

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR

en spécialité de

**PRODUCTIQUE : AUTOMATIQUE & INFORMATIQUE
INDUSTRIELLE**

par

Ludovic KOEHL



**CONCEPTION ET REALISATION D'UN
ESTIMATEUR DE DIMENSION FRACTALE PAR
UTILISATION DE TECHNIQUES FLOUES**

Soutenue le 5 janvier 1998 devant la commission d'examen :

- | | |
|------------------------------|--|
| MM. C. VASSEUR | Président et Directeur de Recherche |
| H. EMPTOZ | Rapporteur |
| M. RENNER | Rapporteur |
| P. BORNE | Examineur |
| J.M. CASTELAIN | Examineur |
| Mme A.M. JOLLY-DESODT | Examinatrice |
| M. X. ZENG | Co-Directeur de Recherche |

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été préparée au Laboratoire de GENie et Matériaux TEXtiles (GE.M.TEX) de l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles de ROUBAIX (E.N.S.A.I.T), sous la Direction de Monsieur Christian VASSEUR, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de LILLE. Je tiens à le remercier pour toute l'attention qu'il n'a cessé de me prodiguer au cours de ces trois années.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur Xianyi ZENG, Maître de Conférences à l'E.N.S.A.I.T, pour l'intérêt de tous les instants qu'il a porté à mon étude. Je le remercie, tout particulièrement, pour sa disponibilité et plus encore pour sa compétence qu'il s'est efforcé de me faire partager.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Hubert EMPTOZ, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de LYON (I.N.S.A - LYON), pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter au jugement de ce travail en acceptant d'être l'un de mes rapporteurs.

Je remercie Monsieur Marc RENNER, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure des Industries Textiles de MULHOUSE (E.N.S.I.T.M), pour l'honneur qu'il me témoigne en jugeant mon travail en qualité de rapporteur.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monsieur Pierre BORNE, Professeur à l'Ecole Centrale de LILLE, pour avoir accepté de juger le contenu de ce mémoire et pour sa présence parmi les membres du Jury en qualité d'examineur.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur Jean-Marie CASTELAIN, Directeur de l'E.N.S.A.I.T pour avoir accepté d'examiner ce mémoire.

J'adresse toute ma reconnaissance à Madame Anne-Marie JOLLY-DESODT, Maître de Conférences à l'Université des Sciences et Technologies de LILLE, pour l'intérêt qu'elle a témoigné à ces travaux en tant que membre du Jury.

Enfin, je souhaite remercier tout le personnel de l'E.N.S.A.I.T pour l'aide précieuse et le soutien qu'ils m'ont apporté.



SOMMAIRE

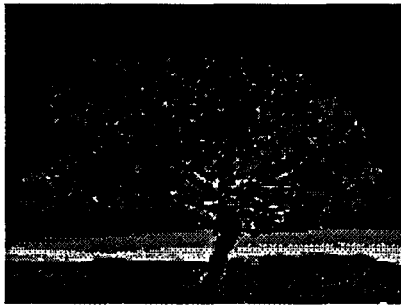
INTRODUCTION GENERALE	1
I. Etude de la Dimension Fractale	5
I.1. Modèle de courbes irrégulières	5
I.2. La dimension fractale dans l'espace de dimension d (noté \mathfrak{R}^d)	10
I.2.1. Définition	10
I.2.2. La dimension fractale dans \mathfrak{R}^2	12
I.2.3. Méthodes existantes de l'estimation de la dimension fractale	13
I.2.3.1. Méthodes classiques	13
I.2.3.1.1. La saucisse de MINKOWSKI	14
I.2.3.1.2. Méthode des boules disjointes	14
I.2.3.1.3. Méthode de dénombrement des boîtes	15
I.2.3.1.4. Méthode du spectre de puissance (FAPS et FAIS)	16
I.2.3.2. Méthodes dérivées	17
I.2.3.2.1. Méthode HSEM	17
I.2.3.2.2. Méthode de variation	18
I.2.3.2.3. Méthode des intersections	19
I.2.3.2.4. Méthode de rééchelonnement	20
I.2.4. Limites des méthodes existantes	20
I.2.4.1. Valeur réelle de la dimension fractale	20
I.2.4.2. La résolution	21
I.2.4.3. Dispersion des points dans le plan Log-Log	21
I.2.4.4. Choix de la suite $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.	22
I.2.4.5. Tendence de la courbe	22
I.2.4.6. Complexité des méthodes	23
I.2.5. Génération de courbes fractales	23
I.2.5.1. Le mouvement brownien fractionnaire (FBM) [GOU-92]	23
I.2.5.2. La fonction de WEIERSTRASS-MANDELBROT (WM)	24
I.2.5.3. Fonctions auto-affines	25
I.2.5.4. Courbes fractales de TAKAGI	25
II. Méthode proposée pour l'estimation de la dimension fractale	27
II.1. Choix d'une méthode d'estimation	27
II.2. Etape de pondération	29

II.2.1. Les erreurs stochastiques	29
II.2.2. Variation de la taille de la plus grande boîte.	30
II.2.3. Variation du nombre de points	32
II.3. Etape de l'approximation	34
II.3.1. La théorie des ensembles flous	34
II.3.2. Les Contrôleurs en Logique Floue (C.L.F)	37
II.3.3. Définitions des variables d'entrées	40
II.3.3.1. La DENSité (DENS)	41
II.3.3.2. Le Degré de Rugosité et la taille de la fenêtre (RD et SW)	42
II.3.3.3. L'échantillonnage (Q)	45
II.3.3.4. Domaine de variation de la courbe (R)	45
II.3.3.5. Corrélation des entrées	46
II.3.4. Définition de la sortie du Contrôleur en Logique Floue	48
II.3.5. Génération des règles floues	49
II.3.6. Interface de fuzzification	54
II.3.6.1. Les fonctions d'appartenance	54
II.3.6.2. Mécanisme d'inférence flou	57
II.3.7. Interface de défuzzification	58
III. Optimisation	61
III.1. Introduction	61
III.2. L'algorithme génétique	62
III.2.1. Le codage	63
III.2.2. La sélection	63
III.2.3. La reproduction	64
III.2.3.1. La recombinaison	64
III.2.3.2. La mutation	65
III.3. Méthode de décomposition du modèle flou en structure hiérarchique	66
III.3.1. Série de Contrôleurs en Logique Floue à deux entrées	67
III.3.1.1. Construction de la structure hiérarchique	68
III.3.1.2. Minimisation de la perte d'informations	69
III.3.2. Série de Contrôleurs en Logique Floue à trois entrées	71
III.4. Optimisation des fonctions d'appartenance	74
III.4.1. Paramètres de sensibilité des fonctions d'appartenance	74
III.4.1.1. Codage du paramètre de sensibilité	76
III.4.1.2. Fonction d'évaluation	79
III.4.2. Choix de la forme des fonctions d'appartenance	79

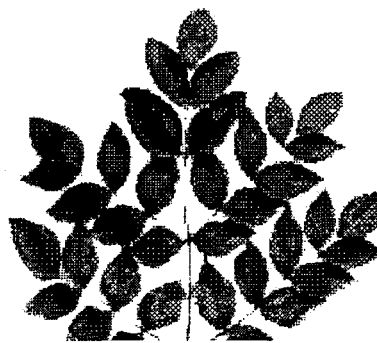
IV. Simulation	85
IV.1. Résultats de l'étape de pondération	87
IV.1.1. Optimisation des fonctions trapézoïdales des facteurs de pondération μ_i et γ_i	87
IV.1.2. Sortie de l'étape de pondération (De_1)	88
IV.2. Validation de la décomposition du modèle flou en structure hiérarchique	90
IV.3. Résultats de l'étape d'approximation	92
IV.3.1. Résultats du modèle flou simple	92
IV.3.2. Comparaison des modèles flous décomposés	96
IV.3.3. Analyse des résultats	99
V. Application	100
V.1. La fibre de laine	100
V.2. Technique expérimentale	102
V.2.1. Etude de la topographie	102
V.2.2. Principe de l'A.F.M. [POR-91][PAS-94]	103
V.3. Estimation de la dimension fractale de la fibre de laine	104
V.3.1. Mode opératoire	104
V.3.2. Résultats	105
V.3.2.1. Extraction des données	105
V.3.3. Analyse des résultats	109
CONCLUSION GENERALE	110
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	112
ANNEXE A	118
ANNEXE B	121
ANNEXE C	124

INTRODUCTION GENERALE

Dans le cadre de la modélisation des phénomènes de capillarité dans le procédé d'encollage d'un fil de polyéthylène téréphtalate, une caractérisation des interstices délimités par les monofilaments de coupes transversales du fil ont été rendues nécessaires. Les équations de la mécanique des fluides, appliquées aux coupes successives par le suivi de la surface offerte au liquide, permettent de quantifier l'emport de colle par le fil et de participer au suivi de qualité de la production. Afin de mieux caractériser les interstices, nous avons pris conscience que de nombreuses formes naturelles présentent une structure fractale, jusque dans la distribution des interstices dans la coupe transversale du fil. Le concept de géométrie fractale fournit en effet un cadre solide pour l'analyse des phénomènes naturels complexes. Prenons l'exemple de l'arbre représenté ci-dessous :



ARBRE



BRANCHE



FEUILLE

A différents niveaux de résolution, une homothétie interne se dessine. Les agrandissements successifs au niveau de la branche et de la feuille demeurent similaires à l'image initiale. Ceci rapproche la géométrie fractale des objets naturels, même si ces derniers ne sont pas de vraies fractales, puisqu'ils ne sont pas infiniment complexes.

