Prezentarea unor Locuri Geometrice în LabVIEW

CANĂ Rodica-profesor Liceul Teoretic Ion Neculce BUCUREŞTI
GRIGORESCU Ştefan – CASA CORPULUI DIDACTIC BUCURESTI

Abstract-In the present project we showed a couple geometric places useful for mathematic teachers and students in high school. The program LabVIEW allows fluently to realise such software in the mathematic and physics domain. Using the computer capacity and the mathematic knowledge we were able to get familliar with these teaching lessons. These geometric places are hard to see and to understand with other methods. The geometric places presented are important istoric speaking but also in practice. For example the whorl of Arhimede and Cassini's oval or the hiperbola whorl or the astroida and the cardioida.

Index terms-LabVIEW,Geometric Places.

1. SCOPUL TEMEI PREZENTATE ESTE:

Extinderea reprezentării grafice prin programare grafică Lab VIEW;
Modelarea curbelor plane;
Motivația geometrico-algebrică de stabilire a legăturilor întrte operațiile algebrice, fenomenele periodice şi fenomenele de creştere(descreştere);
Aprofundarea conceptelor matematice prin descrieri şi noi achiziții teoretice necesare aplicațiilor interdisciplinare.

2. GENERALITATI:

O curbă poate fi definită ca loc geometric al unor puncte, adică se poate da o proprietate geometrică pe care o au toate punctele curbei si numai ele, proprietate care deosebeşte punctele curbei de celelalte puncte ale planului.
În acest caz se pune problema determinării ecuației curbei. Problema se reduce la explicarea analitică ca toate punctele curbei sa reprezinte o anumită proprietate. Se poate imagina curba ca fiind descrisă de un punct mobil M(x,y) şi în acest caz este suficient a exprima că punctul M(x,y) are tot timpul proprietate respectivă. Odată găsită ecuația curbei prin intermediul calculatorului cu programul LabVIEW se va întocmi graficul curbelor.

- TEMA 1: OVALELE LUI CASSINI (J.D Cassini astronom sec. XVII)

Ecuația curbei ovalului lui Cassini este definită ca locul geometric al punctelor din plan pentru care produsul distanțelor la 2 puncte date este o constantă egală cu a^2 .

Exprimând printr-o formulă faptul că produsul distanțelor de la M(x,y) mobil la punctele P şi Q fixate este egală cu a^2 şi alegând sistemul de coordonate cu axa absciselor dreapta PQ şi originea mijlocul distanței obținem ecuația implicită a ovalului lui Cassini:

$$\sqrt{(x+b)^2+y^2} \; * \; \sqrt{(x-b)^2+y^2} = a^2$$

Observăm că dacă M(x,y) este un punct oarecare al ovalului, atunci punctele (-x,-y), (x,y), (-x,y) aparțin de asemenea ovalului, deci axele de coordonate Ox si Oy sunt axele de simetrie ale ovalului, iar originea O(0,0) este centrul de simetrie al acestuia.

Prin ridicarea ambilor membri la pătrat se obține:

$y^2 = \sqrt{4b^2x^2+a^4} - (x^2+b^2)$ care are sens pentru $\sqrt{4b^2x^2+a^4} \geq x^2+b^2$ respectiv $b^2-a^2 \leq x^2 \leq a^2+b^2$.

Deosebim cazurile:

1) $b^2-a^2<0 \Rightarrow b<a \Rightarrow$ ecuația explicită a ovalului:

$$y=\pm\sqrt{\sqrt{4b^2x^2+a^4}-(x^2+b^2)},$$

$$x\in\left[\,-\sqrt{a^2+b^2},\sqrt{a^2+b^2}\,\right]$$

Calculând derivata:

$$f'(x)=\pm\frac{2b^2x-x\sqrt{4b^2x^2+a^4}}{\sqrt{\sqrt{4b^2x^2+a^4}-(x^2+b^2)}}=\frac{x(2b^2-\sqrt{4b^2x^2+a^4})}{\sqrt{\sqrt{4b^2x^2+a^4}-(x^2+b^2)}}$$

După rădăcinile ecuației $f'(x)=0$ pot fi analizate subcazurile:

1^o. Dacă $b<a<\sqrt{2}\,b$ ecuația $f'(x)=0$ are 2 rădăcini distincte:

$x_1=0$ şi $x_2=\dfrac{\sqrt{4b^4-a^4}}{2b}$ pentru $x\in[0,\sqrt{a^2+b^2}]$.

