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} = 2x - 2x^{-2}$
   $$f''(x) = 2 + 4\frac{1}{x^3} = \frac{2x^3+4}{x^3} = \frac{2}{x^2}\frac{x^3+2}{x} = \frac{2}{x^2}\frac{(x+2^{\frac{1}{3}})(x^2-2^{\frac{1}{3}}x+2^{\frac{2}{3}})}{x}$$

La cuadrática $x^2 - 2^{\frac{1}{3}}x + 2^{\frac{2}{3}}$ tiene discriminante:

$$2^{\frac{2}{3}} - 4 \times 2^{\frac{2}{3}} < 0 \Rightarrow \text{ no tiene raíces reales y además siempre es positiva.}$$

$$\text{Por ejemplo en, } x = 0 \text{ vale } 2^{\frac{2}{3}} > 0.$$

Así, el signo de la segunda derivada viene dado por $x + 2^{\frac{1}{3}}$ & x.
Usamos la tabla siguiente para ver el signo de la segunda derivada:

	Signo de		
Intervalo	$x - (-\sqrt[3]{2})$	x	$f''(x)$
$x < -\sqrt[3]{2} (< 0)$	$-$	$-$	$+$
$-\sqrt[3]{2} < x < 0)$	$+$	$-$	$-$
$x > 0 (> -\sqrt[3]{2})$	$+$	$+$	$+$

Vemos entonces que:
$f''(x) > 0$ si $x \in \left(-\infty, -\sqrt[3]{2}\right) \bigcup (0, +\infty) \Rightarrow f(x)$ es cóncava hacia arriba ahí;
$f''(x) < 0$ si $x \in \left(-\sqrt[3]{2}, 0\right) \Rightarrow f(x)$ es cóncava hacia abajo ahí;
En $x = -\sqrt[3]{2}$ hay un punto de inflexión.

(d) Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades

▼ La función es continua en todo su dominio y en $x = 0$ tiene una discontinuidad esencial.

(e) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales

▼ Vemos que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \to 0^-} x^2 + \lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x} = -\infty\,;$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = 0 + \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x} = +\infty\,;$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} x^2 + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = +\infty\,;$$

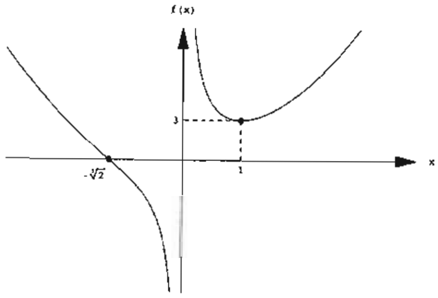
$x = 0$ es una asíntota vertical y no tiene asíntotas horizontales.

(f) Máximos y mínimos relativos y absolutos

▼ Analizando el cambio de signo de la primera derivada, vemos que $x = 1$ es un mínimo local. No existen máximos ni mínimos absolutos.

(g) Esbozo gráfico y rango

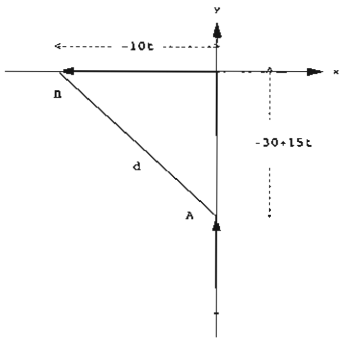
▼ La gráfica de la función $f(x)$ es:



El rango: $R_f = \mathbb{R}$

2. A las 13 : 00 horas, el barco A se encuentra 30 km al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 km/h. El barco B navega hacia el oeste a 10 km/h. ¿A qué hora se alcanza la mínima distancia entre las dos embarcaciones?

▼ Observamos, al bosquejar una figura con estos datos que:



la posición inicial del barco A es $(0, -30)$. En el instante t, se encuentra en la posición $(0, -30 + 15t)$.

La posición inicial del barco B es $(0, 0)$, según la figura. En el instante t, se encuentra en la posición $(-10t, 0)$

La distancia entre los dos barcos es:

$$d = \sqrt{(-10t)^2 + (-30 + 15t)^2} = \sqrt{100t^2 + 900 - 900t + 225t^2} = \sqrt{325t^2 - 900t + 900}\,.$$

Ésta es la función de la que deseamos calcular el mínimo. Sin embargo vamos a trabajar con la función $D = d^2$ que tiene el mismo comportamiento.

$$D = d^2 = 325t^2 - 900t + 900.$$

Derivamos

$$D' = 650t - 900 \text{ y después}$$

calculamos el punto crítico

$$650t - 900 = 0 \Rightarrow t = \frac{900}{650} = \frac{18}{13} \approx 1.385.$$

Sabemos que es un mínimo, puesto que al calcular la segunda derivada:

$$D'' = 650 > 0$$

es decir, los barcos están más cercanos a las 14 : 385 horas.

3. Encontrar las intersecciones con los ejes de la recta tangente a la curva:

$$\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{x+3}} + xy + y^4 = 4$$

en el punto $(1, 1)$.

▼ Primero vamos a comprobar que el punto $(1, 1)$ satisface la ecuación, es decir, que se encuentra sobre la gráfica de la función $y = f(x)$ definida implícitamente.

$$\sqrt{1 + 1^2 + \sqrt{1+3}} + 1 \times 1 + 1^4 = \sqrt{2+2} + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 4.$$

Ahora vamos a derivar implícitamente la ecuación dada:

$$\frac{1}{2\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{x+3}}}\left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right) + xy' + y + 4y^3y' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(x + 4y^3) = -\frac{1}{2\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{x+3}}}\left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right) - y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{x+3}}}\left(2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}\right) - y}{x + 4y^3}.$$

Evaluamos esta derivada en el punto $(1, 1)$, es decir, al sustituir $x = 1$ y $y = 1$ en la derivada, obtenemos:

$$y'(1, 1) = \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{4}}\left(2 + \dfrac{1}{2\sqrt{4}}\right) - 1}{1 + 4} = \frac{-\dfrac{1}{4}\left(2 + \dfrac{1}{4}\right) - 1}{5} =$$

$$= \frac{-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{9}{4}\right) - 1}{5} = \frac{-\dfrac{9}{16} - \dfrac{16}{16}}{5} = \frac{-\dfrac{25}{16}}{5} = -\frac{5}{16}.$$

La ecuación solicitada de la recta tangente es

$$y - 1 = -\frac{5}{16}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{5}{16}x + \frac{5}{16} + 1 \Rightarrow y = -\frac{5}{16}x + \frac{21}{16}.$$

La ordenada en el origen es $y = \dfrac{21}{16}$.

La abscisa en el origen es cuando:

$$-\frac{5}{16}x + \frac{21}{16} = 0 \Rightarrow -5x = -21 \Rightarrow x = \frac{-21}{-5} = \frac{21}{5}.$$

4. Una partícula se mueve en línea recta, y su posición instantánea está dada por la función

$$s(t) = t^3 - 3t^2 + 8.$$

(a) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $s'(t) = 8$?

▼ Se tiene

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t$$

por lo tanto

$$v(t) = 8 \Rightarrow 3t^2 - 6t = 8 \Rightarrow 3t^2 - 6t - 8 = 0.$$

Los ceros de esta cuadrática son:

$$\frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(-8)}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 96}}{6} \approx \frac{6 \pm 11.489}{6} = \begin{cases} 2.915 \\ -0.915. \end{cases}$$

Tomando el valor positivo:

$$s(2.915) = (2.915)^3 - 3(2.915)^2 + 8 = 7.277,$$

la partícula se encuentra a la derecha del origen 7.27 unidades.

(b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando su aceleración es cero?

▼ Tenemos que

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 6.$$

Así

$$a(t) = 0 \Rightarrow 6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Tenemos entonces:

$$v(1) = 3 - 6 = -3,$$

es decir, la partícula se está moviendo en el sentido negativo del eje.

5. Trace una posible gráfica para una función continua $f(x)$ en su dominio: $(-\infty, 5] - \{-2, 3\}$ que satisfaga

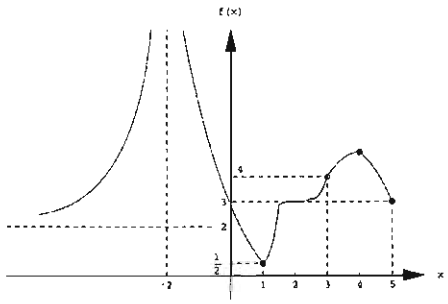
(a)

$$f(5) = 3, \quad f(1) = \frac{1}{2};$$
$$\lim_{x \to -2} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 3} f(x) = 4;$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2;$$

(b)

$$f'(1) = 0, \; f'(2) = 0, \; f'(4) = 0;$$
$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in (-\infty, -2);$$
$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in (1, 4) - \{3\};$$
$$f'(x) < 0 \text{ si } x \in (-2, 1);$$
$$f'(x) < 0 \text{ si } x \in (4, 5).$$

▼ Una gráfica de la función $f(x)$ sería:



Especifique los intervalos de concavidad de su gráfica, los máximos y mínimos locales, y absolutos.

La función es cóncava hacia arriba si $x \in (-\infty, -2) \bigcup \left(-2, \frac{3}{2}\right) \bigcup (2, 3)$.

La función es cóncava hacia abajo si $x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \bigcup (3, 5)$.

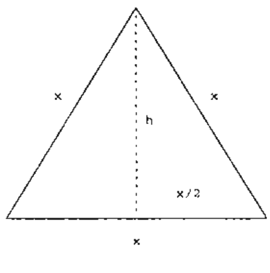
En $x = 1$ hay un mínimo local. Es también un mínimo absoluto.

En $x = 4$ hay un máximo local.

La función no tiene máximos absolutos.

6. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h. ¿Cuál es la razón de crecimiento del área en el instante en que el valor de ésta es $\sqrt{75}$ cm^2?

▼ LLevemos estos datos a la siguiente figura:



El área del triángulo es un medio de la base por la altura.

$$A = \frac{1}{2}xh. \tag{A}$$

Deseamos que la función anterior dependa sólo de x. Para esto, vemos en la figura, usando el teórema de Pitágoras:

$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x;$$

sustituimos este valor en (A)

$$A = \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2,$$

puesto que se tiene que x es una función de t.

$$A(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2(t); \tag{B}$$

derivamos con respecto a t

$$A'(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 \times x(t) \times x'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times x(t) \times x'(t). \tag{C}$$

Sabemos lo siguiente:

(a) $x'(t)$ siempre es igual a 2 cm/h.

(b) En un cierto momento, digamos t_0, el valor del área es $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.
Usamos (B) para encontrar el valor del lado del triángulo en ese momento:

$$A(t_0) = 5\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2(t_0) \Rightarrow x^2(t_0) = 20 \Rightarrow x(t_0) = 2\sqrt{5}.$$

Sustituyendo estos valores en (C), obtenemos la variación del área deseada:

$$A'(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{5} \times 2 = 2\sqrt{15}.$$

Recuperación, evaluación 6

1. Para la función $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$, determine:

   (a) Dominio, raíces, paridad

   ▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.
   Raíces: $x = 0$.
   Paridad: puesto que $f(2) = \dfrac{2}{1^2} = 2$ y $f(-2) = \dfrac{-2}{(-3)^2} = -\dfrac{2}{9}$;
   no se cumple $f(2) = f(-2)$ ni $f(2) = -f(-2)$. Es decir, la función no es par ni es impar. Es claro que no puede ser par ni impar pues el dominio no es simétrico con respecto al origen.

   (b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

   ▼ Derivamos

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(1) - x[2(x-1)]}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{(x-1)[(x-1)-2x]}{(x-1)^4} = \frac{-x-1}{(x-1)^3} = -\frac{x+1}{(x-1)^3} =$$
$$= -\frac{x+1}{x-1}\frac{1}{(x-1)^2};$$

   vemos que el signo de la derivada se proporciona por $x+1$ y $x-1$ y el signo exterior. Usamos la tabla siguiente:

Intervalo	$x+1$	$x-1$	$-$	signo de $f'(x)$
$x < -1\ (< 1)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-1 < x < 1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x > 1\ (> -1)$	$+$	$+$	$-$	$-$

   Concluimos entonces que:
   La función es decreciente para $x \in (-\infty, -1)$ y $x \in (1, +\infty)$.
   La función es creciente para $x \in (-1, 1)$.

   (c) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión

   ▼ Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = -\frac{(x-1)^3(1) - (x+1)[3(x-1)^2]}{(x-1)^6} =$$
$$= -\frac{(x-1)^2[(x-1) - 3(x+1)]}{(x-1)^6} = -\frac{-2x-4}{(x-1)^4} =$$
$$= 2\frac{x+2}{(x-1)^4} = (x+2)\frac{2}{(x-1)^4};$$

vemos que el signo de la segunda derivada se proporciona por el factor $x+2$. Por lo tanto:

La función es cóncava hacia abajo para $x \in (-\infty, -2)$.

La función es cóncava hacia arriba para $x \in (-2, +\infty)$.

En $x = -2$ hay un punto de inflexión $[-2, f(-2)] = \left(-2, -\dfrac{2}{9}\right)$.

(d) Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades

▼ La función es continua en su dominio $\mathbb{R} - \{1\}$.

$x = 1$ es una discontinuidad esencial infinita pues $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

(e) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales

▼ Si escribimos $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{1}{x - 2 + \frac{1}{x}}$ vemos que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^{\pm}.$$

Así: $y = 0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

También se comprueba que $x = 1$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

(f) Máximos y mínimos relativos y absolutos

▼ $x = -1$ es un punto crítico, ya que $f'(-1) = 0$.

De la tabla anterior se desprende que la primera derivada cambia de signo en este punto de menos a más. Con esto podemos decir que $x = -1$ es un mínimo local. De hecho, conjuntando información que obtendremos inmediatamente, es un mínimo absoluto.

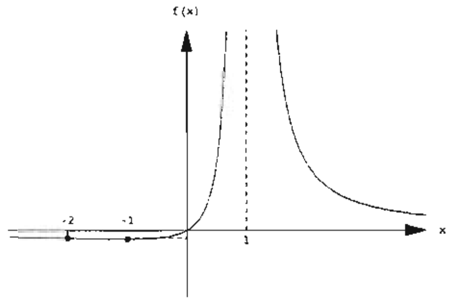
La función no tiene máximo absoluto.