La microscopie est largement utilisée dans l'étude de la morphologie des matériaux et trouve une application toute particulière dans le domaine textile pour caractériser la morphologie des fibres. Les vues longitudinales au microscope optique mettent en évidence la structure en écaille des fibres de laine. Cette même structure se reproduit à l'identique lorsque la même fibre est observée à une échelle plus fine, échelle d'observation rendue possible grâce au microscope à force atomique. Ces phénomènes de répétition à différentes échelles nous suggèrent d'utiliser les méthodes de la géométrie fractale pour analyser et caractériser les surfaces de la fibre de laine. L'objet de notre étude est de développer un estimateur de la dimension fractale.

Qu'est-ce que la dimension fractale?

La fin des années 1970 a vu se développer la notion de géométrie fractale dans de nombreux domaines de la physique. Le concept de géométrie fractale et le terme même de "fractal" (dérivé du verbe latin «frangere», c'est à dire «briser») ont été introduits par B.B. MANDELBROT [MAN-77]. A la façon dont le définit MANDELBROT, un objet fractal est un ensemble qui présente des irrégularités à toutes les échelles, c'est à dire des convolutions qui nous empêchent de définir une tangente unique en un point lorsque l'on change d'échelle. L'étude de la géométrie fractale nous permet une meilleure compréhension des systèmes naturels complexes, lesquels présentent des caractéristiques fractales [KEL-87]. La notion de géométrie fractale est étroitement liée aux propriétés d'invariance par changement d'échelle : une structure fractale se reproduit identiquement à elle-même qu'elle soit vue de près comme de loin. Ces phénomènes de similitude interne et d'invariance d'échelle existent partout à l'état naturel. Depuis la publication du premier livre de MANDELBROT sur la géométrie fractale [MAN-68], ce concept a été largement utilisé pour caractériser le comportement des systèmes chaotiques [PAR-89], pour définir des modèles d'objets naturels [MAN-83]. Il a été aussi utilisé dans le vaste domaine de l'analyse d'image [BLA-93] comme technique de compression des données [BAR-88], comme méthode de segmentation [PEN-84][VAS-94][CHA-95] ou encore pour la classification [LEV-89]. Il existe un ensemble de paramètres permettant de caractériser la géométrie fractale, parmi lesquels la dimension fractale est la plus importante. Les points, les segments et les disques ont respectivement une dimension fractale de zéro, un et deux. Mais entre tous ces objets réguliers, il existe tout un ensemble d'objets complexes, irréguliers dont la dimension fractale est non entière et peut être intuitivement rapprochée de leur irrégularité. A titre d'exemple, la dimension fractale d'une courbe est une valeur non entière, comprise entre un et deux. Cette notion peut être étendue aux surfaces qui présenteront une dimension fractale comprise entre deux et trois.

Cette dimension, qui est une généralisation de la dimension euclidienne, peut servir à comparer la complexité de deux courbes ou bien de deux surfaces et ceci nous permet de mesurer toute l'importance que revêt l'étude de la dimension fractale dans de nombreux domaines d'applications. Dans la science des matériaux, par exemple, la dimension fractale est directement reliée à la rugosité et ses applications fondamentales se trouvent dans la

stéréologie, la technologie des poudres, la géologie et la métallurgie. Les champs d'application sont loin d'être exhaustifs.

Il existe plusieurs définitions de la dimension fractale d'un objet. Ces définitions sont équivalentes dans l'espace continu. En revanche, lorsque les objets sont plongés dans des espaces discrétisés, l'échantillonnage résultant conduit à des algorithmes et des résultats différents pour l'estimation de la dimension fractale. Lequel de ces algorithmes est robuste, rapide et conduit à la meilleure précision? Les performances de ces algorithmes sont exposées dans la littérature.

Le problème de la rapidité de la méthode, et de sa précision, est d'autant plus crucial qu'en général on dispose que de peu de points expérimentaux, alors que la dimension fractale est définie comme la limite d'une suite à l'infini. Dès lors, les algorithmes doivent pouvoir conclure quant au caractère fractal de l'objet, même en présence d'un nombre réduit de points de mesure. L'hypothèse, suivant laquelle, on se trouve face à un phénomène fractal peut se discuter suivant le sens que l'on donne à cette notion. Toutefois l'existence d'une dimension de l'objet mathématique ne se discute pas. Tout objet mathématique a une dimension.

Contribution de notre approche

Les méthodes d'estimation de la dimension fractale sont testées à partir d'objets mathématiques théoriques ayant des dimensions fractales connues. Notre étude s'attache à définir une méthode suffisamment robuste pour estimer avec le maximum de précision la dimension fractale de courbes. Dans le premier chapitre, nous présentons des méthodes d'estimation de la dimension fractale de courbes. Cependant, elles montrent rapidement leurs limites. Une étude fine respectivement de leurs points forts et de leurs points faibles, nous a permis de définir une nouvelle méthode optimale d'estimation, conciliant à la fois précision, rapidité et lisibilité. Une bonne lisibilité concerne la maîtrise des relations entre les données en amont caractérisant la courbe étudiée et la sortie en aval de la dimension fractale estimée. Ces critères sont remplis par le développement d'une méthode hybride combinant la logique floue et l'algorithme génétique. La composante floue de notre méthode est présentée dans le chapitre II. La logique floue est une approche empirique basée sur des essais. Elle s'adapte particulièrement bien aux problèmes ou aux applications complexes de nature intuitive ou descriptive. Couplée à l'algorithme génétique, qui permet de rechercher des solutions quasi-optimales simultanément dans l'espace de solutions potentielles, elle devient un outil efficace dans de nombreuses

applications [ZAD-94][MUN-94]. Toutefois, les relations établies entre les caractéristiques des courbes fractales et la dimension fractale estimée sont si complexes que le modèle flou initial peut être amélioré d'une part par le choix optimal de ses paramètres et d'autre part au niveau de sa structure interne afin de garantir les critères de précision, de rapidité et de lisibilité. C'est la raison pour laquelle dans le troisième chapitre nous présentons une méthode permettant d'optimiser les résultats obtenus par le modèle flou. Cette méthode utilise l'algorithme génétique. Ainsi le couplage logique flou-optimisation par algorithme génétique fournit un outil particulièrement efficace d'optimisation.

Après avoir testé la méthode dans le chapitre IV sur des objets fractals simulés, nous proposons dans le dernier chapitre d'appliquer cette méthode à l'étude de la dimension fractale d'une fibre naturelle de laine, observée dans le sens de sa croissance sur le dos du mouton à différentes échelles. Les différentes unités de mesure parcourront de l'échelle macroscopique jusqu'à l'échelle microscopique.