Se obține următorul tabel de variație:

x	$0 \qquad \frac{\sqrt{4b^4-a^4}}{2b} \qquad \sqrt{a^2+b^2}$
f'(x)	0 + + + + + + + 0 - - - - - - - - - - - - - -
f(x)	$\sqrt{a^2-b^2}$ ↗ $\frac{a^2}{2b}$ ↘ 0

Graficul ovalului lui Cassini are forma din calculator în panoul programului LabVIEW. ("graf 3")…

2°. Dacă $\sqrt{2}$ b<a ecuația $f'(x)=0$ are o singuă rădăcină x=0.Se obține următorul tabel de variație:

x	$0 \qquad \sqrt{a^2+b^2}$
f'(x)	0 -
f(x)	$\sqrt{a^2-b^2}$ ↘ ↘ 0

Graficul ovalului lui Cassini are forma din calculator în panoul programului LabVIEW. ("graf c")…

2) Dacă a=b se obține o formă particulară a ovalului numită Lemniscata. Ecuația explicită a lemniscatei este:

$$y=\pm\sqrt{\sqrt{4a^2x^2+a^4}-(x^2+a^2)}\ ,$$

$$x\in\left[-a\sqrt{2}, a\sqrt{2}\right].$$

Derivata acestei curbe este:

$$f'(x)=\pm\frac{x(2a^2-\sqrt{4a^2x^2+a^4}}{\sqrt{4a^2x^2+a^4}-(x^2+a^2)}$$

Ecuația $f'(x)=0$ are rădăcina $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Obținem următorul tabel de variație:

x	$0 \qquad \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad a\sqrt{2}$
f'(x)	I + + + + + + + + + + + 0 - - - - - - - - - - -
f(x)	0 ↗ $\frac{a}{2}$ ↘ 0

Graficul lemniscatei are forma a treia din panoul programului("graf III").

Lemniscata [gr."lemniscos"="panglică"], curbă plană, loc geometric al punctelor pentru care produsul distanțelor la două puncte fixe este egal cu pătratul jumătății distanței dintre punctele fixe MP×MQ=a^2, unde P,Q sunt punctele fixe, cu PQ=2a.

3) a<b

Ecuația explicită a ovalului este:

$$y=\pm\sqrt{\sqrt{4b^2x^2+a^4}-(x^2+b^2)}\ ,$$

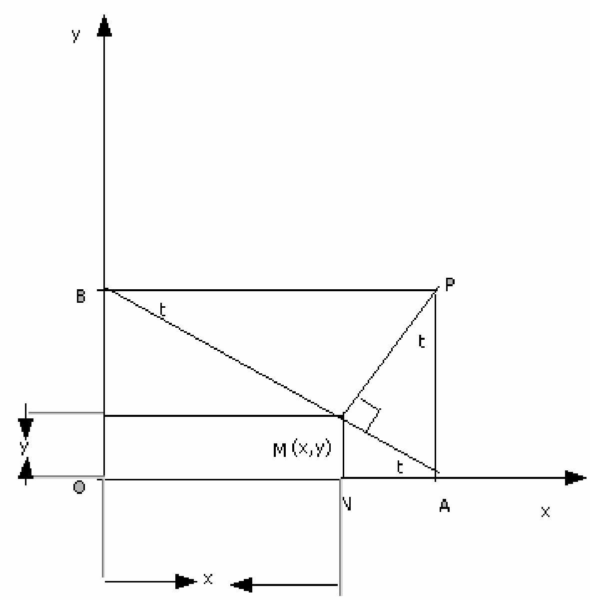
$$x\in\left[-\sqrt{b^2+a^2}, -\sqrt{b^2-a^2}\right]\cup\left[\sqrt{b^2-a^2}, \sqrt{a^2+b^2}\right]$$

Graficul ovalului are forma interioară din panoul programului.