(g) Esbozo gráfico y rango

▼ Evaluamos la función $f(x)$ en algunos puntos:

x	$f(x)$
0	0
-1	$-\frac{1}{4}$

La gráfica de $f(x)$ es:

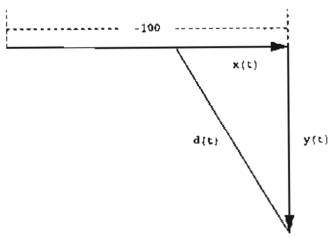


Rango: $R_f = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

2. Dos barcos salen al mismo tiempo y a velocidad constante; uno parte de un muelle, con dirección sur y con velocidad de 25 km/h. El otro parte a 20 km/h hacia el muelle, desde un punto que se encuentra a 100 km al oeste.

   ¿En qué momento se encuentran más cercanos?

   ▼ Con los datos, hacemos la figura



De ella se desprende que $x(t) = -100 + 20t$ y que $y(t) = -25t$.

Además la distancia entre los barcos es

$$d(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} = \sqrt{(-100 + 20t)^2 + (-25t)^2}\,.$$

Ésta es la función de la que deseamos calcular el mínimo.

Derivamos:

$$d'(t) = \frac{2(-100 + 20t)20 + 2(-25t)(-25)}{2\sqrt{(-100 + 20t)^2 + (-25t)^2}} = \\ = \frac{-2\,000 + 400t + 625t}{\sqrt{(-100 + 20t)^2 + (-25t)^2}}\,.$$

Calculamos los puntos críticos, haciendo $d'(t) = 0$:

$$\frac{-2\,000 + 400t + 625t}{\sqrt{(-100 + 20t)^2 + (25t)^2}} = 0 \Rightarrow -2\,000 + 400t + 625t = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1\,025(t - 1.\overline{95121}) = 0 \Rightarrow t = 1.\overline{95121}).$$

Vemos que la derivada cambia de signo en este punto de negativo a positivo, con lo cual concluimos que se tiene un tiempo mínimo ahí.

3. Encontrar las intersecciones con los ejes de la recta tangente a la curva:

$$\sqrt{3 - 2x^2 + 6\sqrt{x + 1}} + 3x^2y^3 - 3y = 0$$

en el punto $(0, 1)$.

▼ Primero vamos a comprobar que el punto proporcionado se encuentra en la gráfica de la función. Para esto sustituimos las coordenadas del punto $x = 0$ y $y = 1$ en la ecuación

$$\sqrt{3 - 2 \times 0^2 + 6\sqrt{0+1}} + 3 \times 0^2 \times 1^3 - 3 \times 1 = \sqrt{3+6} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = 0.$$

Vamos a derivar ahora la ecuación suponiendo que define una función $y = f(x)$ de manera implícita.

$$\frac{1}{2\sqrt{3 - 2x^2 + 6\sqrt{x+1}}}\left(-4x + 6\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) + 3(x^2 \times 3y^2y' + y^3 \times 2x) - 3y' = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2y^2y' + 6xy^3 - 3y' = -\frac{1}{2\sqrt{3 - 2x^2 + 6\sqrt{x+1}}}\left(-4x + 6\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (9x^2y^2 - 3)y' = -\frac{1}{2\sqrt{3 - 2x^2 + 6\sqrt{x+1}}}\left(-4x + 6\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) - 6xy^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{3 - 2x^2 + 6\sqrt{x+1}}}\left(-4x + 6\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) - 6xy^3}{9x^2y^2 - 3}.$$

Para calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función definida implícitamente que pasa por el punto $(0, 1)$ sustituimos las coordenadas $x = 0$ & $y = 1$ en la derivada anterior

$$y'(0, 1) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{9}}(6\frac{1}{2})}{-3} = \frac{3}{6\sqrt{9}} = \frac{1}{6}.$$

La ecuación deseada de la recta tangente es

$$y - 1 = \frac{1}{6}x \Rightarrow y = \frac{1}{6}x + 1.$$

En esta ecuación,

si $x = 0 \Rightarrow y = 1$;

si $y = 0 \Rightarrow x = -6$.

Los cortes deseados a los ejes son $(0, 1)$ & $(-6, 0)$.

4. Una partícula se mueve en línea recta y su posición instantánea está dada por la función

$$s(t) = t^2 - 4t - 5.$$

(a) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 7$?

▼ La velocidad de la partícula se calcula

$$v(t) = s'(t) = 2t - 4.$$

Para conocer el tiempo t en el que la partícula satisface $s(t) = 7$ resolvemos:

$$s(t) = 7 \Rightarrow t^2 - 4t - 5 = 7 \Rightarrow t^2 - 4t - 12 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (t - 6)(t + 2) = 0 \Rightarrow t = 6 \text{ o bien } t = -2.$$

Como el problema no tiene restricciones, consideramos los dos valores encontrados (los valores negativos representan el pasado con respecto a $t = 0$), entonces

$$v(6) = s'(6) = 12 - 4 = 8;$$
$$v(-2) = s'(-2) = -4 - 4 = -8.$$

(b) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando su velocidad es cero?

▼ La velocidad es cero cuando:

$$v(t) = 0 \Rightarrow 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2.$$

La posición en este momento es

$$s(2) = 2^2 - 4 \times 2 - 5 = 4 - 8 - 5 = -9.$$

5. Trace una posible gráfica para una función continua $f(x)$ en su dominio: $[-4, \infty) - \{-3, 2\}$ y que satisfaga:

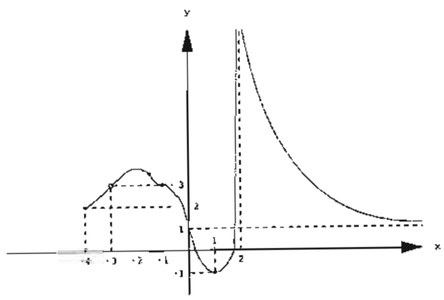
(a)

$$f(-4) = 2\,; \qquad f(1) = -1\,;$$
$$\lim_{x \to -3} f(x) = 3\,; \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = +\infty\,;$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1\,.$$

(b)

$$f'(-2) = 0\,; f'(-1) = 0\,; f'(1) = 0\,;$$
$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in (-4, -2) - \{-3\}\,; \qquad f'(x) < 0 \text{ si } x \in (-2, 1) - \{-1\}\,;$$
$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in (1, 2)\,; \qquad f'(x) < 0 \text{ si } x \in (2, \infty)\,.$$

▼ Una gráfica posible de la función $f(x)$ es:



Especifique los intervalos de concavidad de su gráfica; los máximos y mínimos locales, y absolutos.

$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$;

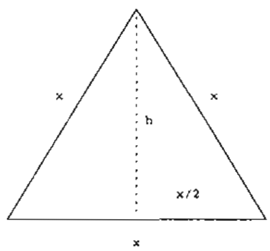
$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $\left(-4, -\frac{3}{2}\right)$, y en $(-1, 0)$.

Hay un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = -1$ que es mínimo absoluto.

6. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h.

   ¿Con qué rapidez crece el área cuando cada lado mide 8 cm?

   ▼ Veamos esos datos con la siguiente figura



De ella tenemos

$$h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

El área del triángulo es un medio de la base por la altura:

$$A = \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

Estamos suponiendo que los lados x dependen del tiempo $x(t)$, de hecho crecen. Por lo tanto, el área también depende del tiempo:

$$A(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2(t).$$

Derivando con respecto a t tenemos

$$A'(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}2x(t)x'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times x(t) \times x'(t).$$

Si suponemos que en un tiempo t_8, no conocido, se tiene $x(t_8) = 8$, en ese tiempo se tiene también $x'(t_8) = 2$. Por lo tanto:

$$A'(t_8) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times x(t_8) \times x'(t_8) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 \times 2 = 8\sqrt{3} \approx 13.856406 \quad \text{cm}^2/\text{hora}.$$

Recuperación, evaluación 7

1. Dada la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$, determinar:

   Intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos y mínimos locales; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión; asíntotas verticales y asíntotas horizontales. A partir del análisis anterior, hacer un esbozo de la gráfica de f.

   ▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

   Raíces o ceros de $f(x)$

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Podemos escribir

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} = x^{-1} - 3x^{-3}.$$

Derivamos

$$f'(x) = -x^{-2} + 9x^{-4} = -\frac{1}{x^2} + \frac{9}{x^4} = \frac{-x^2 + 9}{x^4} \qquad (*)$$

y de aquí calculamos los puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

El signo de la derivada viene dado por la expresión $-(x^2 - 9) = -(x + 3)(x - 3)$. Usamos entonces la tabla

	Signo de			
Intervalo	$-$	$x + 3$	$x - 3$	$-(x + 3)(x - 3)$
$x < -3\,(< 3)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-3 < x < 3$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x > 3\,(> -3)$	$-$	$+$	$+$	$-$

Vemos entonces que

$f(x)$ es decreciente para $x \in (-\infty, -3)$ y para $x \in (3, +\infty)$;

$f(x)$ es creciente para $x \in (-3, 0)$ y para $x \in (0, 3)$.

Con estos datos concluimos que

$x = -3$ es un mínimo local;

$x = 3$ es un máximo local.

Para calcular la segunda derivada, derivamos $(*)$:

$$f''(x) = 2x^{-3} - 36x^{-5} = \frac{2}{x^3} - \frac{36}{x^5} = \frac{2x^2 - 36}{x^5}.$$

2892872

Para calcular los puntos de inflexión

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 18) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}.$$

La segunda derivada se factoriza entonces

$$f''(x) = 2\frac{(x + 3\sqrt{2})(x - 3\sqrt{2})}{x^5}.$$

El signo de la segunda derivada viene dado por $x + 3\sqrt{2}$, $x - 3\sqrt{2}$ & x. Usamos la tabla para conocer el signo de $f''(x)$

	Signo de			
Intervalo	$x + 3\sqrt{2}$	x	$x - 3\sqrt{2}$	$f''(x)$
$x < -3\sqrt{2} (< 0 < 3\sqrt{2})$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-3\sqrt{2} < x < 0 (< 3\sqrt{2})$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(-3\sqrt{2}) < 0 < x < 3\sqrt{2}$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x > 3\sqrt{2} (> 0 > -3\sqrt{2})$	$+$	$+$	$+$	$+$

Vemos entonces que

$f(x)$ es cóncava hacia abajo para $x \in (-\infty, -3\sqrt{2}) \bigcup (0, 3\sqrt{2})$;

$f(x)$ es cóncava hacia arriba para $x \in (-3\sqrt{2}, 0) \bigcup (3\sqrt{2}, +\infty)$.

Con estos datos concluimos que

$x = -3\sqrt{2}$ & $x = -3\sqrt{2}$ son puntos de inflexión.

Calculamos

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3}{x^3} = 0^{\pm}.$$

Por lo tanto, $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Vemos claramente que una asíntota vertical es $x = 0$ Calculamos los siguiente límites para ver los comportamientos laterales de la función en este caso

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \text{"}\left(\frac{-3}{0^-}\right)\text{"} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \text{"}\left(\frac{-3}{0^+}\right)\text{"} = -\infty.$$

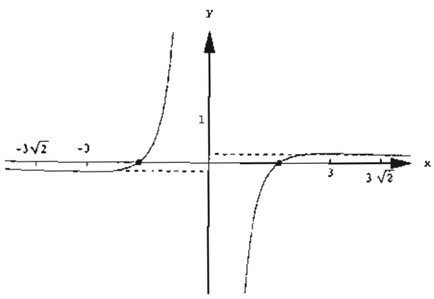
Con todo la anterior vamos a hacer un bosquejo de la gráfica.

Calculamos la función en algunos puntos:

x	$f(x)$
$\sqrt{3}$	0
3	0.2222
$3\sqrt{2}$	0.196

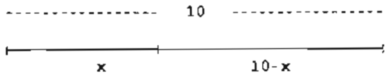
La función es impar.

La gráfica de la función $f(x)$ es.

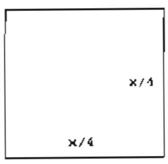


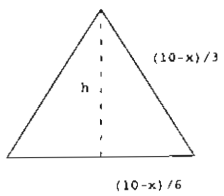
2. Un trozo de alambre de 10 m de largo, se corta en dos partes; una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. ¿Cuánto debe medir cada parte para que el área total encerrada sea: (a) máxima, (b) mínima?

▼ Tomamos un alambre de 10 m de largo y lo dividimos en dos pedazos como se ve en la figura siguiente:



Con los pedazos formamos las figuras:





Si se tiene una pedazo de alambre de longitud x y formamos un cuadrado, cada lado mide $\frac{x}{4}$. Si se tiene otro pedazo de alambre de longitud $10 - x$ y formamos un triángulo equilátero, cada lado mide $\frac{10-x}{3}$. Para calcular la altura del triángulo usamos el teorema de Pitágoras, con lo que tenemos:

$$h^2 = \left[\frac{1}{3}(10-x)\right]^2 - \left[\frac{1}{6}(10-x)\right]^2 = (\frac{1}{9} - \frac{1}{36})(10-x)^2 = \frac{3}{36}(10-x)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{6}(10-x).$$

El área encerrada por ambas figuras es:

$$A(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(10-x) \times \frac{\sqrt{3}}{6}(10-x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}(10-x)^2.$$

Ésta es la función de la que deseamos calcular su máximo y mínimo absolutos.

Dominio de esta función: $D_A = [0, 10]$.

Cuando $x = 0$, formamos sólo el triángulo y cuando $x = 10$, formamos sólo el cuadrado.

Calculamos la derivada

$$A'(x) = \frac{1}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{18}(10-x)(-1) = \frac{1}{8}x - \frac{10\sqrt{3}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{18}x = \frac{9+4\sqrt{3}}{72}x - \frac{5\sqrt{3}}{9}. \qquad (*)$$

Calculamos la segunda derivada

$$A''(x) = \frac{9+4\sqrt{3}}{72} > 0.$$

Lo cual nos indica que la función $A(x)$ es cóncava hacia arriba. El punto crítico que encontraremos será un mínimo absoluto.

Igualamos a cero la primera derivada usando $(*)$:

$$\frac{9+4\sqrt{3}}{72}x - \frac{5\sqrt{3}}{9} = 0 \Rightarrow x = \frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \approx 4.35.$$

Es necesario evaluar la función $A(x)$ en los extremos de su dominio para compararlos entre sí:

$$A(0) = \frac{25\sqrt{3}}{9} \approx 4.811.$$
$$A(10) = \frac{100}{16} = \frac{10}{4} = 6.25.$$

Evaluamos en el mínimo también

$$A\left(\frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}\right) \approx 2.719$$

y entonces:

(a) El área máxima encerrada es cuando formamos un cuadrado de lado $\frac{10}{4}$.