CHAPITRE I

ETUDE DE LA DIMENSION FRACTALE

I. ETUDE DE LA DIMENSION FRACTALE

I.1. Modèle de courbes irrégulières

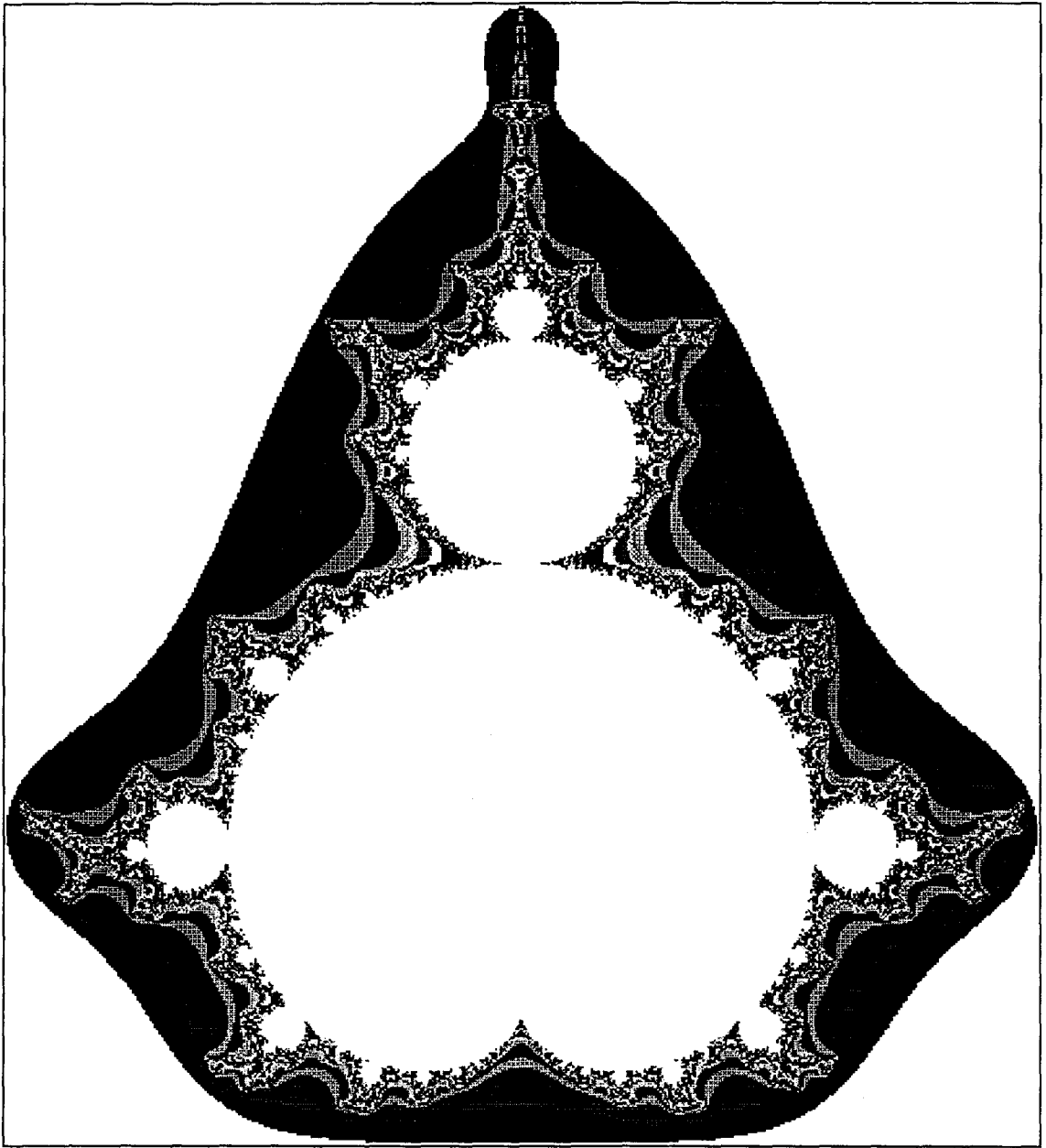
En nous limitant aux courbes planes définies par deux fonctions paramétriques continues $x(t)$ et $y(t)$, la courbe est irrégulière si la dérivée de l'une des fonctions n'existe à peu près nulle part. De tels objets ont été inventés dès la fin du XIX^{ième} siècle par des mathématiciens comme CANTOR, PEANO ... La Figure I-1 représente l'ensemble de MANDELBROT dans le plan complexe qui correspond à l'ensemble des points complexes C tels que [IND-90] :

$$\begin{cases} z_0 & \text{premier terme de la suite} \\ z_{k+1}^2 = z_k^2 + C & \text{récurrence} \end{cases} \quad (\text{éq. I-1})$$
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} z_k = l$$

avec l limite finie et $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ suite complexe récurrente

(\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels)

Il est très aisé de construire des courbes fractales en utilisant un processus récurrent composé d'un initiateur et d'un générateur. La Figure I-2 nous montre les trois premières itérations de la courbe triadique de VON KOCH (1904). La Figure I-3 représente l'ensemble de CANTOR obtenu en éliminant itérativement le tiers central de chaque segment.



**Figure I-1 : Ensemble de MANDELBROT dans le plan complexe avec $z_0 = 0 + i \times 0$
défini par (éq. I-1)**

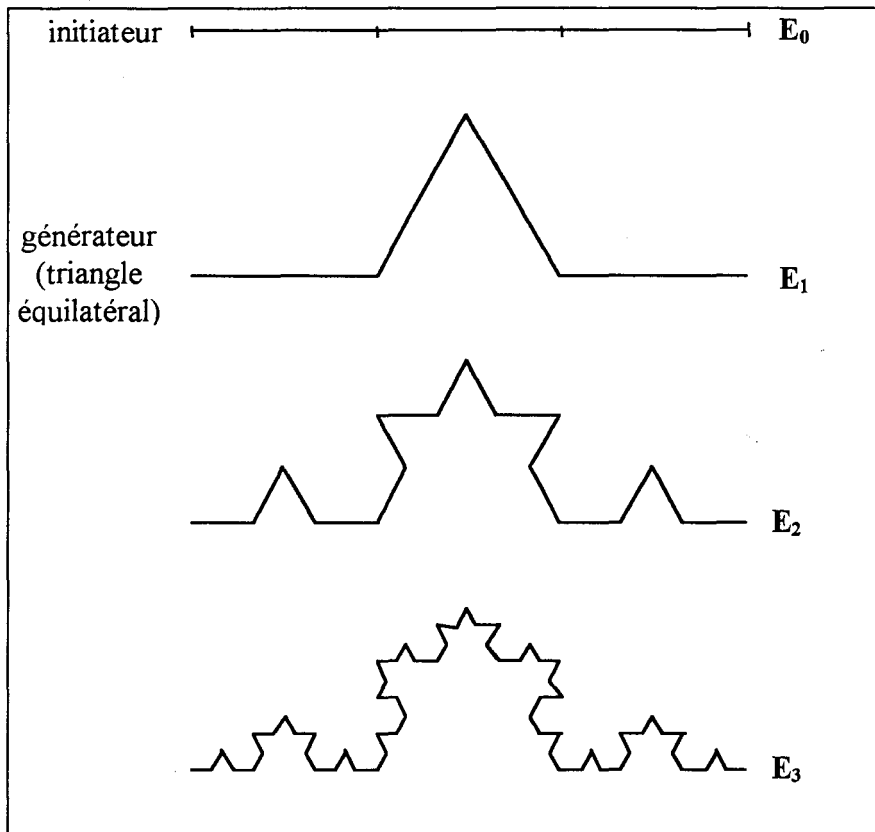


Figure I-2 : Trois premières itérations de la courbe de VON KOCH

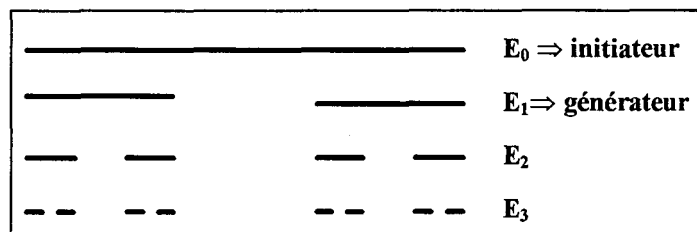


Figure I-3 : Trois premières générations de l'ensemble de CANTOR

Pour la courbe de VON KOCH, si le segment est de longueur L , à la première itération ($n = 1$), les segments de base auront pour longueur $\varepsilon_1 = L/3$ et la longueur de la courbe sera $\Gamma_1 = 4 \cdot \varepsilon_1$. A la seconde itération ($n = 2$), $\varepsilon_2 = L/3^2$ et $\Gamma_2 = 4^2 \cdot \varepsilon_2$. Finalement à la n -ième itération, $\varepsilon_n = L/3^n$ et $\Gamma_n = 4^n \cdot \varepsilon_n$. On peut, en éliminant n , exprimer la longueur de la courbe en fonction de l'unité de mesure ε_n et on obtient :

$$\Gamma_n = \varepsilon_n \cdot \left(\frac{L}{\varepsilon_n} \right)^D = L^D \cdot \varepsilon_n^{1-D}$$

où le rapport $\left(\frac{L}{\varepsilon_n}\right)^D$ représente le taux de croissance de la longueur de la courbe.

Dans le cas particulier de la courbe de VON KOCH : $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} > 1 ; 1 \leq D \leq 2$.