- TEMA 2 : ASTROIDA

Astroida poate fi descrisă in două moduri:

1. Traiectoria unui punct de pe un cerc care se rostogoleşte fără alunecare pe partea interioară a unui alt cerc, raza cercului care se rostogoleşte fiind egală cu un sfert din raza cercului fix pe care el se rostogoleşte.
2. Un dreptunghi la care două din laturi coincid cu axele de coordonate se deformează în aşa fel încât diagonala lui îşi păstrează o lungime constantă egală cu a. Din vârful dreptunghiului opus originii coordonatelor se coboară o perpendiculară pe diagonala lui originea fiind un vârf al dreptunghiului. Dreptunghiul deformându-se piciorul acestei perpendiculare descrie o curba numită astroida. Urmând definiția 2 se poate scrie ecuația parametrică a astroidei:



$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

Graficul se obține în panoul calculatorului

Prin adunarea relațiilor se elimină parametrul real t,obținându-se astfel ecuația carteziană a astroidei:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\ ,\ a>0$$

respectiv ecuația explicită a astroidei:

$$y = \pm\sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2}\right)^3}\ , x \in [-a, a]$$

Derivata întâi a funcției asociate este:

$$f'(x) = -\frac{\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}, x \in [-a,0) \cup (0, a]$$

cu $f'(x) < 0, \forall x \in (0, a]$

Derivata a doua este:

$$f''(x) = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}, x \in (-a,0) \cup (0, a)$$

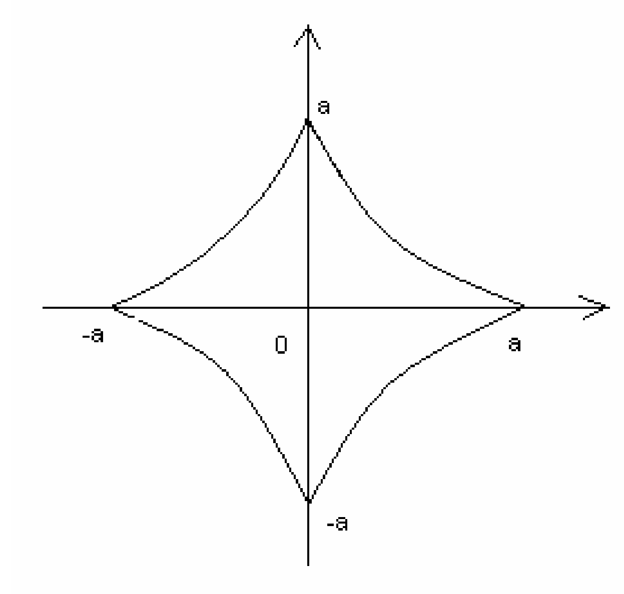
unde $f''(x) > 0, \forall x \in (-a,0) \cup (0, a)$

Datorită proprietății de simetrie a astroidei este suficient să studiem porțiunea de astroidă cuprinsă în cadranul I de ecuație

$$y = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2}\right)^3}\ ,\ x \in [0, a].$$

x	[0	a]
f'(x)	I -∞ -	-0
f''(x)	I +	I
f(x)	[a ↘ ∪ ↘ ∪ ↘ ∪	0]

Graficul funcției f completat cu simetriile față de axele de coordonate se obține graficul astroidei:



- TEMA 3: SPIRALA LUI ARHIMEDE

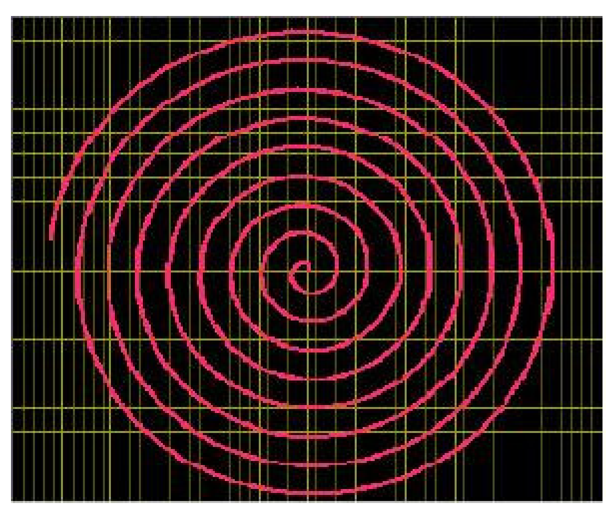
Arhimede, matematician şi astronom, s-a nascut la Siracuza, în Sicilia (287-212 i. Hr.). Spirala lui Arhimede este o curbă plană descrisă de un punct ce parcurge uniform cu viteza v o dreaptă care se rostogoleşte cu viteza constantă w în jurul unui punct fix al ei.