(b) El área mínima encerrada es cuando se forma un cuadrado con un perímetro de longitud $\frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$ y con el resto del alambre formamos el triángulo.

3. De acuerdo con la teoría de la relatividad, la masa m de un objeto que viaja a una velocidad v, está dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

donde m_0 es la masa del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz.

(a) Explicar qué ocurre cuando v se acerca a la velocidad de la luz

▼ Calculamos:

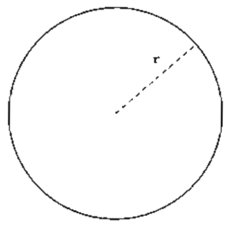
$$\lim_{v\to c^-} m = \lim_{v\to c^-} \frac{cm_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} = +\infty.$$

(b) Explicar por qué sólo tiene sentido calcular $\lim_{v\to c^-} m$

▼ Puesto que $v < c$.

4. Un incendio forestal se extiende en forma circular, con un radio que aumenta con una rapidez de 5 pies/min. ¿Coo qué rapidez está cambiando el área incendiada, cuando el radio es de 200 pies? ¿Está aumentando o disminuyendo?

▼ La figura relacionada con el incendio es:



La relación entre el área del incendio y el radio del mismo es

$$A(r) = \pi r^2.$$

Pero el radio está cambiando a una velocidad conocida de 5 pies/min. Es decir, depende del tiempo, es una función del tiempo. Por lo tanto el área depende también del tiempo:

$$A(t) = \pi r^2(t).$$

Podemos entonces derivar esta expresión

$$A'(t) = 2\pi r(t)r'(t).$$

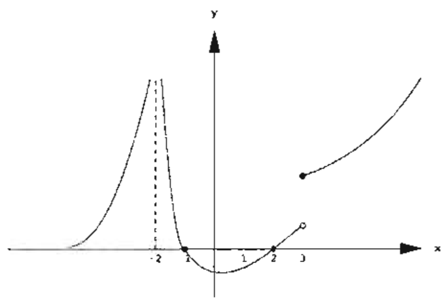
Ésta es una relación entre derivadas para todo t.

En particular, en un momento t_0 se tienen los datos especificados en el enunciado:

$$A'(t_0) = 2\pi r(t_0)r'(t_0) = 2 \times \pi \times 200 \times 5 = 2000 \times \pi \text{ pies}^2/\text{min.} > 0.$$

El área está aumentando en ese momento t_0.

5. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ cuya primera derivada f' tiene la siguiente gráfica:



A partir de esta gráfica de f', determinar dónde la función f es creciente y dónde es decreciente. Explicar además, cómo es la tangente a la gráfica de f en $x = -2$, $x = -1$, $x = 2$ & $x = 3$.

▼ La función es creciente cuando la derivada es positiva;
para $x \in (-\infty, -2)\bigcup(-2, -1)\bigcup(2, +\infty)$.

La función es decreciente cuando la derivada es negativa, es decir, para $x \in (-1, 2)$.

En $x = -2$ la tangente es vertical.
En $x = -1$ la tangente es horizontal, paralela al eje x, con pendiente cero.
De hecho tiene aquí un máximo local porque la derivada cambia de signo de positivo a negativo.

En $x = 2$ la tangente es horizontal, paralela al eje x, con pendiente cero.
De hecho tiene aquí un mínimo local porque la derivada cambia de signo de negativo a positivo.

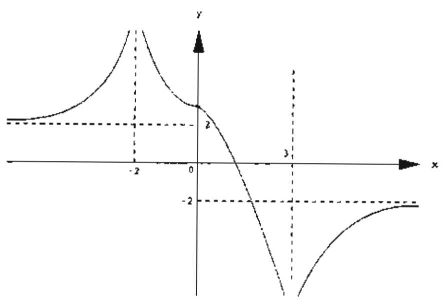
En $x = 3$ la tangente no existe. La gráfica tiene un salto. Por la izquierda tiene pendiente ≈ 1 y por la derecha tiene pendiente $\approx \frac{1}{2}$.

Recuperación, evaluación 8

1. Dibujar una función $f(x)$ que cumpla las condiciones siguientes:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 3} f(x) = -\infty;$$
$f(x)$ tiene una discontinuidad removible en $x = 0$;
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2; \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -2;$$

▼ Una gráfica posible de la función $f(x)$, con esas condiciones es:



2. Calcular $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$.

▼ Si tratamos de calcular el límite por evaluación obtenemos:

$$\frac{(1)^2 - 1}{(1)^2 - 1} = \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}, \text{ una indeterminación } \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}.$$

Esto nos dice que los polinomios del numerador y del denominador, ambos, tienen la raíz común $x = 1$. En este caso es fácil encontrar la factorización del factor común $x - 1$:

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x}{x + 1}.$$

La igualdad anterior se cumple para $x \neq 1$. Por lo tanto podemos usar este hecho para calcular el límite.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

3. Si

$$f(x) = \begin{cases} mx - n & \text{si } x < 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \\ 2mx + n & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Encontrar los valores m, n de modo que la función sea continua. Graficar la función continua obtenida.

▼ Ésta es una función que consta de dos "pedazos" y ambos son funciones continuas. De hecho son rectas. Para que la función sea continua en todos los reales se debe cumplir:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

La igualdad de la izquierda nos proporciona:

$$m - n = 5.$$

La igualdad de la derecha nos proporciona:

$$5 = 2m + n.$$

Ordenando, tenemos:

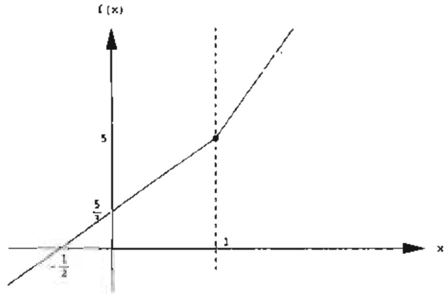
$$\begin{aligned} m - n &= 5 \\ 2m + n &= 5, \end{aligned}$$

es decir, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución es: $m = \dfrac{10}{3}$ & $n = -\dfrac{5}{3}$.

La función con estos valores es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{3}x + \dfrac{5}{3} & \text{si } x < 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{20}{3}x - \dfrac{5}{3} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La función $f(x)$ con esos valores tiene la siguiente gráfica:



4. Encontrar la derivada de la función $f(z) = \frac{\sqrt{z}+1}{(\sqrt{z}+3)^2}$.

▼ Derivamos

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{(\sqrt{z}+3)^2\left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\right) - (\sqrt{z}+1)2(\sqrt{z}+3)\left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)}{[(\sqrt{z}+3)^2]^2} = \\
&= \frac{(\sqrt{z}+3)\left[(\sqrt{z}+3)\frac{1}{2\sqrt{z}} - (\sqrt{z}+1)\frac{1}{\sqrt{z}}\right]}{(\sqrt{z}+3)^4} = \\
&= \frac{\frac{\sqrt{z}+3}{2\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}}}{(\sqrt{z}+3)^3} = \frac{\frac{\sqrt{z}+3-2(\sqrt{z}+1)}{2\sqrt{z}}}{(\sqrt{z}+3)^3} = \\
&= \frac{-\sqrt{z}+1}{2\sqrt{z}(\sqrt{z}+3)^3}.
\end{aligned}
$$

5. La altura de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo está dada por

$$s(t) = -16t^2 + 256t,$$

en donde s se mide en pies y t en segundos.

(a) ¿Cuál es la velocidad media del proyectil entre $t = 2$ & $t = 5$?

▼ Calculamos:

$$\frac{s(5) - s(2)}{5 - 2} = \frac{880 - 448}{3} = \frac{432}{3} = 144 \text{ pies/segundo}.$$

(b) ¿En qué instante choca contra el suelo?

▼ Resolvemos:

$$-16t^2 + 256t = 0 \Rightarrow t(-16t + 256) = 0.$$

Una solución es $t = 0$, cuando se suelta el proyectil. La otra se encuentra como sigue:

$$-16t + 256 = 0 \Rightarrow t = \frac{256}{16} = 16 \text{ segundos}.$$

(c) ¿Cuál es la velocidad del impacto?

▼ Calculamos la derivada $s'(t) = -32t$. Por lo tanto:

$$s'(16) = -32(16) = -512 \text{ pie/segundo}.$$

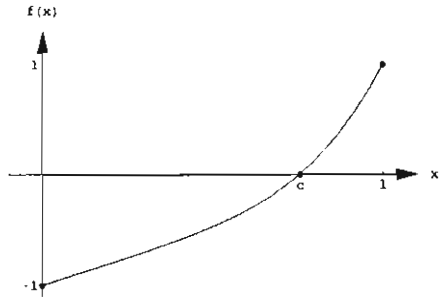
6. Dada la función $f(x) = x^5 + x - 1$, verifique que existe un número c tal que $f(c) = 0$. Es decir, justifique que la función tiene una raíz.

▼ Evaluamos la función $f(x)$ en algunos puntos.

x	$f(x)$
0	-1
1	1

Vemos que $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[0, 1]$ con valores de signo distinto en los extremos; aplicando el teorema del Valor Intermedio, se asegura la existencia de $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

Veámos la gráfica de $f(x)$ en ese intervalo:



7. Encontrar una ecuación de la recta tangente en el punto $(-2, 2)$ a la gráfica de la función definida por

$$x^4 + y^3 = 24.$$

▼ Vamos a comprobar que el punto dado $(-2, 2)$ está en la gráfica de la función, definida implícitamente:

$$(-2)^4 + 2^3 = 16 + 8 = 24.$$

Derivamos la expresión implícitamente

$$4x^3 + 3y^2y' = 0 \Rightarrow 3y^2y' = -4x^3 \Rightarrow y' = -\frac{4}{3}\frac{x^3}{y^2}.$$

Para calcular la pendiente de la recta tangente, evaluamos la derivada en $(-2, 2)$:

$$y'(-2, 2) = -\frac{4}{3}\frac{(-2)^3}{2^2} = -\frac{4}{3}\frac{-8}{4} = \frac{8}{3}.$$

La ecunción de la recta tangente es:

$$\frac{y-2}{x-(-2)} = \frac{8}{3} \Rightarrow y - 2 = \frac{8}{3}x + \frac{16}{3} \Rightarrow y = \frac{8}{3}x + \frac{22}{3}.$$

El ejercicio no pide hacer los cálculos de manera implícita. Sin embargo en este caso podemos despejar y en función de x:

$$y(x) = \sqrt[3]{24 - x^4} = (24 - x^4)^{\frac{1}{3}}.$$

Derivamos:

$$y' = \frac{1}{3}(24 - x^4)^{-\frac{2}{3}}(-4x^3).$$

Para calcular la pendiente de la recta tangente, valuamos la derivada en $x = -2$:

$$y'(-2) = \frac{1}{3}\left[24 - (-2)^4\right]^{-\frac{2}{3}}\left[-4(-2)^3\right] = \frac{32}{3} \times \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{32}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{3}$$

y la ecuación de la recta tangente se calcula como antes.

8. Sea la función

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + 1 .$$

(a) Encontrar los intervalos de monotonía de la función. Es decir, aquellos intervalos donde la función es creciente y aquellos donde es decreciente

▼ Derivamos

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 3 = 3(x^2 + 4x + 1).$$

Para calcular los puntos críticos calculamos los ceros o raíces de la derivada, usando la fórmula de la cuadrática:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3} \approx \begin{cases} -0.268 \\ -3.732 . \end{cases}$$

Con estas raíces la factorización de la derivada queda como sigue:

$$f'(x) = 3(x^2 + 4x + 1) = 3\left[x - (-2 - \sqrt{3})\right]\left[x - (-2 + \sqrt{3})\right] =$$
$$= 3(x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3}).$$

Para conocer los intervalos de monotonía, usamos la siguiente tabla:

	Signo de		
Intervalo	$x - (-2 - \sqrt{3})$	$x - (-2 + \sqrt{3})$	$x^2 + 4x + 1$
$x < -2 - \sqrt{3} (< -2 + \sqrt{3})$	$-$	$-$	$+$
$-2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}$	$+$	$-$	$-$
$x > -2 + \sqrt{3} (> -2 - \sqrt{3})$	$+$	$+$	$+$

Por lo tanto, la función $f(x)$ crece para $x \in \left(-\infty, -2 - \sqrt{3}\right)$ y para $x \in \left(-2 + \sqrt{3}, +\infty\right)$;
pero decrece para $x \in \left(-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\right)$.

(b) Encontrar los intervalos de concavidad de la función. Es decir, aquellos intervalos donde la función es cóncava hacia abajo y aquellos donde es cóncava hacia arriba

▼ Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 6x + 12 = 6(x + 2).$$

La única raíz es $x = -2$.

Se ve claro que

$f''(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -2)$ o sea es cóncava hacia abajo ahí;

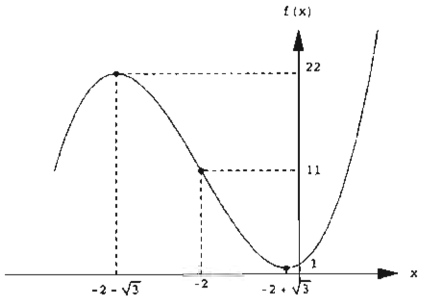
$f''(x) > 0$ para $x \in (-2, +\infty)$ o sea es cóncava hacia arriba ahí.

(c) Hacer un bosquejo de la gráfica de la función

▼ Evaluamos la función en algunos puntos

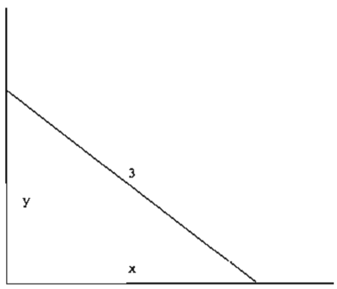
x	$f(x)$
$-2-\sqrt{3}$	21.39
-2	11
$-2+\sqrt{3}$	0.6
0	1

y damos un bosquejo de la gráfica de la función $f(x)$:



9. Una escalera de 3 m se apoya sobre un muro de una casa. El pie de la escalera se separa de la base del muro a razón de 2 m/s. ¿A qué razón se desliza la parte superior de la escalera por el muro, cuando el pie de la misma está a 1 m del muro?