Pour une unité de longueur fixée ε_n , la longueur de la courbe croît comme une puissance de D . On peut, par ailleurs, remarquer que la longueur de la courbe diverge lorsque ε_n tend vers zéro ($D-1 < 1$). Pour une itération donnée, la courbe obtenue n'est pas une fractale mais, selon la dénomination de MANDELBROT, une préfractale [GOU-92]. En effet, une fractale est l'objet mathématique obtenu comme limite de la suite des préfractales quand le nombre d'itérations n tend vers l'infini (bien généralement, on confond les deux terminologies). La fractale obtenue est une courbe continue, dont la longueur diverge lorsque l'échelle d'observation diminue et qui n'est dérivable presque nulle part (points anguleux). Il existe deux types de construction de fractales. La première méthode, par auto-similarité, que l'on vient de décrire ci-dessus avec la courbe de VON KOCH et l'ensemble de CANTOR. Elle confère une propriété remarquable à l'objet fractal. A des translations, rotations et homothéties (échelle de résolution) près, on retrouve toujours le même motif élémentaire (générateur). Ici, une propriété quantitative peut être mise en évidence : la dimension fractale comme quantificateur de l'irrégularité.

La seconde méthode concerne une construction par auto-affinité. Une structure invariante par une loi d'échelle différente suivant les différents axes est appelée auto-affine.

Pour une structure régulière $f(x)$ du plan $\{x, f(x)\}$, si on considère l'intervalle $\Delta x = 1$ correspondant à une variation verticale $\Delta f(x) = 1$, un changement Δx en $\lambda \cdot \Delta x$ transforme $\Delta f(x)$ en $\lambda \cdot \Delta f(x)$.

Pour une structure auto-affine, le changement d'échelle en $\lambda \cdot \Delta x$ transforme $\Delta f(x)$ en $\lambda^H \cdot \Delta f(x)$ avec H différent de un, soit :

$$\forall x \in D_f, f(\lambda x) = \lambda^H f(x) - f \text{ est une fonction auto-affine} \quad (\text{éq. I-2})$$

avec $H \neq 1$ et D_f : domaine de définition de f .

On montre que la dimension fractale d'une telle courbe est égale à $2-H$ [GOU-92]. Par exemple en considérant un générateur, tel que celui représenté à la Figure I-4, et en faisant un choix de $\lambda=1/5$ et $\lambda^H=1/3$, on peut construire la fractale déterministe en découpant l'axe des abscisses et des ordonnées respectivement en 5 et 3 parties égales, puis chaque segment d'un

rectangle et remplacé par la ligne brisée formée de 5 nouveaux segments. On fait correspondre les extrémités de chacun des nouveaux segments (Figure I-5).

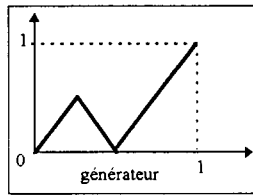


Figure I-4 : Exemple de générateur d'une courbe déterministe auto-affine

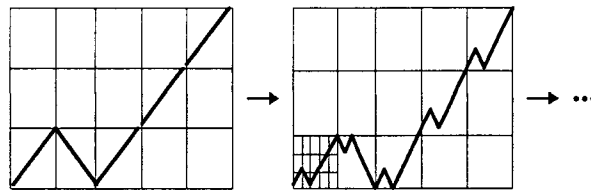


Figure I-5 : Construction d'une courbe auto-affine

La dimension fractale de telles courbes évolue dans l'intervalle $[1, 2]$, tout dépend de leur propension à remplir le plan. Plus la dimension s'approche de 1 et plus elle présente une allure régulière. Au contraire, l'allure de la courbe devient très perturbée pour une dimension qui tend vers 2. Dans ce cas, elle a tendance à occuper tout le plan. On peut noter que la courbe définie ci-dessus ne possède pas de point double. Cependant, comme le note MANDELBROT [MAN-89], il n'en est pas nécessairement de même si l'on pousse la même construction, dans l'espoir d'obtenir une grande valeur de la dimension (très proche de la valeur 2). La courbe correspondante a inéluctablement une infinité de points doubles. Nous avons tracé les courbes, définies par le générateur de la Figure I-4, correspondant à des valeurs croissantes de dimension fractale (Figure I-6, Figure I-7 et Figure I-8). Les figures mettent en évidence que l'irrégularité de la courbe augmente avec la dimension fractale D . H représente le coefficient de Hurst [HUR-92]. Il relie la dimension fractale D d'un objet à la dimension topologique \dim_t de l'espace (définie dans la section I.2.1.) dans lequel est plongé l'objet par la relation :

$$H = \dim_t + 1 - D$$

Pour les courbes, $\dim_t = 1$ et par voie de conséquence

$$D = 2 - H. \tag{éq. I-3}$$

Ce coefficient H varie dans l'intervalle $[0, 1]$. Une valeur faible de H correspond à une courbe présentant une forte irrégularité et réciproquement pour une valeur de H tendant vers la valeur 1.

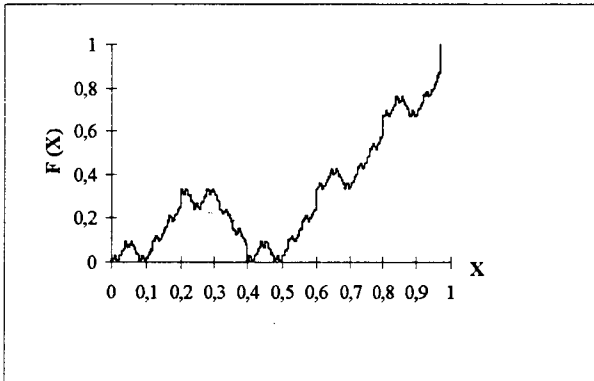


Figure I-6 : Fonction F auto-affine, définie à la Figure I-5, pour $H = 0,80$ ($D = 1,20$)

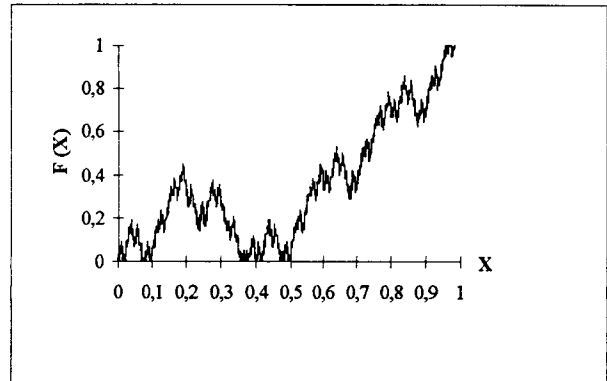


Figure I-7 : Fonction F auto-affine, définie à la Figure I-5, pour $H = 0,50$ ($D = 1,50$)

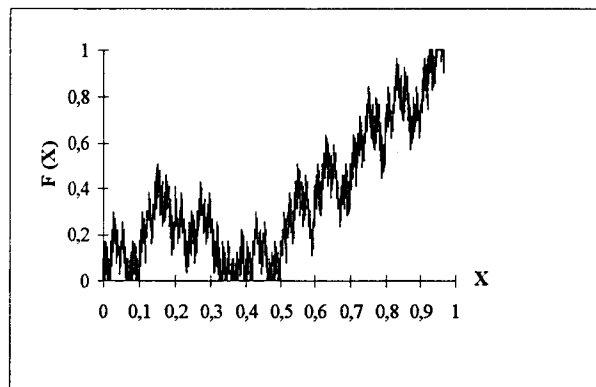


Figure I-8 : Fonction F auto-affine, définie à la Figure I-5, pour $H = 0,30$ ($D = 1,70$)

I.2. La dimension fractale dans l'espace de dimension d (noté \mathcal{R}^d)

I.2.1. Définition

Considérons un sous-espace E de \mathcal{R}^d ($E \subset \mathcal{R}^d$) avec d la dimension finie de l'espace. \mathcal{R} désigne l'ensemble des réels. Sur l'espace métrique (E, d) , on définit deux notions de dimension [CHE-91] :

- la dimension topologique (dim_t) qui peut intuitivement s'interpréter comme le nombre minimal de paramètres nécessaire pour décrire le système physique (pour une courbe $\text{dim}_t = 1$ et pour une image $\text{dim}_t = 2$),
- la dimension de HAUSDORFF (D_H), qui est le plus petit nombre réel positif ou nul pour lequel on puisse faire des mesures non nulles sur le système. Formellement, elle est définie de la façon suivante :

$$M_\alpha(E, \varepsilon) = \inf_\alpha \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \|B_n\|^\alpha \text{ tel que } E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \text{ et } \|B_n\| \leq \varepsilon \right\} \quad (\text{éq. I-4})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\alpha(E, \varepsilon) = M_\alpha(E)$$

où $M_\alpha(E)$ est la mesure α -dimensionnelle de HAUSDORFF de \mathcal{R}^d .

$\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathcal{R}^d ,

$\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'hyperboules de \mathcal{R}^d de diamètre inférieur ou égal à ε (réel strictement positif).

$M_\alpha(E, \varepsilon)$ étant une fonction croissante de ε , $M_\alpha(E)$ existe et la dimension $D_H(E)$ de HAUSDORFF est égale à α .