Coordonatele parametrice ale spiralei lui Arhimede :

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$

Coordonatele polare ale spiralei lui Arhimede sunt $r = a \cdot \alpha$ unde $a = \frac{v}{w}$.

Graficul spiralei lui Arhimede este curba din panoul programul LabVIEW.



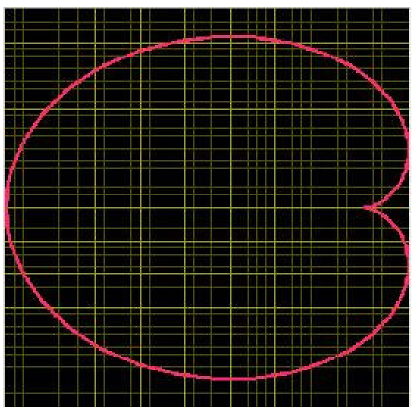
- TEMA 4: CARDIOIDA (din limba greaca kardia "inima, eidos = aspect infățișare

Cardioida este o curbă plană descrisă de un punct dat al unui cerc care se rostogoleşte fără alunecare pe un cerc fix, exterior şi de aceeaşi rază, iar a = diametrul cercului mobil.Ecuația polară a cardioidei este:

$$r = a(1+\cos\alpha)$$

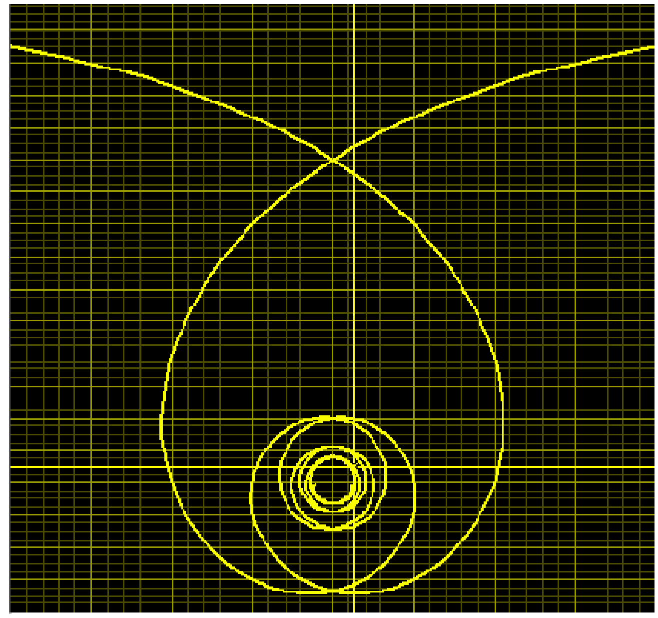
Polul fiind punctual de întoarcere al cardioidei (originea axelor)

r =masa polara



TEMA 5: SPIRALA HIPERBOLICĂ

Spirala hiperbolică este curba de ecuație polară r =a/ α unde a = constantă. Spirala hiperbolică este transformată prin inversiune în raport cu golul spiralei lui Arhimede.



BIBLIOGRAFIE

[1] Marius Munteanu, Bogdan Logofatu – "Instrumentatie virtuala-Labview" Ed. Credis 2003

[2] Marius Munteanu, Bogdan Logofatu "Aplicatii la instrumentatie virtuala – Labview". Ed. Credis 2003

[3] Tom Savu – Internet "Clubul Utilizatorilor Labview – http://www.lsbssmn.pub.ro/clublv.htm

http://www.ctanm.pub.ro/academic/LabVIEW/Tutorial.htm

[4] O.N. ȚUBERBILLER :

- probleme şi exerciții de geometrie analică