▼ Visualizamos la información con la figura



En todo instante t, la relación que guardan la variables de la figura es

$$x^2(t) + y^2(t) = 9.$$

De aquí podemos derivar con respecto a t

$$\begin{aligned} 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y(t)y'(t) = -2x(t)x'(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow y'(t) = -\frac{x(t)x'(t)}{y(t)}. \end{aligned}$$

En un tiempo t_0 no determinado se cumple que

$x'(t_0) = 2$ m/segundo;

$x(t_0) = 1$ metro;

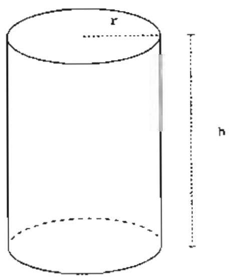
$y(t_0) = \sqrt{9 - 1^2} = \sqrt{8}$.

En ese instante podemos calcular

$$y'(t_0) = -\frac{x(t_0)x'(t_0)}{y(t_0)} = -\frac{1 \times 2}{\sqrt{8}} \approx -0.707 \text{ m/segundo}.$$

10. Encuentre las dimensiones de la lata cilíndrica para jugo y que utilice la menor cantidad de material cuando el volumen del envase es de 30 cm^3.

▼ Sea la figura



El volumen del cilindro cumple

$$V = \pi r^2 h = 30.$$

El área de la base mide

$$A_b = \pi r^2.$$

El área lateral mide

$$A_L = 2\pi r h$$

La cantidad de material que se usa en el bote es el área total

$$A_T = 2A_b + A_L = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Ésta es la función de la que deseamos calcular el mínimo. Pero se encuentra en función de dos variables.

De la relación del volumen despejamos arbitrariamente h y obtenemos:

$$h = \frac{30}{\pi r^2} . \tag{*}$$

Sustituimos en A_T y nos queda una función de r

$$A_T(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{30}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{60}{r} ;$$

derivamos

$$A_T' = 4\pi r - \frac{60}{r^2}$$

y calculamos la segunda derivada

$$A_T'' = 4\pi + 60\frac{2r}{r^4} = 4\pi + \frac{120}{r^3} > 0.$$

Lo cual nos dice que la función $A_T(r)$ es cóncava hacia arriba, por lo que el punto crítico que vamos a encontrar es un mínimo absoluto.

Igualamos a cero la primera derivada y despejamos

$$4\pi r - \frac{60}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{4\pi r^3 - 60}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 - 60 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{15}{\pi}} = \left(\frac{15}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} .$$

Éste es el radio que genera el área mínima. Para encontrar la altura de la lata sustituimos en $(*)$.

$$h = \frac{30}{\pi\left[\left(\frac{15}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2} = 2\frac{\frac{15}{\pi}}{\left(\frac{15}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = 2\left(\frac{15}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2r.$$

Es decir, la lata con material mínimo tiene la altura igual a dos veces el radio de la base.

Recuperación, evaluación 9

1. La posición vertical de una pelota está dada por

$$h(t) = 128 + 16t - 16t^2$$

en donde t se mide en segundos y $h(t)$ se mide en pies.

¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota por lo menos 32 pies arriba del suelo?

▼ Para resolver la pregunta planteada se resuelve la desigualdad:

$$h(t) = 128 + 16t - 16t^2 \ge 32 \Leftrightarrow 96 + 16t - 16t^2 \ge 0 \Leftrightarrow -96 - 16t + 16t^2 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16(t^2 - t - 6) \le 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 \le 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t + 2) \le 0.$$

Las raíces de la cuadrática son $t = -2$ & $t = 3$.

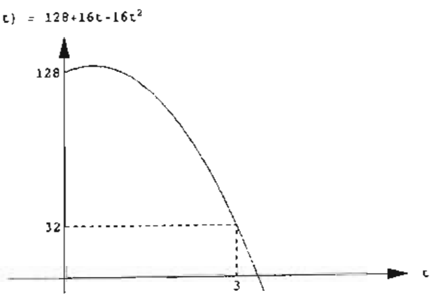
Para resolver la última desigualdad usamos la tabla:

	Signo de		
Intervalo	$t+2$	$t-3$	$(t+2)(t-3)$
$t < -2\,(< 3)$	$-$	$-$	$+$
$-2 < t < 3$	$+$	$-$	$-$
$t > 3\,(> -2)$	$+$	$+$	$+$

La solución es $t \in [-2, 3]$.

Pero como $t \ge 0$, la solución definitiva es $t \in [0, 3]$.

Si vemos la gráfica de de la función $h(t)$



la parábola se encuentra arriba de la recta $y = 32$ para $t \in [0,3]$.

2. Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 + 4x - 7}{x^2 - 1}$.

▼ Si tratamos de calcular el límite evaluando la expresión obtenemos:

$$\frac{3(1)^2 + 4(1) - 7}{(1)^2 - 1} = \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}, \text{ una indeterminación “}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}.$$

Por tratarse de una función racional, este resultado nos invita a factorizar el numerador y el denominador, sabiendo que ambos polinomios tienen el factor $x - 1$.

Para el denominador el resultado es fácil: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Para el numerador, efectuamos la división

$$\begin{array}{r|l} & \; 3x + 7 \\ \hline x - 1 & \; 3x^2 + 4x - 7 \\ & \underline{-3x^2 + 3x} \\ & \qquad 7x - 7 \\ & \qquad \underline{-7x + 7} \\ & \qquad\quad 0\,. \end{array}$$

O sea que la factorización del numerador es $3x^2 + 4x - 7 = (x - 1)(3x + 7)$.

Con estos resultados obtenemos:

$$\frac{3x^2 + 4x - 7}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(3x + 7)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{3x + 7}{x + 1}.$$

Ahora sí podemos calcular el límite usando esta última expresión equivalente a la primera, para $x \neq 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x + 7}{x + 1} = \frac{3(1) + 7}{1 + 1} = \frac{10}{2} = 5.$$

3. Si $f(w) = \dfrac{\sqrt{w + 1} + 3}{(w^2 + 1)^3}$, calcular $f'(1)$.

▼ Derivamos

$$f'(w) = \frac{(w^2 + 1)^3 \left(\dfrac{1}{2\sqrt{w + 1}} + 0\right) - (\sqrt{w + 1} + 3)\, 3(w^2 + 1)^2 2w}{[(w^2 + 1)^3]^2} =$$

$$= \frac{(w^2 + 1)^2 \left[(w^2 + 1)\dfrac{1}{2\sqrt{w + 1}} - (\sqrt{w + 1} + 3)6w\right]}{(w^2 + 1)^6} =$$

$$= \frac{\dfrac{w^2 + 1}{2\sqrt{w + 1}} - 6w(\sqrt{w + 1} + 3)}{(w^2 + 1)^4}$$

y entonces

$$f'(1) = \frac{\dfrac{1^2+1}{2\sqrt{1+1}} - 6(1)(\sqrt{1+1}+3)}{(1^2+1)^4} = \frac{\dfrac{2}{2\sqrt{2}} - 6(\sqrt{2}+3)}{2^4} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2} - 18}{16} \approx \frac{0.7071 - 8.4853 - 18}{16} \approx -1.6111\,.$$

4. Sea la función

$$g(x) = \begin{cases} ax^2+1 & \text{si } x < -1 \\ c & \text{si } x \in [-1,1] \\ x+2 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

Encontrar los valores a, c que hacen que la función $g(x)$ sea continua en todos los reales.

Dar un bosquejo de la gráfica de $g(x)$ con los valores encontrados.

▼ Las fronteras de los "pedazos" que definen la función son $x = -1$ & $x = 1$. Se ve claramente que en los tres "pedazos" la función es continua. Para la continuidad en todos los reales se debe cumplir:

$$\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^+} g(x) = g(-1) \;\&\; \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1).$$

Esto se traduce en

$$a + 1 = c$$
$$c = 1 + 2 \text{ respectivamente;}$$

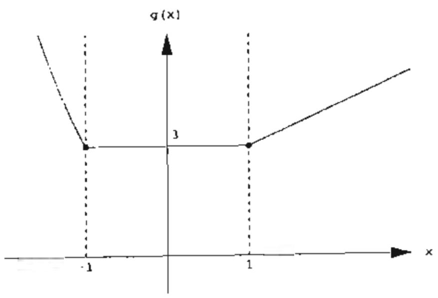
resolviendo

$$c = 3;$$
$$a = 2\,.$$

la funcióo es

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2+1 & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } x \in [-1,1] \\ x+2 & \text{si } x > 1: \end{cases}$$

la gráfica de la función $g(x)$



5. Sea $y = f(x)$ definida implícitamente por:

$$x^4 + 3x^2y + y^3 = 5 .$$

Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto $(-1, 1)$.

▼ Derivando

$$4x^3 + 3(2xy + x^2y') + 3y^2y' = 0 \Rightarrow 4x^3 + 6xy + 3x^2y' + 3y^2y' = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3(x^2 + y^2)y' = -4x^3 - 6xy \Rightarrow y' = -\frac{4x^3 + 6xy}{3(x^2 + y^2)}$$

y evaluando en el punto $(-1, 1)$

$$y'(-1, 1) = -\frac{4(-1)^3 + 6(-1)(1)}{3\left[(-1)^2 + (1)^2\right]} = -\frac{-4 - 6}{3(2)} = -\frac{-10}{6} = \frac{5}{3},$$

calculamos la ecuación de la recta tangente

$$\frac{y - 1}{x - (-1)} = \frac{5}{3} \Rightarrow y - 1 = \frac{5}{3}(x + 1) = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{3}x + \frac{8}{3}.$$

6. Dada la función $f(x) = -x^3 + 4x + 2$,

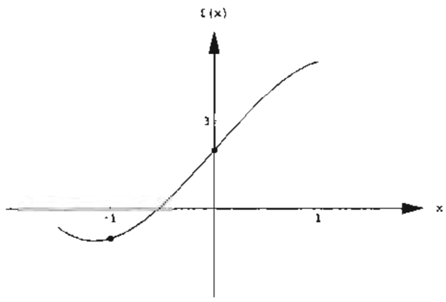
obtener un intervalo en donde la función tenga al menos una raíz. Justifique su respuesta.

▼ Evaluamos $f(x)$ en algunos números

x	$f(x) = -x^3 + 4x + 2$
-1	-1
0	2

con lo que comprobamos que $f(x)$ es continua y cambia de signo en el intervalo $[-1, 0]$. Usando el teorema de Valor Intermedio se garantiza que existe una raíz de $f(x)$ en ese intervalo.

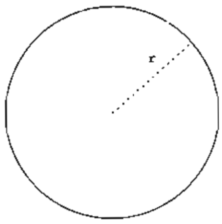
Veamos la gráfica de la función $f(x)$:



El resultado garantiza la existencia de la raíz: no la calcula. Se garantiza el corte de la gráfica con el eje x. No se sabe dónde.

7. Se infla un globo esférico introduciendo aire a razón de 50 cm^3/s. Calcular la rapidez de cambio del radio del globo cuando su diámetro es de 26 centímetros.

▼ Dibujamos la correspondiente la figura



Se sabe que el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Considerando que el volumen y el radio cambian con el tiempo, tenemos entonces:

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t).$$

Derivando con respecto a t:

$$V'(t) = \frac{4}{3}\pi 3r^2(t)r'(t) = 4\pi r^2(t)r'(t).$$

O sea:

$$r'(t) = \frac{V'(t)}{4\pi r^2(t)}.$$

Según los datos proporcionados $V'(t) = 50$ cm^3/s, en todo momento; entonces existe un momento, digamos t_0 cuando el diámetro $2r(t_0) = 26 \Rightarrow r(t_0) = 13$.

Para ese momento t_0 calculamos la variación del radio:

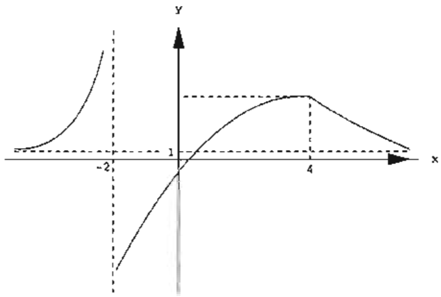
$$r'(t_0) = \frac{V'(t_0)}{4\pi r^2(t_0)} = \frac{50}{4\pi(13)^2} \approx 0.0235 \text{ cm/segundo}.$$

8. Dar un bosquejo de la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla las siguientes condiciones:

- $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -2)\bigcup(-2, 4)$;
- $f'(x) < 0$ para $x \in (4, +\infty)$;
- $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -2$;

- $y = 1$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

▼ Bosquejo la gráfica de la función $f(x)$, con las condiciones dadas:

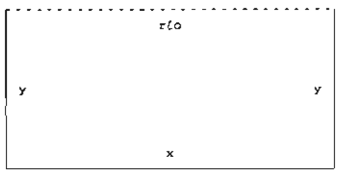


9. Un terreno rectangular está delimitado por un río en un lado y por una cerca eléctrica de un solo cable en los otros tres lados.

   ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que nos dan el área máxima?

   ¿Cuál es la mayor área que puede cercarse con un cable de 800 m?

▼ Veamos la figura siguiente



El área del terreno:

$$A = xy.$$

El perímetro del terreno:

$$P = x + 2y = 800 \text{ m, según los datos proporcionados.}$$

De aquí obtenemos:

$$x = 800 - 2y.$$

Sustituyendo en la fórmula del área:

$$A(y) = (800 - 2y)y = 800y - 2y^2.$$

$A(y)$ es la función cuyo máximo deseamos calcular.

$$A'(y) = 800 - 4y;$$
$$A''(y) = -4 < 0.$$

La segunda derivada es negativa, el punto crítico será un máximo

$$A'(y) = 0 \Rightarrow 800 - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{800}{4} = 200.$$

Para calcular la longitud del otro lado de terreno (la x), sustituimos:

$$x = 800 - 2(200) = 400 = 2y.$$

Por lo tanto, las dimensiones del terreno que nos dan el área máxima son $x = 400$ & $y = 200$.

La mayor área que se puede cercar con estas condiciones es de $A = 80\,000$ m^2.

10. Sea la función $f(x) = 3x^4 + 8x^3$.

(a) Proporcionar el dominio y las raíces de la función

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R}$.

Las raíces de $f(x) = x^3(3x + 8)$ son $x = 0$ y $x = -\frac{8}{3}$.

(b) Proporcionar los intervalos de monotonía

▼ Derivamos

$$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 = 12(x^3 + 2x^2) = 12x^2(x + 2).$$

El único factor de la derivada que nos proporciona cambio de signo es $x+2$. Por ello el único valor extremo se encuentra en $x = -2$. Se ve de inmediato que:

$f(x)$ es decreciente en $x \in (-\infty, -2)$;

$f(x)$ es creciente en $x \in (-2, +\infty)$.