On peut également définir une autre dimension, dite de BOULIGAND-MINKOWSKI, que l'on note D_{BM} . Cette dimension est plus communément utilisée [GOU-92]. Considérons le sous-espace E , toujours plongé dans l'espace euclidien de dimension d . Soit $E(\varepsilon)$ l'ensemble des points de E distants de moins de ε de E . $E(\varepsilon)$ définit une "saucisse de MINKOWSKI", également appelée, en analyse d'image (dans \mathcal{R}^2), dilatation ou épaissement de E . L'ensemble E est dilaté par des hyperboules $B_\varepsilon(x)$ centrées en x ($x \in E$) de rayon ε . Formellement, D_{BM} est définie de la façon suivante :

$$D_{BM}(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(d - \frac{\ln \text{Vol}_d(E(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)} \right) \quad (\text{éq. I-5})$$

avec $E(\varepsilon) = \{y, y \in B_\varepsilon(x), x \in E\}$ et $B_\varepsilon(x) = \{y : \|y-x\| \leq \varepsilon, y \in \mathcal{R}^d\}$

où Vol_d représente le volume en dimension d (par exemple une surface en dimension 2)

Pour prendre un exemple très simple, si on dilate un segment de longueur L avec un disque ou une boule de rayon ε (Figure I-9) alors :

$$\text{Vol}_2 = 2\varepsilon L + \pi\varepsilon^2 \text{ pour } d = 2 \quad (\text{éq. I-6})$$

$$\text{Vol}_3 = \pi \varepsilon^2 L + (4/3)\pi \varepsilon^3 \text{ pour } d = 3$$

si bien qu'en négligeant l'ordre supérieur en ε , Vol_d devient équivalent à ε^{d-1} .

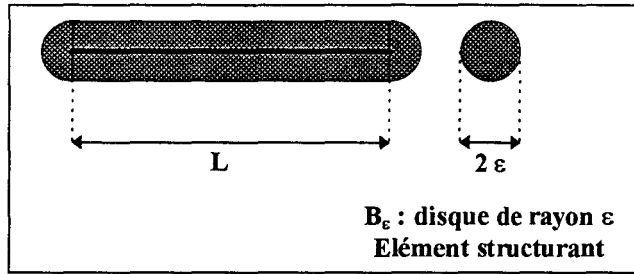


Figure I-9 : Segment L dilaté par un disque B_ε ($d = 2$) de rayon ε

On a montré que ces deux notions de dimension au sens de HAUSDORFF (D_H) et de BOULIGAND-MINKOWSKI (D_{BM}) convergent vers la même limite D (dimension fractale). Elles diffèrent par la façon dont elles convergent [FAL-90].

I.2.2. La dimension fractale dans \mathcal{R}^2

Dans notre étude, nous nous bornerons à l'analyse de fonctions d'une variable réelle, continues sur leur domaine de définition. Ce domaine sera un intervalle borné. L'hypothèse de continuité est cruciale pour la validité de nos résultats et elle est parfaitement bien adaptée à la modélisation de phénomènes naturels qui présentent des courbes irrégulières (rugueuses). Les termes de courbes, séries temporelles et courbes mono-dimensionnelles feront toujours référence à la représentation graphique E de la fonction f dans le plan sur son domaine de définition D_f .

$$\begin{aligned} f: \quad D_f &\rightarrow \mathcal{R} \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

$$E = \{ (x, f(x)) : x \in D_f \}$$

Le but de notre étude sera d'estimer la dimension fractale de E à partir d'un ensemble de points. Dans \mathcal{R}^2 , la dimension fractale est comprise dans l'intervalle $[1, 2]$. A partir de l'équation (éq. I-5), pour $d = 2$, on peut montrer que D_{BM} a l'expression suivante :

$$D_{BM}(E) = \alpha \text{ tel que } \varepsilon^{\alpha-2} \cdot \text{Vol}_2(E(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1 \quad (\text{éq. I-7})$$

La dimension de BOULIGAND-MINKOWSKI (D_{BM}) est la plus petite puissance α pour laquelle le terme $\varepsilon^{\alpha-2} \cdot \text{Vol}_2(E(\varepsilon))$ tend vers un lorsque ε tend vers zéro. Si nous formulons l'hypothèse que $\varepsilon^{\alpha-2} \cdot |\text{Vol}_2(E(\varepsilon))|$ ne dépend pas de ε , nous obtenons la relation linéaire :

$$\ln \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \text{Vol}_2(E(\varepsilon)) = D_{\text{BM}}(E) \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon} + c \quad (\text{éq. I-8})$$

avec une constante c

I.2.3. Méthodes existantes de l'estimation de la dimension fractale

I.2.3.1. Méthodes classiques

La dimension de BOULIGAND-MINKOWSKI (cf. section I.2.1.) fait apparaître $E(\varepsilon)$ comme l'ensemble de tous les disques centrés sur E de rayon ε . En fait l'équation (éq. I-5) peut être généralisée. L'élément de recouvrement (élément structurant) peut être remplacé par toute autre forme géométrique dont le volume est de l'ordre de ε . Toutes ces méthodes donnent la même dimension fractale D , lorsqu'elle existe, dans la mesure où les courbes sont plongées dans un espace euclidien de dimension finie [FAL-90].

Pratiquement la dimension fractale est estimée à partir de l'équation (éq. I-8). On définit une suite de termes ε_k strictement décroissante tendant vers 0 lorsque k tend vers l'infini. A partir d'un ensemble fini de points

$$\{(\varepsilon_1, \text{Vol}_2(E(\varepsilon_1))/\varepsilon_1^2), (\varepsilon_2, \text{Vol}_2(E(\varepsilon_2))/\varepsilon_2^2), \dots, (\varepsilon_n, \text{Vol}_2(E(\varepsilon_n))/\varepsilon_n^2)\}$$

que l'on reporte dans le plan $\{-\ln(\varepsilon_k), \ln(\text{Vol}_2(E(\varepsilon_k))/\varepsilon_k^2)\}$, $D_{\text{BM}}(E)$ peut être estimée par la pente de la droite de régression linéaire (moindres carrés). Ce plan est appelé "plan Log-Log" (Figure I-10).

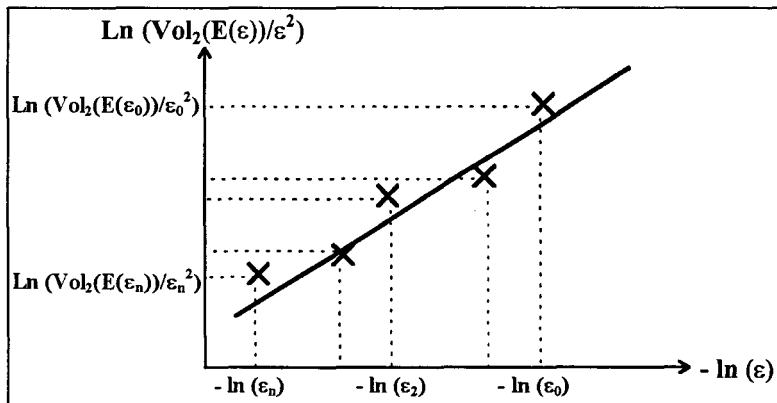


Figure I-10 : Droite de régression linéaire dans le plan "Log-Log"

I.2.3.1.1. La saucisse de MINKOWSKI

C'est la méthode décrite à la section I.2.1. Elle consiste à faire une dilatation de la courbe E (Figure I-11) par un disque B_ϵ de rayon ϵ . La valeur de $\text{Vol}_2(E(\epsilon))$ est donnée par l'aire de la saucisse.