(c) Proporcionar los intervalos de concavidad

▼ Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 12(3x^2 + 4x) = 12x(3x + 4) = 36x\left(x + \frac{4}{3}\right).$$

Para el signo de la segunda derivada usamos la tabla

	Signo de		
Intervalo	$x + \frac{4}{3}$	x	$x(x + \frac{4}{3})$
$x < -\frac{4}{3} (< 0)$	$-$	$-$	$+$
$-\frac{4}{3} < x < 0$	$+$	$-$	$-$
$x > 0 (> -\frac{4}{3})$	$+$	$+$	$+$

De esto concluimos que

$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -\frac{4}{3}) \bigcup (0, +\infty)$;

$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-\frac{4}{3}, 0)$.

(d) Proporcionar los máximos y mínimos absolutos y relativos

▼ $f(x)$ no tiene máximo absoluto.

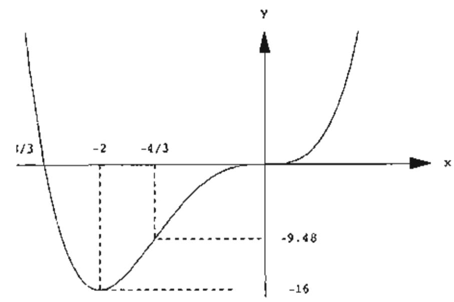
$x = -2$ es el único mínimo local y absoluto.

(e) Dar un bosquejo de la gráfica

▼ Evaluamos la funcióo $h(x)$ en algunos puntos:

x	$f(x) = 3x^4 + 8x^3$
-2	-16
$-4/3$	-9.48

y dibujamos la gráfica de la función $f(x)$:



Recuperación, evaluación 10

1. Una pelota se deja caer desde un edificio. La posición de la pelota en cualquier instante t (medido en segundos) está dada por $s(t) = 122.5 - 4.9t^2$, medida en metros, $t \geq 0$.

   (a) Dar la altura del edificio

   ▼ Está implícito que la pelota se suelta cuando $t = 0$. Así la altura del edificio es:

   $$s(0) = 122.5 \text{ metros}$$

   (b) ¿En qué intervalo de tiempo la pelota está por lo menos a 113 m sobre el suelo?

   ▼ La pregunta se traduce en resolver la desigualdad:

   $$s(t) \geq 113,$$

   o sea:

   $$122.5 - 4.9t^2 \geq 113$$

   Resolviendo la desigualdad

   $$122.5 - 113 \geq 4.9t^2 \Rightarrow 1.94 \approx \frac{9.5}{4.9} \geq t^2$$

   y extrayendo la raíz cuadrada

   $$1.39 \geq |t|,$$

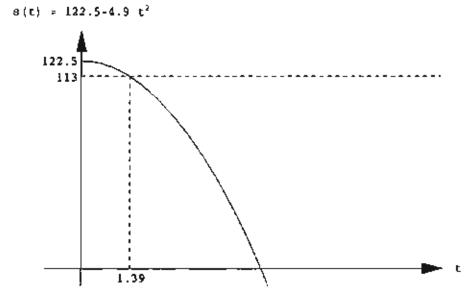
   logramos la solución de esta desigualdad, es decir,

   $$t \in [-1.39, +1.39].$$

   Pero tenemos que $t \geq 0$, por lo que la solución final es

   $$t \in [0, 1.39].$$

Si vemos la gráfica de la parábola $s(t)$:



La parábola se encuentra arriba de la recta $y = 113$ para $t \in [0, 1.39]$.

2. Calcular el límite siguiente: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{-\sqrt{x+4} + 2} \right)$.

▼ Si tratamos de calcular el límite por evaluación, resulta para $x = 0$:

$$\frac{\sqrt{0+1} - 1}{-\sqrt{0+4} + 2} = \frac{1-1}{-2+2} = \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}, \text{ una indeterminación de la forma } \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}.$$

Por pasos, racionalizamos el numerador:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{-\sqrt{x+4} + 2} &= \frac{\sqrt{x+1} - 1}{-\sqrt{x+4} + 2} \, \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \\ &= \frac{(x+1) - 1}{(\sqrt{x+1} + 1)(2 - \sqrt{x+4})} = \frac{x}{(\sqrt{x+1} + 1)(2 - \sqrt{x+4})}. \end{aligned}$$

Si tratamos de evaluar, obtenemos de nuevo una indeterminación de la forma “$\left(\dfrac{0}{0}\right)$”.

Ahora, racionalizamos el denominador:

$$\begin{aligned} &\frac{x}{(\sqrt{x+1} + 1)(2 - \sqrt{x+4})} \, \frac{2 + \sqrt{x+4}}{2 + \sqrt{x+4}} = \\ &= \frac{x(2 + \sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+1} + 1)[4 - (x+4)]} = \frac{x(2 + \sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+1} + 1)(-x)} = -\frac{2 + \sqrt{x+4}}{\sqrt{x+1} + 1}. \end{aligned}$$

Podemos ya calcular el límite usando esta expresión equivalente, para $x \neq 0$:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{-\sqrt{x+4} + 2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{2 + \sqrt{x+4}}{\sqrt{x+1} + 1} \right) = -\frac{2+2}{1+1} = -\frac{4}{2} = -2.$$

3. Calcular el límite siguiente: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

▼ Transformamos la expresión

$$\sqrt{x^2+x}-x=(\sqrt{x^2+x}-x)\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$
$$=\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

y dividiendo entre x numerador y denominador:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

podemos calcular el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

4. Sea la función

$$g(t)=\begin{cases}3 & \text{si } t\le -1\\ at^2+bt+1 & \text{si } -1<t<2\\ \frac{3}{2}t & \text{si } t\ge 2\,.\end{cases}$$

(a) Encontrar los valores a, b para que la función $g(t)$ sea continua en todos los reales

▼ Las fronteras de los "pedazos" que definen la función son $t=-1$ & $t=2$. Se ve claramente que los tres "pedazos" son funciones continuas. Para la continuidad en todos los reales se debe cumplir:

$$\lim_{t\to-1^-}g(t)=\lim_{t\to-1^+}g(t)=g(-1)\ \&\ \lim_{t\to2^-}g(t)=\lim_{t\to2^+}g(t)=g(2)$$

Esto se traduce en

$$3=a-b+1$$
$$4a+2b+1=3\,.$$

Ordenamos estas condiciones

$$a-b=2$$
$$4a+2b=2$$

Resolvemos este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

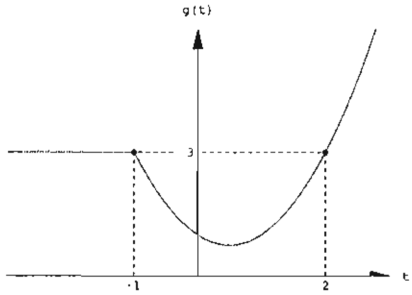
$$a=1$$
$$b=-1\,.$$

(b) Con los valores encontrados, dar la gráfica de la función

▼ Con estos valores la función es

$$g(t)=\begin{cases}3 & \text{si } t\le -1\\ t^2-t+1 & \text{si } -1<t<2\\ \frac{3}{2}t & \text{si } t\ge 2\end{cases}$$

y la gráfica de la función $g(t)$ es



5. Derivar la función $f(x) = \sqrt{9 + (x+1)^2} + \dfrac{3x}{x^2 - 1}$.

▼ Derivamos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{9+(x+1)^2}}\,[2(x+1)] + 3\frac{(x^2-1)(1) - x(2x)}{(x^2-1)^2} = \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{9+(x+1)^2}} + 3\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{9+(x+1)^2}} + 3\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{9+(x+1)^2}} - 3\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}. \end{aligned}$$

6. Existe una función $y = f(x)$ definida implícitamente por la expresión:

$$x^2 + xy + y^3 = \frac{1}{8}.$$

Encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto $(0, \frac{1}{2})$.

▼ Derivando:

$$\begin{aligned} &2x + (xy' + 1 \times y) + 3y^2y' = 0 \Rightarrow (x + 3y^2)y' + (2x+y) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x+3y^2)y' = -(2x+y) \Rightarrow y' = -\frac{2x+y}{x+3y^2} \end{aligned}$$

y evaluando en el punto $(0, \frac{1}{2})$:

$$y'(0, \tfrac{1}{2}) = -\frac{\frac{1}{2}}{3\frac{1}{4}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = -\frac{2}{3},$$

la ecuación de la recta tangente en el punto $(0, \frac{1}{2})$ es

$$\frac{y - \frac{1}{2}}{x - 0} = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}.$$

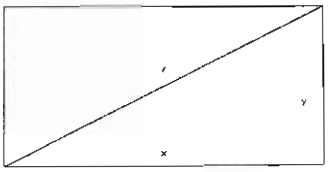
7. Sea l la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen longitud x, y respectivamente. Si x aumenta con una rapidez de $\frac{1}{2}$ m/s y si y disminuye con una rapidez de $\frac{1}{4}$ m/s,

   (a) ¿a qué razón está cambiando la longitud de la diagonal cuando $x = 3$ m & $y = 4$ m?

   ▼ Ver lo que sigue.

   (b) ¿La diagonal está aumentando o disminuyendo en ese instante?

   ▼ Usamos la figura



De la figura, tenemos que:

$$l^2(t) = x^2(t) + y^2(t); \text{ entonces,}$$

derivando con respecto a t:

$$2l(t)l'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$$

$$l'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)}{2l(t)} = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{l(t)}$$

Por lo tanto en el momento, digamos t_0, en el que $x(t_0) = 3$ & $y(t_0) = 4$, se tiene

$$l(t_0) = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Por datos proporcionados, se tiene que $x'(t_0) = \frac{1}{2}$ & $y'(t_0) = -\frac{1}{4}$.

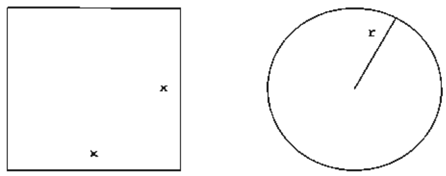
Sustituyendo estos datos obtenemos

$$l'(t_0) = \frac{3(\frac{1}{2}) - 4(\frac{1}{4})}{5} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{5} = \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10} > 0.$$

La longitud de la diagonal crece en ese momento.

8. La suma del perímetro de un círculo y un cuadrado es de 16 cm. Hallar las dimensiones de las dos figuras que hacen mínima el área total encerrada por ambas figuras.

▼ El dibujo de ambas figuras es:



De ambas tenemos:

El perímetro del círculo: $2\pi r$.

El perímetro del cuadrado: $4x$.

El perímetro de ambas figuras (usamos la restricción dada):

$$2\pi r + 4x = 16, \qquad (*)$$

El área del círculo: πr^2.

El área del cuadrado: x^2.

El área de ambas figuras: $\pi r^2 + x^2$.

Ésta es la función de la que deseamos calcular el mínimo con la restricción dada.

$$A = \pi r^2 + x^2. \qquad (**)$$

Esta función depende de dos variables. La relación entre estas variables viene dada por la condición $(*)$. De aquí despejamos una variable. Elegimos arbitrariamente r

$$r = \frac{16 - 4x}{2\pi} = \frac{8 - 2x}{\pi}. \qquad (***)$$

Sustituimos en $(**)$

$$A(x) = \pi\left(\frac{8 - 2x}{\pi}\right)^2 + x^2 \Rightarrow A(x) = \frac{1}{\pi}(8 - 2x)^2 + x^2 \text{ y tenemos,}$$

derivando, con respecto a x:

$$A' = \frac{2}{\pi}(8 - 2x)(-2) + 2x = -\frac{4}{\pi}(8 - 2x) + 2x;$$

calculamos la segunda derivada:

$$A'' = -\frac{4}{\pi}(-2) + 2 = \frac{8}{\pi} + 2 > 0.$$

Esto no indica que la función A siempre es cóncava hacia arriba, es decir, vamos a encontrar un mínimo.

Igualamos a cero la primera derivada, para encontrar los puntos críticos:

$$-\frac{4}{\pi}(8-2x)+2x=0 \Rightarrow -\frac{4}{\pi}(8-2x)=-2x \Rightarrow 8-2x=\frac{\pi}{2}x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8=\frac{\pi}{2}x+2x=(\frac{\pi}{2}+2)x=\frac{\pi+4}{2}x \Rightarrow x=\frac{16}{\pi+4}$$

Éste es el valor que hace mínima el área $A(x)$

Para encontrar el valor de r correspondiente, sustituimos en $(\cdot\cdot\cdot)$

$$r=\frac{1}{\pi}\left(8-2\frac{16}{\pi+4}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{8\pi+32-32}{\pi+4}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{8\pi}{\pi+4}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow r=\frac{8}{\pi+4}=\frac{1}{2}x.$$

O sea, el lado del cuadrado es el doble del radio del círculo.

9. Sea la función $h(x)=2x^3-15x^2-36x$

(a) Encontrar las raíces de $h(x)$

▼ Tenemos:

$$h(x)=x(2x^2-15x-36).$$

Una de las raíces es $x=0$.

Las raíces de la cuadrática $2x^2-15x-36$ se calculan:

$$x=\frac{15\pm\sqrt{15^2-4(2)(-36)}}{4}=\frac{15\pm\sqrt{225+288}}{4}=$$
$$=\frac{15\pm\sqrt{513}}{4}\approx\frac{15\pm 22.6495}{4}\approx\begin{cases}9.41238\\-1.91238\,.\end{cases}$$

(b) Encontrar los puntos críticos. Encontrar los intervalos de monotonía

▼ Derivamos:

$$h'(x)=6x^2-30x-36=6(x^2-5x-6)=6(x-6)(x+1).$$

Las raíces de la derivada son, claramente, $x=-1$ & $x=6$.

Para el signo de la derivada usamos la tabla:

	Signo de		
Intervalo	$x+1$	$x-6$	$(x+1)(x-3)$
$x<-1\,(<6)$	$-$	$-$	$+$
$-1<x<6$	$+$	$-$	$-$
$x>6\,(>-1)$	$+$	$+$	$+$

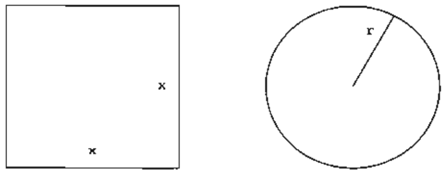
Vemos entonces que:

$h(x)$ es creciente en $(-\infty,-1)$ y en $(6,+\infty)$;

$h(x)$ es decreciente en $x\in(-1,6)$.

8. La suma del perímetro de un círculo y un cuadrado es de 16 cm. Hallar las dimensiones de las dos figuras que hacen mínima el área total encerrada por ambas figuras.