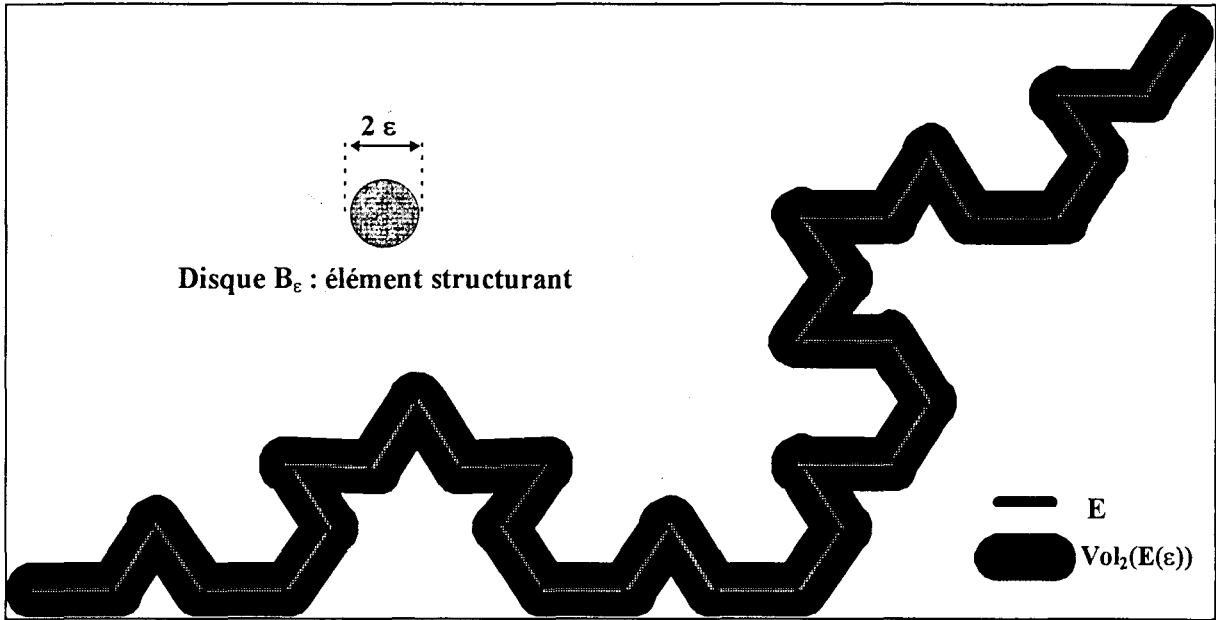


Figure I-11 : Saucisse de MINKOWSKI

C'est une méthode très facile à mettre en œuvre. Des algorithmes rapides ont été développés pour estimer la dimension fractale de la courbe à partir d'opérations morphologiques sur des images [KAN-93]. Toutefois des effets de bords apparaissent qui sont à l'origine d'imprécisions (courbure de la courbe) surtout pour les très petites valeurs de ϵ .

I.2.3.1.2. Méthode des boules disjointes

C'est une méthode très peu utilisée dans la pratique. Il s'agit de recouvrir la courbe E par le maximum de disques B_ϵ disjoints de rayon ϵ (Figure I-12). Elle est très peu utilisée car sa mise en œuvre est lourde. Soit $N(\epsilon)$ ce nombre maximum, la dimension fractale est donnée par

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{|\ln(\epsilon)|} \quad (\text{éq. I-9})$$

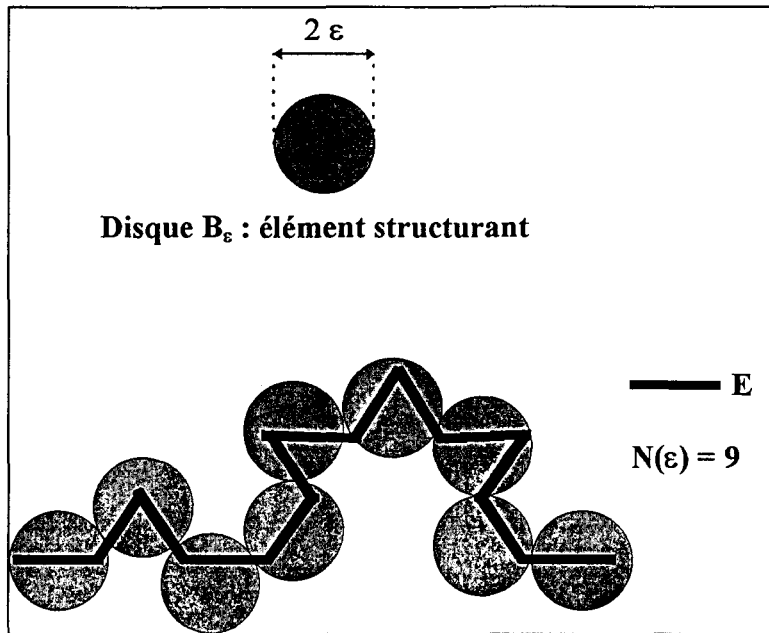
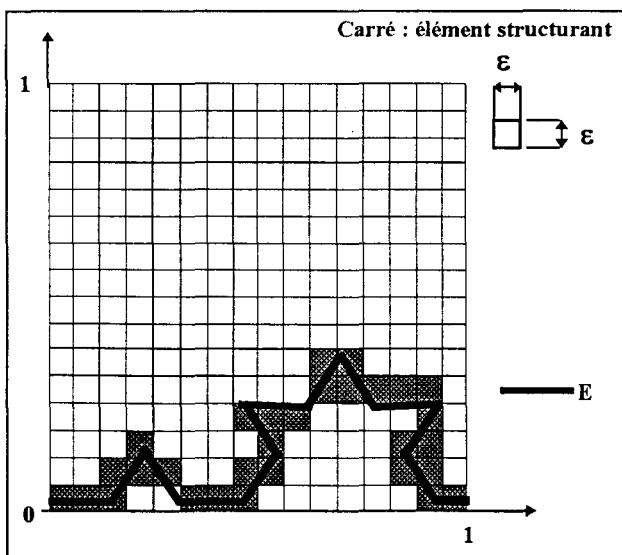


Figure I-12 : Recouvrement par des disques disjoints

I.2.3.1.3. Méthode de dénombrement des boîtes

C'est la méthode la plus fréquemment utilisée. Très simple de mise en œuvre, elle est particulièrement bien adaptée à l'étude des structures auto-affines (cf. section I.1.) et elle peut être utilisée sur n'importe quel ensemble. Elle procède à un découpage de l'espace dans lequel est inscrit la courbe par des carrés de côtés ϵ (Figure I-13). On dénombre les carrés nécessaires $N(\epsilon)$ pour recouvrir E et la dimension fractale est estimée de la même façon que pour la méthode des boules disjointes (éq. I-9).



Pour l'échelle $\epsilon = \frac{1}{16}$ choisie,
le nombre total de carrés est de 16^2
le nombre de carrés recouvrant E est
 $N(\epsilon) = 30$

Figure I-13 : Exemple de la méthode de dénombrement des boîtes

La dimension fractale estimée D_{est} suivant l'équation (éq. I-8) et la méthode des moindres carrés devient alors :

$$D_{\text{est}} = \frac{\sum_{i=0}^n \ln(\varepsilon_i) \cdot \sum_{i=0}^n \ln(N(\varepsilon_i)) - n \cdot \sum_{i=0}^n \ln(\varepsilon_i) \cdot \ln(N(\varepsilon_i))}{n \sum_{i=0}^n \ln^2(\varepsilon_i) - \sum_{i=0}^n \ln(\varepsilon_i) \cdot \sum_{i=0}^n \ln(\varepsilon_i)} \approx D \quad (\text{éq. I-10})$$

I.2.3.1.4. Méthode du spectre de puissance (FAPS et FAIS)

PENTLAND [PEN-84] a proposé une méthode d'évaluation de la dimension fractale d'un signal. La méthode du spectre de puissance (Fractal Analysis from Power Spectrum) est largement utilisée en science des matériaux. Elle exige que la fonction f soit définie sur $[0, +\infty[$, ou tout du moins sur un intervalle de grande longueur. La décomposition spectrale de la fonction, selon les procédés classiques de la théorie du signal est :

$$P_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \left| \int_0^T e^{-i\omega x} f(x) \cdot dx \right|^2 \quad \text{avec } i = \sqrt{-1} \quad (\text{éq. I-11})$$

A partir de l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide (FFT) d'une courbe auto-affine (vérifiant en tout point l'équation (éq. I-2)), on obtient son spectre de puissance, c'est à dire le carré de l'amplitude du module ($P_f(\omega)$) pour une fréquence ω donnée. Dès lors, la dimension fractale est estimée à partir de la pente α de la droite obtenue par régression linéaire dans le plan $\{\ln \omega, \ln(P_f(\omega))\}$ par la relation (éq. I-12).

$$D = (3 - \alpha)/2 \quad (\text{éq. I-12})$$

Il faut préciser que pour utiliser cette méthode, il faut faire l'hypothèse restrictive que la courbe étudiée est bien auto-affine. M. PANCORBO [PAN-94][ANG-93] a proposé une variante de la méthode du spectre de puissance afin de réduire le bruit par intégration du spectre de puissance. L'intégration d'un signal est une technique souvent utilisée afin de réduire les bruits parasites. Cette méthode est dénommée FAIS pour Fractal Analysis from Integrated Spectrum.

I.2.3.2.Méthodes dérivées

I.2.3.2.1.Méthode HSEM

La méthode HSEM (Horizontal Structuring Element Method) a été développée par DUBUC [DUB-89a]. C'est un algorithme directement basé sur la méthode de recouvrement de MINKOWSKI. Nous avons abordé le problème rencontré pour l'estimation de la dimension dû aux effets de bords (on peut le remarquer aux extrémités du segment de longueur L dilaté par la boule de rayon ε de la Figure I-9). Les minima et maxima locaux de la fonction entraînent une perte de précision par la dilatation pour des rayons ε assez grands. L'élément structurant disque est remplacé par un élément structurant horizontal centré sur E et glissant le long de E (Figure I-14). Le segment horizontal étant invariant par des transformations affines, cette méthode est, par conséquent, particulièrement bien adaptée à l'étude de courbes auto-affines. Ici, $\text{Vol}_2(E(\varepsilon))$ correspond à l'aire engendrée par le glissement du segment structurant. Cette aire est non nulle, exceptée si f est une fonction constante. La dimension fractale prend alors la forme (éq. I-13).

$$D = \max \left[1, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \text{Vol}_2(E(\varepsilon))}{\ln \varepsilon} \right] \right] \quad (\text{éq. I-13})$$

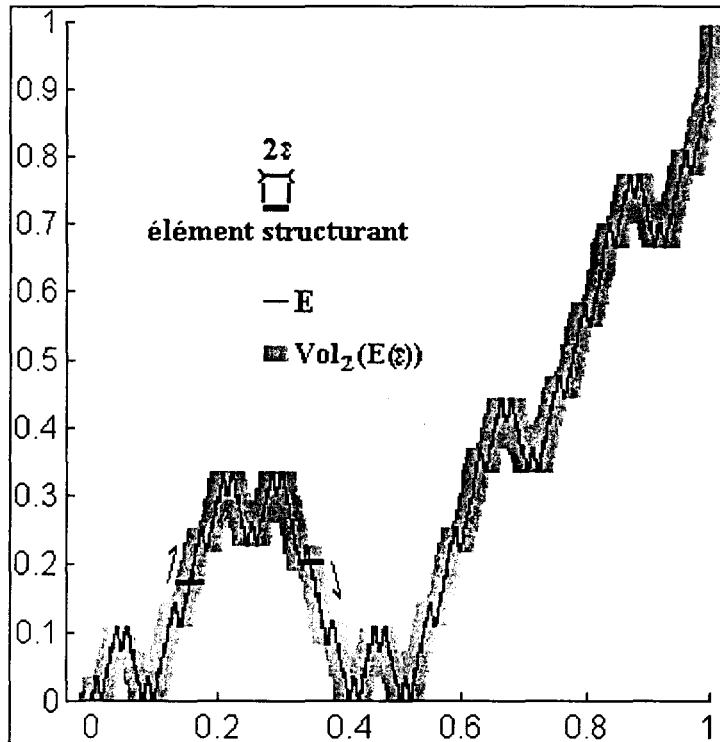


Figure I-14 : Dilatation de la courbe déterministe auto-affine de la Figure I-5 par un segment de longueur 2ε

I.2.3.2.2. Méthode de variation

Mise au point par TRICOT [TRI-86][TRI-88], cette méthode est directement basée sur une propriété des courbes fractales. Pour la courbe E , il existe un intervalle borné D_f sur lequel la fonction f associée n'est presque nulle part dérivable. La limite supérieure de la valeur absolue de la pente entre deux points $(x, f(x))$ et $(x', f(x'))$ de E sur cet intervalle diverge lorsque x' tend vers x . C'est la puissance selon laquelle évolue cette divergence qui détermine la valeur de la dimension fractale. Si l'on considère l'oscillation d'ordre ε notée $v(x, \varepsilon)$ de la fonction f en x par :

$$v(x, \varepsilon) = \sup_{x' \in R_\varepsilon(x)} \{f(x')\} - \inf_{x' \in R_\varepsilon(x)} \{f(x')\}$$

$$\text{avec } R_\varepsilon(x) = \{s \in D_f / |x - s| < \varepsilon\}$$

alors la variation $V(\varepsilon, f)$ d'ordre ε de f est donnée par

$$V(\varepsilon, f) = \text{Vol}_2(E(\varepsilon)) = \int_{D_f} v(x, \varepsilon) \cdot dx$$

On détermine alors la dimension fractale de la même façon qu'en (éq. I-13).

I.2.3.2.3. Méthode des intersections

Cette méthode a été mise au point par TRICOT [TRI-88]. Désignons par m et M les bornes respectivement inférieure et supérieure de f sur son domaine de définition D_f . L_y est la droite horizontale d'ordonnée y . Considérons l'ensemble $E_y = E \cap L_y$ des points d'ordonnées y de E (section de E - Figure I-15). f étant continue, E_y est non vide si et seulement si $m \leq y \leq M$. Dans le cas où E est fractal, E_y est en général un ensemble de CANTOR (Figure I-3). La dimension de cet ensemble est déduit à partir de la saucisse de MINKOWSKI en dimension 1 en considérant sur L_y la réunion de tous les intervalles de longueur 2ε centrés sur E_y :

$$E_{y,\varepsilon} = \bigcup_{x \in E_y} [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \quad (\text{éq. I-14})$$

On calcule alors la longueur $l(y, \varepsilon)$ de $E_{y,\varepsilon}$ et la dimension fractale D_y de E_y est donnée par :

$$D_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\ln(l(y, \varepsilon))}{\ln \varepsilon} \right) \quad (\text{éq. I-15})$$

et finalement la dimension fractale de E est égale à $1 + D_y$.

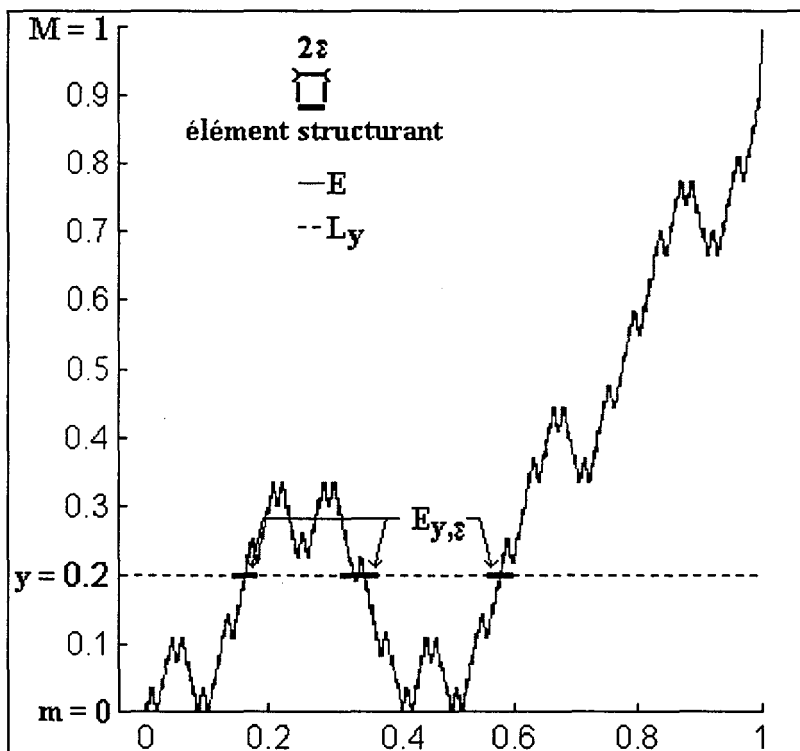


Figure I-15 : Méthode des intersections pour la courbe déterministe auto-affine de la Figure I-5 par un segment de longueur 2ε

I.2.3.2.4.Méthode de rééchelonnement

Cette méthode a longuement été explorée par MANDELBROT et WALLIS [MAN-69a][MAN-69b][MAN-69c]. La courbe est étudiée sur une fenêtre d'observation de taille τ , c'est à dire dans l'intervalle $[x, x+\tau]$. Pour la durée τ , on calcule d'une part la somme cumulée R des écarts entre la valeur moyenne de la fonction sur son intervalle de définition D_f et la valeur de la fonction sur $[x, x+\tau]$ et d'autre part la variance S sur ce même intervalle. On peut montrer que le rapport R/S varie avec la dimension fractale D de la façon suivante :

$$\frac{R}{S}(\tau) = (a\tau)^{2-D} \quad (\text{éq. I-16})$$

a est une constante.

A partir de l'équation (éq. I-16) et pour différentes valeurs de τ , on peut déterminer $(2 - D)$ comme la pente de la droite de régression linéaire dans le plan $\{\ln\tau, \ln \frac{R}{S}(\tau)\}$. La précision de cette méthode est améliorée en apportant un facteur de correction de la tendance locale de la courbe [BAS-94] sur la fenêtre d'observation τ . R et S ne sont plus calculées à partir de la valeur moyenne de la fonction sur toute la durée de l'observation mais à partir de la valeur moyenne de la fonction sur la fenêtre d'observation τ . Ces deux méthodes sont respectivement dénommées méthode de rééchelonnement sans et avec correction de tendance.