▼ El dibujo de ambas figuras es:



De ambas tenemos:

El perímetro del círculo: $2\pi r$.

El perímetro del cuadrado: $4x$.

El perímetro de ambas figuras (usamos la restricción dada):

$$2\pi r + 4x = 16. \qquad (*)$$

El área del círculo: πr^2.

El área del cuadrado: x^2.

El área de ambas figuras: $\pi r^2 + x^2$.

Ésta es la función de la que deseamos calcular el mínimo con la restricción dada.

$$A = \pi r^2 + x^2. \qquad (**)$$

Esta función depende de dos variables. La relación entre estas variables viene dada por la condición (*). De aquí despejamos una variable. Elegimos arbitrariamente r

$$r = \frac{16 - 4x}{2\pi} = \frac{8 - 2x}{\pi}\,. \qquad (***)$$

Sustituimos en (**)

$$A(x) = \pi\left(\frac{8-2x}{\pi}\right)^2 + x^2 \Rightarrow A(x) = \frac{1}{\pi}(8 - 2x)^2 + x^2 \text{ y tenemos,}$$

derivando, con respecto a x:

$$A' = \frac{2}{\pi}(8 - 2x)(-2) + 2x = -\frac{4}{\pi}(8 - 2x) + 2x;$$

calculamos la segunda derivada:

$$A'' = -\frac{4}{\pi}(-2) + 2 = \frac{8}{\pi} + 2 > 0.$$

Esto no indica que la función A siempre es cóncava hacia arriba, es decir, vamos a encontrar un mínimo.

Igualamos a cero la primera derivada, para encontrar los puntos críticos:

$$-\frac{4}{\pi}(8-2x)+2x=0 \Rightarrow -\frac{4}{\pi}(8-2x)=-2x \Rightarrow 8-2x=\frac{\pi}{2}x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8=\frac{\pi}{2}x+2x=(\frac{\pi}{2}+2)x=\frac{\pi+4}{2}x \Rightarrow x=\frac{16}{\pi+4}\,.$$

Éste es el valor que hace mínima el área $A(x)$.

Para encontrar el valor de r correspondiente, sustituimos en $(***)$

$$r=\frac{1}{\pi}\left(8-2\frac{16}{\pi+4}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{8\pi+32-32}{\pi+4}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{8\pi}{\pi+4}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow r=\frac{8}{\pi+4}=\frac{1}{2}x\,.$$

O sea, el lado del cuadrado es el doble del radio del círculo.

9. Sea la función $h(x)=2x^3-15x^2-36x$.

(a) Encontrar las raíces de $h(x)$

▼ Tenemos:

$$h(x)=x(2x^2-15x-36).$$

Una de las raíces es $x=0$.

Las raíces de la cuadrática $2x^2-15x-36$ se calculan:

$$x=\frac{15\pm\sqrt{15^2-4(2)(-36)}}{4}=\frac{15\pm\sqrt{225+288}}{4}=$$
$$=\frac{15\pm\sqrt{513}}{4}\approx\frac{15\pm 22.6495}{4}\approx\begin{cases}9.41238\\-1.91238\,.\end{cases}$$

(b) Encontrar los puntos críticos. Encontrar los intervalos de monotonía

▼ Derivamos:

$$h'(x)=6x^2-30x-36=6(x^2-5x-6)=6(x-6)(x+1).$$

Las raíces de la derivada son, claramente, $x=-1$ & $x=6$.

Para el signo de la derivada usamos la tabla:

	Signo de		
Intervalo	$x+1$	$x-6$	$(x+1)(x-3)$
$x<-1\,(<6)$	$-$	$-$	$+$
$-1<x<6$	$+$	$-$	$-$
$x>6\,(>-1)$	$+$	$+$	$+$

Vemos entonces que:

$h(x)$ es creciente en $(-\infty,-1)$ y en $(6,+\infty)$;

$h(x)$ es decreciente en $x\in(-1,6)$.

(c) Encontrar los puntos de inflexión. Encontrar los intervalos de concavidad

▼ Calculamos la segunda derivada:

$$h''(x) = 12x - 30.$$

Los ceros o raíces de la segunda derivada se calculan de la siguiente forma:

$$12x - 30 = 0 \Rightarrow x = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2.5\,.$$

Para calcular el signo de la segunda derivada tomamos puntos de muestra en cada uno de los intervalos en los cuales la recta real queda dividida por la raíz $x = 2.5$.

Intervalo	Muestra	Valor de $h'' = 12x - 30$
$x < 2.5$	0	-30
$x > 2.5$	10	90

Vemos entonces que:
$h(x)$ es cóncava hacia abajo en $x \in (-\infty, 2.5)$;
$h(x)$ es cóncava hacia arriba en $x \in (2.5, +\infty)$.
El punto $[2.5, h(2.5)] = (2.5, -152.5)$ es de inflexión.

(d) Clasificar los puntos críticos de $h(x)$

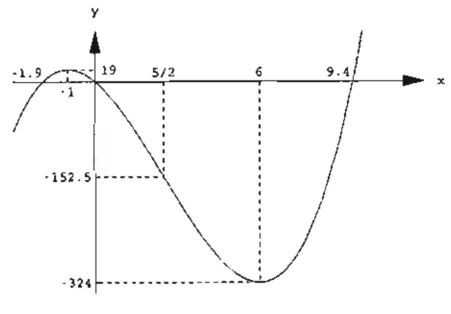
▼ Si usamos el criterio de la primera derivada vemos que:
En $x = -1$ la primera derivada cambia de signo de más a menos, tenemos un máximo local. Vemos también que $h''(-1) = -46 < 0$ corrobora el resultado anterior.
En $x = 6$ la primera derivada cambia de signo de menos a más, tenemos un mínimo local. Vemos también que $h''(6) = 42 > 0$ corrobora el resultado anterior.

(e) Dar un bosquejo de la gráfica

▼ Evaluamos la función $h(x)$ en algunos puntos:

x	$h(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x$
-1	19
6	-324

Con toda la información anterior podemos hacer un bosquejo de la gráfica de la función $h(x)$:



Recuperación, evaluación 11

1. Determinar los valores de x para los cuales está definida la función $f(x) = \sqrt{4-9x^2}$ y obtener también el intervalo formado por las imágenes $f(x)$.

▼ Dominio de $f(x)$:

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid 4 - 9x^2 \geq 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 4 \geq 9x^2 \} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{4}{9} \geq x^2 \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{2}{3} \geq |x| \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \right\} = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right];$$

Rango de $f(x)$:

$$R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \text{existe } x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right] \text{ tal que } y = f(x) \right\} =$$
$$= \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \text{existe } x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right] \text{ tal que } y = \sqrt{4-9x^2} \right\};$$

pero,

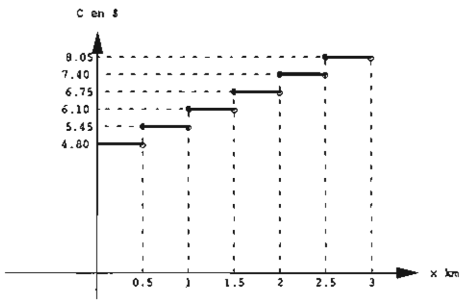
$$y = \sqrt{4-9x^2} \Rightarrow y^2 = 4 - 9x^2 \Leftrightarrow 9x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{(y-0)^2}{2^2} = 1.$$

Por lo que, si $y = \sqrt{4-9x^2}$, el punto (x, y) está en la elipse con centro en el origen $(0, 0)$, cuyos ejes están sobre los ejes coordenados $x = 0$ & $y = 0$; dicha elipse tiene semieje mayor igual a 2 en el eje de las y; tiene semieje menor igual a $\frac{2}{3}$ en el eje de las x; ahora, como $y \geq 0$, se trata exclusivamente de la semielipse superior; por último, el conjunto de todas las imagenes $f(x)$ es el intervalo $[0, 2]$.

2. Un taxista cobra 4.80 pesos por el banderazo que es el costo por subirse y recorrer menos de 500 m; pero cobra 0.65 pesos por cada tramo subsiguiente de 500 m (completo o parte). Expresar el costo C (en pesos) de un viaje como función de la distancia x recorrida (en kilómetros) para $0 < x < 3$ y graficar esta función.

▼ Vemos que

$$C(x) = \begin{cases} 4.80 \text{ si } 0 \leq x < 0.5 \\ 5.45 \text{ si } 0.5 \leq x < 1 \\ 6.10 \text{ si } 1 \leq x < 1.5 \\ 6.75 \text{ si } 1.5 \leq x < 2 \\ 7.40 \text{ si } 2 \leq x < 2.5 \\ 8.05 \text{ si } 2.5 \leq x < 3\,. \end{cases}$$



Podríamos sintetizar esto diciendo que

$$C(x) = 4.8 + 0.65x, \text{ donde } \frac{1}{2}(n-1) \le x < \frac{n}{2}, n \in \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Claramente esta función se puede generalizar al caso en que $n \in \mathbb{N}$.

3. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2+7x+6}{2x^2+x-3}$,

obtener: dominio y raíces; intervalos de continuidad y puntos de discontinuidad (clasificados); asíntotas verticales y horizontales.

▼ Dominio: $D_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + x - 3 \neq 0 \}$.

Pero, $2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \dfrac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{3}{2}; \end{cases}$

luego, $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{3}{2}, 1 \right\}$.

Para hallar las raíces resolvamos:

$$2x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4} = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \\ -2; \end{cases}$$

luego, las raíces serían $x = -\dfrac{3}{2}$ y también $x = -2$; pero, como $-\dfrac{3}{2} \notin D_f$, entonces la única raíz es $x = -2$.

La función es continua en su dominio: $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \bigcup \left(-\dfrac{3}{2}, 1\right) \bigcup (1, +\infty)$; es discontinua en $x = -\dfrac{3}{2}$ y en $x = 1$.

Ahora, como

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x+2)}{2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-1)} = \lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{x+2}{x-1} = \frac{-\frac{3}{2}+2}{-\frac{3}{2}-1} = \frac{\frac{-3+4}{2}}{\frac{-3-2}{2}} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5},$$

en $x = -\dfrac{3}{2}$ la discontinuidad no es esencial, es removible, a diferencia de lo que ocurre en $x = 1$, pues ahí:

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x+2}{x-1} = \pm\infty;$$

así, la discontinuidad en $x = 1$ es esencial, de hecho es infinita, y la recta $x = 1$ es asíntota vertical.

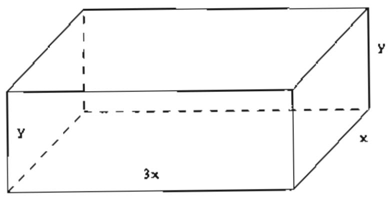
Para determinar las asíntotas horizontales calculamos:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Luego la recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

4. Se quiere construir una caja de base rectangular que sea tres veces más larga que ancha, que tenga tapa y que pueda contener 15 dm^3 de abono para plantas. Calcular las dimensiones que debe tener dicha caja para que requiera la menor cantidad de material en su construcción.

▼ Hagamos un bosquejo de la caja:



$$V = 3x^2y = 15 \Rightarrow y = \frac{15}{3x^2} = 5x^{-2}.$$

La función de la que queremos hallar su mínimo es el área de la caja:

$$A = 2 \times 3x^2 + 2 \times xy + 2 \times 3xy = 6x^2 + 8xy = 6x^2 + 8x5x^{-2} = 6x^2 + 40x^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(x) = 12x - \frac{40}{x^2} = \frac{12x^3 - 40}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{10}{3}} = \left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1.4938016 \;\&\; y = \frac{5}{\left(\frac{10}{3}\right)^{2/3}} =$$

$$= \frac{5 \times 3^{2/3}}{5^{2/3} \times 2^{2/3}} = \frac{5^{1/3} \times 3^{2/3}}{2^{2/3}} = \sqrt[3]{\frac{5 \times 9}{4}} = \sqrt[3]{\frac{45}{4}} \approx 2.2407024\,.$$

Como $A''(x) = 12 + 80x^{-3} = 12 + \frac{80}{x^3} > 0$, se trata de un mínimo para $A(x)$ y sucede cuando $x \approx 1.494$ & $y \approx 2.241$.

5. Para la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$,

obtener: dominio, raíces y paridad; intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos y mínimos, locales y absolutos; intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo; puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R}$, raíz $x = 0$, $f(x)$ es impar.

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Veamos el signo de la derivada:

Intervalo	$(-\infty, -1)$,	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Valor de f' :	$f'(-2) < 0$	$f'(0) > 0$	$f'(2) < 0$
Signo de f' :	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
f es	decreciente	creciente	decreciente

También se puede ver directamente, pues el signo de $f'(x)$ nos lo da $1 - x^2$.

En $[-1, f(-1)] = \left(-1, \frac{-2}{1+1}\right) = (-1, -1)$ hay un mínimo local por el criterio de la primera derivada, y en $(1, 1)$ hay un máximo local:

$$f''(x) = 2\frac{-2x(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = 4\frac{-x(x^2+1) - 2x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} =$$

$$= 4\frac{-x^3 - x - 2x + 2x^3}{(x^2+1)^3} = 4\frac{x^3 - 3x}{(x^2+1)^3} = 4x\frac{x^2-3}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \,\&\, x = \pm\sqrt{3}\,.$$

Análogamente, veamos el signo de $f''(x)$

Intervalo	$(-\infty, -\sqrt{3})$,	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
Valor de f'' :	$f''(-2) < 0$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(2) > 0$
Signo de f'' :	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
f es	convexa	cóncava	convexa	cóncava

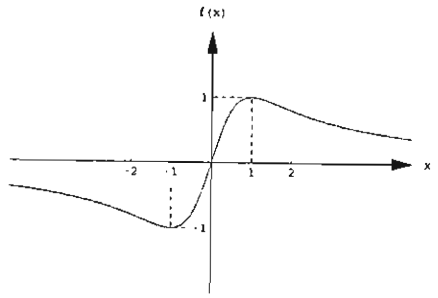
Tanto en

$[-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})] = \left(-\sqrt{3}, \frac{-2\sqrt{3}}{3+1}\right) = \left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \approx (-1.7320508, -0.8660254)$, $(0, 0)$ como en $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ hay puntos de inflexión.

También

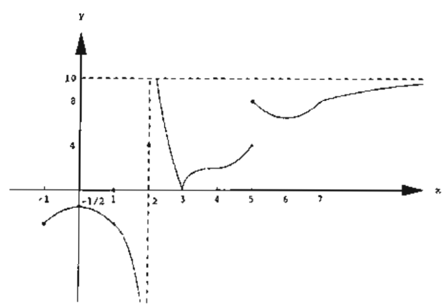
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0^\pm}{1+0} = \frac{0^\pm}{1} = 0^\pm.$$

Con estos datos, la gráfica de la función $f(x)$ es la siguiente:



Resulta entonces que $(1, 1)$ es el máximo absoluto; y que $(-1, -1)$ es el mínimo absoluto.

6. La función f tiene la gráfica siguiente:



De ella determinar: dominio, rango, raíces, intervalos de continuidad y discontinuidades (clasificadas); intervalos de monotonía y concavidades, puntos de inflexión; dónde f no es diferenciable (no tiene derivada); puntos críticos de f; clasificar estos puntos. Y además encontrar los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x); \quad \lim_{x\to 5^+} f(x); \quad \lim_{x\to 2^-} f(x), \quad \lim_{x\to 2^+} f(x); \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) \ \& \ f(1),\ f(2),\ f(5).$$

▼ Dominio: $D_f = [-1, +\infty)$.

Rango: $R_f = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \bigcup (0, +\infty)$.

Raíces: $x = 3$ es raíz.

Es continua en $[-1,1)\bigcup(1,2)\bigcup(2,5)\bigcup[5,+\infty)$; es discontinua en $x=1$, donde la discontinuidad es removible: también en $x=2$, donde tiene una discontinuidad esencial (infinita); por último, en $x=5$, donde la discontinuidad igualmente es esencial.

Es creciente en $[-1,0]\,,[3,5]$ y $[6,+\infty)$ y decreciente en $[0,1)\,,[1,2)\,,(2,3]$ y $[5,6]$.

Es convexa en $(-1,1)\,,(1,2)\,,[3,4]$ y $[6,+\infty)$ y cóncava en $(2,3]\,,[4,5)$ y $[5,7]$.

Sus puntos de inflexión son $(3,0)$, $(4,1)$ y $(7,8)$.

La función f no es derivable en $x=1$, $x=2$, $x=3$ ni en $x=5$.

Sus puntos críticos son $x=0$, $x=4$ & $x=6$.

En $x=0$ hay nn máximo al igual que en $x=5$; ambos locales.

En $x=3$ y en $x=6$ hay mínimos; ambos locales.

Los límites: $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=4$; $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=8$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$; $f(1)=0$; $f(2)=4$; $f(5)=8$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ no existe.

Recuperación, evaluación 12

1. Resolver la desigualdad $|3 - x| > 2x^2 + 3$.

▼ Equivale a dos desigualdades:

$$3 - x > 2x^2 + 3 \text{ o bien } 3 - x < -(2x^2 + 3).$$

La primera, a su vez, equivale a $2x^2 + 3 - 3 + x < 0$, transponiendo términos, y ésta a $2x^2 + x < 0$.
Como $2x^2 + x = x(2x + 1)$, este producto es negativo si:

$$\begin{array}{llllllll} x > 0 & \text{y} & 2x + 1 < 0 & \text{o bien} & x < 0 & \text{y} & 2x + 1 > 0; \\ x > 0 & \text{y} & 2x < -1 & \text{o bien} & x < 0 & \text{y} & 2x > -1; \\ x > 0 & \text{y} & x < -\dfrac{1}{2} & \text{o bien} & x < 0 & \text{y} & x > -\dfrac{1}{2}; \\ & x \in \emptyset & & \text{o bien} & & x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right). & \end{array}$$

Luego, parte del conjunto solución de la desigualdad propuesta es el conjunto:

$$\emptyset \bigcup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

La otra parte la hallaremos resolviendo la otra desigualdad, análogamente:

$$3 - x < -(2x^2 + 3) \Leftrightarrow 2x^2 + 3 + 3 - x < 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 6 < 0.$$

Sabemos que $2x^2 - x + 6 \neq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, pues el discriminante $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(6) < 0$

Sabemos también que $y = 2x^2 - x + 6$ es una parábola que dirige su concavidad hacia la parte superior.

Con estas condiciones, la parábola tiene que estar forzosamente en la parte superior del eje de las x; y por lo tanto, $y = 2x^2 - x + 6 > 0$ para toda x.

Y, por último, el conjunto solución resultante es únicamente el intervalo $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Por ejemplo, $x = 0$ & $x = -\dfrac{1}{2}$ no satisfacen a la desigualdad propuesta pues:

$$|3 - 0| \not> 2(0)^2 + 3$$

y también: $\left|3 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right| = \left|3 + \dfrac{1}{2}\right| = 3 + \dfrac{1}{2} \not> 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 3 = 3 + \dfrac{2}{4} = 3 + \dfrac{1}{2}$.

2. Sea la función $y = (x^2 - 1)^3\sqrt{4 - x}$.

Encuentre la ecuación de las rectas tangente y normal a la gráfica en el punto $(0, 2)$.

▼ Calculamos la pendiente de la recta tangente usando la derivada:

$$y' = 2(x^2-1)2x\sqrt{4-x} - \frac{(x^2-1)^2}{2\sqrt{4-x}} = \frac{(x^2-1)[8x(4-x)-(x^2-1)]}{2\sqrt{4-x}} =$$
$$= \frac{(x^2-1)(32x-8x^2-x^2+1)}{2\sqrt{4-x}} = \frac{(x^2-1)(-9x^2+32x+1)}{2\sqrt{4-x}}$$

y en $x = 0$ la pendiente de la recta tangente es entonces:

$$y'(0) = \frac{-1}{2\sqrt{4-0}} = \frac{-1}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{2\times 2} = -\frac{1}{4}$$

y la ecuación de la recta tangente en el punto (0,2) será:

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x-0) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + 2.$$

La pendiente de la recta normal es 4 y la ecuación de la recta normal en el punto (0,2) es:

$$y - 2 = 4(x-0) \Rightarrow y = 4x + 2.$$

3. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x < -2 \\ -ax + 2b & \text{si } |x| \le 2 \\ 3 - x^2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Encuentre valores a, b para que la función sea continua en todo punto.

▼ En los únicos puntos donde podría no ser continua f es en -2 y en 2. Para que sea continua en ellos se tiene que cumplir

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \text{ y que } \lim_{x\to -2} f(x) = f(-2)$$

y para ello se tiene que cumplir

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = -2a + 2b; \ \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = 2a + 2b.$$

Como:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 - (2)^2 = 3 - 4 = -1, \ \lim_{x\to 2^-} f(x) = -2a + 2b,$$

se tiene que cumplir $-2a + 2b = -1$.

Análogamente:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = 2a + 2b, \ \lim_{x\to -2^-} f(x) = \frac{1}{-2+1} = \frac{1}{-1} = -1;$$

luego, $2a + 2b = -1$.

Resolvamos pues el sistema $\begin{cases} -2a + 2b = -1 \\ 2a + 2b = -1 \end{cases}$ sumando ambas ecuaciones lineales con dos incógnitas; tenemos:

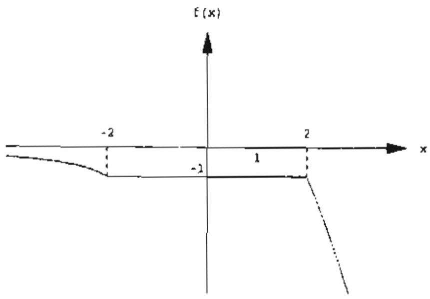
$4b = -2 \Rightarrow b = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ y, sustituyendo este valor en la segunda ecuación, tenemos:

$2a - 1 = -1 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = \dfrac{0}{2} = 0$. Dar un bosquejo de la gráfica con estos valores

▼ La función con estos valores es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x < -2 \\ -1 & \text{si } |x| \le 2 \\ 3 - x^2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

La gráfica de la función $f(x)$ es:



Es decir, unimos los dos segmentos de la parábola $y = 3 - x^2$ y de la hipérbola $y = \dfrac{1}{x+1}$ con un segmento de la recta $y = -1$.

4. Un polinomio pasa por los puntos $(-5, 10)$, $(2, 3)$ y $(17, -1)$.

¿Cuántas raíces tiene como mínimo? Justifique su respuesta.

▼ Una, pues siendo continua en toda la recta, la función polinomial $p(x)$ es positiva en 2 puesto que $p(2) = 3$; y es negativa en 17 ya que $p(17) = -1$; por lo que entre 2 y 17 la función tiene al menos una raíz, por el teorema del Valor Intermedio.

5. Dada la función definida por $f(x) = 3x^5 - 5x^3$, obtener: raíces, intervalos de crecimiento y de decrecimiento; puntos críticos y su clasificación; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.

▼ Calculemos:

$$3x^5 - 5x^3 = x^3(3x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \;\&\; 3x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\&\; x^2 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \;\&\; |x| = \sqrt{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow x = 0 \;\&\; x \approx \pm 1.2909944.$$

Éstas son las raíces de f que concuerdan con el hecho de que $f(x)$ es impar.

Para determinar los intervalos de crecimiento se deriva f:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \;\&\; x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\&\; (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\&\; x = \pm 1.$$

Estos tres puntos críticos $-1, 0$ & 1 dividen la recta en cuatro intervalos donde la derivada tiene los siguientes signos:

Eligiendo arbitrariamente $\pm 2 \in (-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$ se tiene que $f'(\pm 2) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$.

Análogamente, eligiendo $\pm\frac{1}{2} \in (-1, 0) \bigcup (0, 1)$ se ve que $f'\left(\pm\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-1, 0)$ y en $(0, 1)$.

En $x = -1$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente por lo que

$$[-1, f(-1)] = [-1, 3(-1)^5 - 5(-1)^3] = (-1, -3 + 5) = (-1, 2)$$

es un máximo relativo;

$(1, -2)$ es un mínimo relativo.

Siendo $f(x)$ decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$, en $(0,0)$ la función no tiene valor extremo.

Para la concavidad se deriva nuevamente:

$$f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \& \ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0.7071067\,.$$

Se determina el signo de la segunda derivada en los cuatro intervalos donde la segunda derivada no es cero:

En $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, eligiendo $-1 \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, se tiene que $f''(-1) < 0$; luego, $f(x)$ dirige su concavidad hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Y en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$, la dirige hacia arriba.

En $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $-\frac{1}{2} \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $f''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$; luego, $f(x)$ dirige su concavidad hacia arriba en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Y en cambio, la dirige hacia abajo en $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Los tres puntos:

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 - 5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right] \approx$$

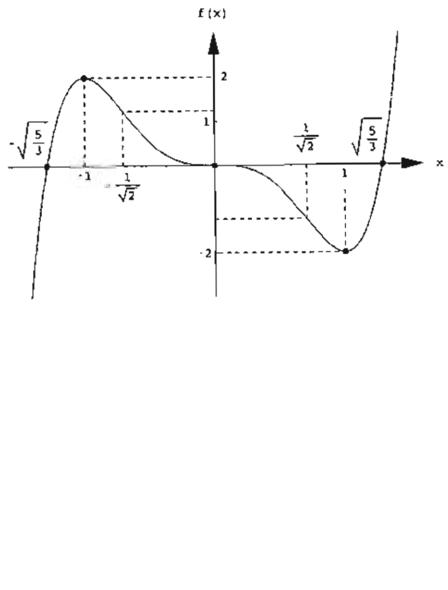
$$\approx \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -0.5303301 + 1.767767\right) \approx (-0.7071067, 1.2374369)$$

$$[0, f(0)] = (0, 0) \text{ y}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \approx (0.7071067, -1.2374369)$$

son de inflexión.

Con toda la información obtenida, la gráfica de $f(x)$ queda de la siguiente manera:



6. Sea la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - x - 6}$.

Encuentre su dominio, sus raíces. Clasifique sus discontinuidades. Encuentre sus asíntotas horizontales y verticales. Encuentre sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Encuentre sus intervalos de concavidad. Haga un bosquejo de la gráfica.

▼ Para el dominio tenemos:

$$\begin{aligned} D_f &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 \neq 0 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid (x+2)(x-3) \neq 0 \,\} = \\ &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \neq 0 \text{ y } x - 3 \neq 0 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \text{ y } x \neq 3 \,\} = \\ &= \mathbb{R} - \{\, -2, 3 \,\}. \end{aligned}$$

Para hallar las raíces resolvamos:

$$3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} 3 \\ \frac{2}{6} \end{cases} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Luego, la única raíz es $x = \dfrac{1}{3}$ pues $x = 3 \notin D_f$.

Calculemos:

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to -2^{\pm}} \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-3)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \to -2^{\pm}} \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)}{(x+2)} = \mp\infty \text{ y}$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)}{(x+2)} = \frac{3\left(3 - \frac{1}{3}\right)}{3+2} = \frac{3\left(\frac{9-1}{3}\right)}{5} = \frac{3\left(\frac{8}{3}\right)}{5} = \frac{8}{5}.$$

De aquí se desprende que la discontinuidad en $x = 3$ es removible y que en $x = -2$ es esencial, precisamente infinita.

También que la recta $x = -2$ es asíntota vertical.

Para determinar las horizontales calculamos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)}{x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x\left(1 - \frac{1}{3x}\right)}{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3\left(1 - \frac{1}{3x}\right)}{1 + \frac{2}{x}} = \\ &= \frac{3(1-0)}{1+0} = \frac{3 \times 1}{1} = \frac{3}{1} = 3; \end{aligned}$$

luego, $y = 3$ es asíntota horizontal.

Para precisar la monotonía de la función calculamos su derivada, tomando $f(x) = \dfrac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)}{x+2}$ para $x \neq 3$, de hecho $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{3x + 6 - 3x + 1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} > 0;$$

luego, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ y en $(3, +\infty)$ y no tiene puntos críticos.

Y también para $x \in D_f$:

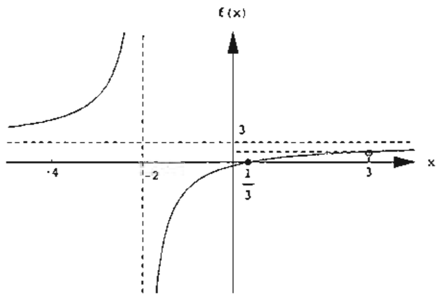
$$f''(x) = [7(x+2)^{-2}]' = -\frac{7 \times 2}{(x+2)^3} = -\frac{14}{(x+2)^3}.$$

Si $x > -2 \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ (para $x \neq 3$) $\Rightarrow$ la función f es convexa en $(-2, 3)$ y en $(3, +\infty)$.

Si $x < -2 \Rightarrow x + 2 < 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ la función f es cóncava en $(-\infty, -2)$.

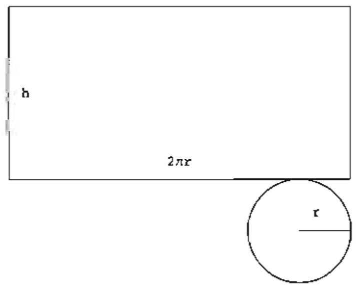
$f(0) = \dfrac{3}{-6} = -\dfrac{1}{2}$.

El bosquejo de la gráfica de $f(x)$ es:



7. Se va a fabricar una lata cilíndrica sin tapa para contener 10 cm^3 de líquido. Encuentre las dimensiones que minimizarán el costo del metal requerido para fabricar la lata.

▼ Usamos la figura



Tenemos que:

$$V = \pi r^2 h = 10 \text{ cm}^3.$$

Queremos que sea mínima la cantidad de material requerido, es decir, el área:

$$A = \pi r^2 + 2\pi r h.$$

Así expresada el área es función de dos variables: r & h, pero como están relacionadas a través de la expresión para el volumen de la lata, podemos despejar a una de ellas en términos de la otra. Es más cómodo despejar h:

$$h = \frac{10}{\pi r^2} = \frac{10}{\pi} r^{-2}.$$

Sustituyendo este valor en la expresión para el área, la tendremos expresada como función de una única variable r:

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r \frac{10}{\pi} r^{-2} = \pi r^2 + 20r^{-1}.$$

Hallemos sus puntos críticos:

$$A'(r) = 2\pi r - \frac{20}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 2\pi r = \frac{20}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{20}{2\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \approx 1.4710137 \text{ cm},$$

con lo cual:

$$h = \frac{10}{\pi}\left(\frac{10}{\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{10}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = r.$$

Como:

$$A''(r) = 2\pi + \frac{40}{r^3} > 0, \text{ se trata en efecto de un mínimo.}$$

Recuperación, evaluación 13

1. Resolver $\dfrac{|2x-3|}{x+1} > 4$.

▼ Sabemos que $x+1 \neq 0$.

Consideramos dos casos:

(a) $x+1>0 \Rightarrow$ La desigualdad propuesta equivale a

$$|2x-3| > 4(x+1) \Leftrightarrow |2x-3| > 4x+4$$

y ésta, a su vez, a las dos desigualdades

$$2x-3 > 4x+4 \text{ y } 2x-3 < -(4x+4) \Leftrightarrow 2x-3 < -4x-4.$$

La primera equivale a

$$2x-4x > 3+4 \Leftrightarrow -2x > 7 \Leftrightarrow x < -\frac{7}{2};$$

pero, como $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$, por este camino no existe $x \in \mathbb{R}$ que satisfaga a la desigualdad propuesta.

Ahora veamos la segunda desigualdad:

$$2x-3 < -4x-4 \Leftrightarrow 2x+4x < 3-4 \Leftrightarrow 6x < -1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{6}.$$

Como para este caso $x > -1 \Rightarrow x \in \left(-1, -\dfrac{1}{6}\right)$.

(b) $x+1<0$

No tenemos solución en este caso, puesto que $|2x-3| \geq 0 \Rightarrow \dfrac{|2x-3|}{x+1} \leq 0$, no puede ser > 4

En resumidas cuentas el conjunto solución de la desigualdad propuesta es:

$$\left(-1, -\frac{1}{6}\right).$$

Comprobemos por ejemplo que $x = -\dfrac{1}{6}$ no satisface a la desigualdad orignal:

$$\frac{\left|2\left(-\frac{1}{6}\right)-3\right|}{-\frac{1}{6}+1} = \frac{\left|-\frac{1}{3}-3\right|}{\frac{5}{6}} = \frac{\left|-\frac{10}{3}\right|}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{10\times 6}{3\times 5} = 2\times 2 = 4 \not> 4.$$

2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{si } x \leq -1 \\ ax^2 + b & \text{si } -1 < x < 2 \\ c & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{3}{2}x + 5 & \text{si } x > 2\,. \end{cases}$$

Encontrar los valores de a, b, c para que la función sea continua en todo punto.

▼ En los únicos puntos en donde hay duda de la continuidad es en $x = -1$ y en $x = 2$ donde la función deja de ser lineal para pasar a ser cuadrática y viceversa, por lo que ahí tenemos que asegurar que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) \text{ y que } \lim_{x \to 2} f(x) = f(2).$$

Es decir, que:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = -2(-1) - 3 = 2 - 3 = -1$$

y que

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = c\,.$$

De aquí obtenemos las siguientes ecunciones, dado que:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (ax^2 + b) = a(-1)^2 + b = a + b\,;$$
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (-2x - 3) = -2(-1) - 3 = 2 - 3 = -1\,;$$

por lo que $a + b = -1$.

También:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{3}{2}x + 5\right) = \frac{3}{2}(2) + 5 = 3 + 5 = 8\,;$$
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (ax^2 + b) = a(2)^2 + b = 4a + b\,;$$

luego, $4a + b = 8$ y también $c = 8$.

Resolvamos por último el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 4a + b = 8\,. \end{cases}$$

Restando de la segunda la primera obtenemos que:

$$3a = 8 - (-1) \Leftrightarrow 3a = 8 + 1 \Leftrightarrow 3a = 9 \Leftrightarrow a = \frac{9}{3} \Leftrightarrow a = 3.$$

y sustituyendo este valor en la primera tenemos:

$$3 + b = -1 \Leftrightarrow b = -1 - 3 \Leftrightarrow b = -4.$$

Con estos valores la función continua en $\mathbb{R}$ es:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^2 - 4 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 8 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{3}{2}x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

o bien:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 - 4 & \text{si } -1 < x < 2 \\ \dfrac{3}{2}x + 5 & \text{si } x \ge 2 . \end{cases}$$

3. Encontrar las dos ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $y = x^2 + 1$ que pasan por el origen.

▼ Cualquier punto de la gráfica de la función $y = x^2 + 1$ tiene por coordenadas $(x_1, x_1^2 + 1)$

y la pendiente de cualquier recta tangente es $y' = 2x_1$.

Luego, la ecuación de cualquier recta tangente es de la forma:

$$y - (x_1^2 + 1) = 2x_1(x - x_1).$$

Ahora, si va a pasar por el origen $(0, 0)$, estas coordenadas la deben satisfacer, por lo que

$$-x_1^2 - 1 = 2x_1(-x_1) \Leftrightarrow -x_1^2 - 1 = -2x_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow |x_1| = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1 ;$$

entonces las dos ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $y = x^2 + 1$ que pasan por el origen son:

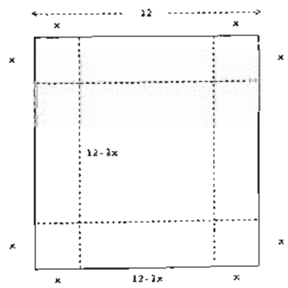
$$y - (1^2 + 1) = 2(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = 2x$$

y también:

$$y - [(-1)^2 + 1] = 2(-1)[x - (-1)] \Leftrightarrow y - 2 = -2x - 2 \Leftrightarrow y = -2x.$$

4. Se desea hacer una caja abierta con una pieza cuadrada de material de 12 cm de lado, cortando cuadritos iguales de cada esquina. Hallar el máximo volumen que puede lograrse con una caja así.

▼ Si componemos la figura, tenemos:



El volumen, que nos piden es:

$$V(x) = (12 - 2x)^2 x = x(4x^2 - 48x + 144) = 4x^3 - 48x^2 + 144x .$$

Sus puntos críticos son:

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{96 \pm \sqrt{9216 - 6912}}{24} = \frac{96 \pm \sqrt{2304}}{24} = \frac{24 \pm 48}{24} = \begin{cases} 3 \\ -1 \, . \end{cases}$$

Podemos desechar $x = -1$, pues físicamente no tiene sentido que sea negativo, en cuyo caso, para $x = 3$ cm el volumen es:

$$V(3) = 3[12 - 2(3)]^2 = 3(12 - 6)^2 = 3 \times 6^2 = 3 \times 36 = 108 \text{ cm}^3 \, .$$

Como:

$$V''(x) = 24x - 96 \text{ y } V''(3) = 72 - 96 < 0 \, ,$$

se trata de un máximo.

5. Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x} - 3$.

(a) Encontrar las asíntotas verticales y horizontales

▼ Como $x^2 - 2x = x(x - 2) \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$.

En su dominio:

$$f(x) = \frac{x}{x(x-2)} - 3 = \frac{1}{x-2} - 3 = \frac{1 - 3x + 6}{x - 2} = \frac{-3x + 7}{x - 2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to 2^{\pm}} \frac{-3x + 7}{x - 2} = \pm\infty \text{ pues}$$
$$\lim_{x \to 2^{\pm}} (-3x + 7) = -3(2) + 7 = -6 + 7 = 1 > 0 \text{ y } \lim_{x \to 2^{\pm}} (x - 2) = 0^{\pm};$$

por lo que la recta $x = 2$ es asíntota vertical.

En cambio $x = 0$ no es asíntota vertical pues:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-3x + 7}{x - 2} = \frac{-3(0) + 7}{0 - 2} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2} \, .$$

Para calcular las asíntotas horizontales estimamos:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x + 7}{x - 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x\left(-3 + \dfrac{7}{x}\right)}{x\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)} =$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3 + \dfrac{7}{x}}{1 - \dfrac{2}{x}} = \frac{-3 + 0}{1 - 0} = \frac{-3}{1} = -3.$$

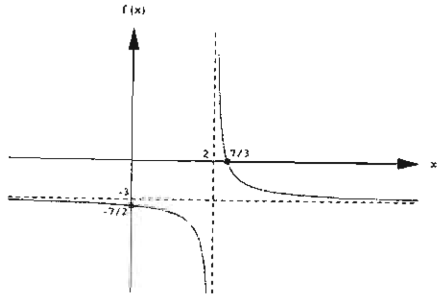
Por lo que la recta $y = -3$ es asíntota horizontal.

(b) Encontrar los puntos de discontinuidad y clasificarlos

▼ Como $f(x) = \dfrac{x - 3(x^2 - 2x)}{x^2 - 2x}$ es una función racional, es continua en su dominio y, de acuerdo a lo calculado en el inciso anterior, en $x = 0$ la discontinuidad es removible; en $x = 2$ la discontinuidad es esencial, de hecho infinita.

(c) Hacer un bosquejo de la gráfica

▼ Una gráfica de la función $f(x)$ que cumple con lo anterior es:



La única raíz de $f(x)$ es cuando:

$$-3x+7=0 \Leftrightarrow -3x=-7 \Leftrightarrow x=\frac{-7}{-3}=\frac{7}{3}.$$

6. Sea la función $f(x)=x^4-4x^3$.

(a) Encontrar las raíces, los puntos críticos y los puntos de inflexión de la función

▼ Tenemos que

$$x^4-4x^3=0 \Leftrightarrow x^3(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \;\&\; x=4 \text{ son las raíces de la función;}$$
$$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \;\&\; x=3 \text{ son los puntos críticos,}$$
$$f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \;\&\; x=2;$$

así mismo, para el signo de la segunda derivada usamos la tabla

Intervalo:	Un valor de f''	$f''(x)$ es
$(-\infty,0)$	$f''(-1)=(-12)(-3)>0$	positiva
$(0,2)$	$f''(1)=12(1-2)<0$	negativa
$(2,+\infty)$	$f''(3)=12(3)(3-2)>0$	positiva

Entonces los puntos: $[0,f(0)]=(0,0)$ & $[2,f(2)]=[2,2^3(2-4)]=[2,8(-2)]=(2,-16)$ son de inflexión, pues en ellos la gráfica cambia el sentido de su concavidad.

(b) Encontrar los intervalos de monotonía y de concavidad de la función

▼ Veamos el signo de la primera derivada

Intervalo:	Un valor de f':	$f'(x)$ es	$f(x)$ es
$(-\infty,0)$	$f'(-1)=4(-1)^2(-1-3)<0$	negativa	decreciente
$(0,3)$	$f'(1)=4(1)^2(1-3)<0$	negativa	decreciente
$(3,+\infty)$	$f'(4)=4(4)^2(4-3)>0$	positiva	creciente

Por lo calculado en el inciso anterior:

$f(x)$ es cóncava en $(-\infty, 0)\bigcup(2, \infty)$ y convexa en $(0, 2)$, ya que en tales conjuntos la segunda derivada es positiva y negativa, respectivamente.

(c) Clasificar los puntos críticos especificando el criterio que usa

▼ Como $f(x)$ pasa de ser decreciente a ser creciente, por el criterio de la primera derivada, concluimos que en el punto:

$$[3, f(3)] = [3, 3^3(3-4)] = [3, 27(-1)] = (3, -27)$$

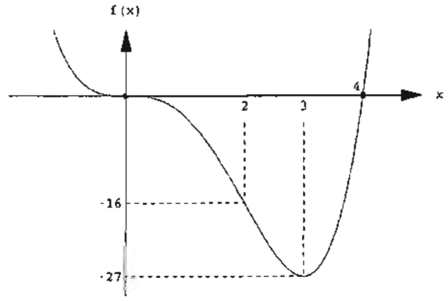
hay un mínimo que resulta ser absoluto; en cambio en el origen no hay valor extremo pues la función pasa de ser decreciente a ser decreciente también.

(d) Graficar la función

▼ Podemos calcular también

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x^4\left(1-\frac{4}{x}\right)\right] = +\infty .$$

Con todo lo anterior, la gráfica de $f(x)$ es:



Portal de Problemas de Matemáticas
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
Recuperación, evaluaciones
Se terminó de imprimir en
el mes de enero del año 2006
en los talleres de la Sección
de Impresión y Reproducción de la
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

La edición
estuvo a cargo de
la Sección de Producción
y Distribución Editoriales

Se imprimieron
500 ejemplares más sobrantes
para reposición

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

COSEI COORDINACIÓN DE SERVICIOS DE INFORMACIÓN

Formato de Papeleta de Vencimiento

El usuario se obliga a devolver este libro en la fecha señalada en el sello mas reciente

Código de barras. 2892872

FECHA DE DEVOLUCION

- Ordenar las fechas de vencimiento de manera vertical.

- Cancelar con el sello de "DEVUELTO" la fecha de vencimiento a la entrega del libro

UAM 2892872
QA303
P6.77 Portal de problemas de ma

ISBN 970-31-0373-1

978-97031-03737

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas
Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales

Ciencias