I.2.4. Limites des méthodes existantes

Même si la formulation et le calcul de la dimension fractale sont bien maîtrisés d'un point de vue topologique [HAU-19], le calcul numérique reste souvent imprécis. De nombreuses méthodes sont souvent proposées, mais appliquées à des courbes fractales de dimension connue, elles conduisent à des résultats éloignés de la dimension fractale théorique.

I.2.4.1.Valeur réelle de la dimension fractale

Dans \mathcal{R}^2 , la dimension fractale D varie dans l'intervalle $[1, 2]$. Nous avons vu (cf. section I.1.) que lorsque la dimension tend vers 2, la courbe a tendance à présenter une infinité de points doubles (elle tend à remplir le plan). Pratiquement il est impossible de dépasser des valeurs de dimension supérieures à 1,80 sans prendre le risque d'aboutir à des résultats incohérents. Cette remarque est aussi valable pour de trop faibles valeurs de D . Pour des valeurs proches de 1, les algorithmes donnent des valeurs erronées. Pour une dimension au voisinage de 1, la courbe

devient régulière et ne se prête à aucune méthode d'approximation. On peut noter aussi que le maximum de précision est obtenu, quelles que soient les méthodes [DUB-89a][GAL-94], pour des valeurs de dimension fractale comprises dans l'intervalle fermé $[1,4 ; 1,6]$.

I.2.4.2. La résolution

La taille du domaine, sur lequel sont appliquées les différentes méthodes, revêt une grande importance. Qian HUANG *et al.* [HUA-94] remarquent pour des images que la précision des méthodes dépend à la fois de la valeur réelle de la dimension fractale ainsi que de la résolution de l'image. Les meilleures estimations sont obtenues lorsque l'échelle de la résolution augmente pour des valeurs de dimension réelle supérieures à 2,50. Ils notent que cette précision varie dans le sens opposé, lorsque la dimension fractale devient faible. Pour de faibles valeurs de la dimension fractale, il est préférable de diminuer la taille d'observation de la fonction. Par le biais de simulations, TRICOT [TRI-88] fait remarquer que les méthodes sont affectées par des transformations élémentaires de la courbe comme des amplifications. La valeur estimée de la dimension fractale a tendance à diminuer lorsque la courbe est réduite d'un facteur 1/2. Ceci s'explique par le fait que si l'on réduit le signal d'un facteur très inférieur à 1, l'allure des courbes a tendance à se rapprocher d'une courbe régulière ($D = 1$). Inversement, pour un facteur très supérieur à 1, les éléments structurant tendent à encadrer une suite de droites verticales passant par les zéros de la fonction f . Une forte amplification de la courbe nous rapproche d'une étude de l'ensemble de CANTOR (Figure I-3). Le pas d'échantillonnage affecte tout autant la précision des méthodes. Ceci n'est pas surprenant dans la mesure où la résolution et le pas d'échantillonnage sont indissociables.

I.2.4.3. Dispersion des points dans le plan Log-Log

Toutes les méthodes basées sur le décompte d'éléments structuraux nécessaires pour recouvrir la courbe ou bien sur l'aire emprisonnée autour de la courbe, présentent l'inconvénient de provoquer des sauts caractéristiques dans le plan $\{-\ln(\varepsilon_k), \ln(\text{Vol}_2(E(\varepsilon_k))/\varepsilon_k^2)\}$. En effet le dénombrement ne peut prendre que des valeurs entières lorsque l'on passe de la taille d'observation ε_k à ε_{k+1} . Si bien que la détermination de la pente de la droite de régression linéaire (égale à la dimension fractale estimée D) par la méthode des moindres carrés (éq. I-8) est sujette à des erreurs.

Nous avons vu dans le cas d'un exemple simple (éq. I-6), que nous néglignons l'ordre supérieur en ε . En fait l'aire $\ln(\text{Vol}_2(E))$ n'est pas exactement proportionnelle à $\ln(\varepsilon)$. La droite de

régression linéaire présente le plus souvent une certaine concavité [TRI-88]. La méthode de la saucisse de MINKOWSKI, même si elle se prête aisément aux calculs lorsque la courbe est vue par un analyseur d'images, est toutefois peu précise car il est rare d'observer un bon alignement des points dans le plan Log-Log.

I.2.4.4. Choix de la suite $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

L'équation (éq. I-8) nous impose de faire le choix d'une suite $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ strictement décroissante dont les termes convergent progressivement vers zéro. Une suite géométrique suffit car une condition nécessaire et suffisante est que le rapport $\ln \varepsilon_k / \ln \varepsilon_{k+1}$ tende vers un. Même si l'objet fractal possède la propriété d'être invariant quelle que soit l'échelle d'observation, le choix de la taille de la plus grande valeur de l'échelle (premier terme ε_0 de la suite) se pose. On note que les premiers et les derniers points tracés dans le plan Log-Log contiennent très peu d'information. En effet lorsque ε_0 est grand, pratiquement un seul élément structurant recouvre la courbe. Inversement pour des valeurs de ε_k , très faibles au regard du nombre de valeurs utilisées pour échantillonner la courbe, le nombre d'éléments recouvrant la courbe atteint une limite. LIEBOVITCH et TOTH [LIE-89] proposent de définir la suite de la façon suivante :

$$\varepsilon_k = 2^{-k}, \text{ avec } 0 \leq k \leq K \text{ et } Q = 2^K \quad (\text{éq. I-17})$$

où Q représente le nombre d'échantillons retenus pour discrétiser la fonction f .

Ils suggèrent d'éliminer les points $(\varepsilon_k, \text{Vol}_2(E(\varepsilon_k))/\varepsilon_k^2)$ du plan Log-Log pour lesquels $k = K$ et $k = K-1$ (correspondant aux derniers termes de la suite) et ceux pour lesquels le nombre de boîtes est inférieur à $Q^2/5$ (premiers termes de la suite).

HUANG *et al.* [HUA-94] proposent de s'affranchir de cette limitation en se basant sur l'estimation de la probabilité du nombre de points contenus dans l'élément structurant de taille ε_k . Ils utilisent la suite définie en (éq. I-17) et ne considèrent que les points obtenus pour les valeurs de la suite comprises dans l'intervalle $[2/Q, 1/2]$ pour établir leur régression linéaire. Cette méthode est par ailleurs reprise par DUBUC *et al.* [DUB-89a]. On peut noter ici que les choix de la taille de la plus grande valeur de la suite $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et du nombre de points servant à échantillonner la courbe sur son domaine sont liés.

I.2.4.5. Tendance de la courbe

La façon dont varie la fonction sur son domaine de définition est également une source de perte de précision dans bien des méthodes. La correction de la tendance de la courbe

(croissance ou décroissance dans son domaine de définition) est préconisée par MANDELBROT et WALLIS [MAN-69a]. BASSINGTHWAIGHTE [BAS-94] montre qu'une correction offre une meilleure précision. Cette approche est explorée avec la méthode de rééchantillonnage avec correction (cf. section I.2.3.2.4.). Les méthodes utilisant des éléments structuraux ou bien utilisant les écarts par rapport à la moyenne sont affectées par une croissance ou une décroissance de la courbe.

I.2.4.6. Complexité des méthodes

Les méthodes de recouvrement ou nécessitant une opération morphologique sur la courbe offrent le grand avantage d'être rapides. Elles s'apparentent aux techniques de traitement d'image. Il n'en est pas de même pour d'autres méthodes comme celle du spectre de puissance ou encore des boules disjointes. Outre leur piètre performance [DUB-89a][GAL-94], la méthode du spectre de puissance, par exemple, nécessite d'utiliser la Transformée de Fourier rapide. Si N représente le nombre de valeurs servant à discrétiser la fonction f , alors la complexité de cet algorithme varie comme $N \cdot \ln N$. Il en résulte que toutes les méthodes basées sur l'analyse du spectre de puissance seront de la complexité de $N \cdot \ln N$.

I.2.5. Génération de courbes fractales

Les méthodes mises au point sont évaluées à partir de fonctions test de référence (courbes) dont on connaît la structure mathématique et la dimension fractale. Ces fonctions de test, dont on connaît la dimension fractale a priori, sont construites automatiquement. Nous présentons ci-après les courbes test les plus souvent utilisées qui nous serviront à comparer les méthodes existantes à notre approche.

I.2.5.1. Le mouvement brownien fractionnaire (FBM) [GOU-92]

Un mouvement brownien est représenté par une succession de sauts aléatoires en direction, de longueur égale ou éventuellement de longueur elle-même aléatoire, mais possédant une longueur moyenne finie. Pour un nombre assez grand d'itérations, on constate que sa trace (appelée aussi vol brownien) devient dense dans le plan : sa dimension fractale est de 2. Une fonction brownienne fractionnaire $f_H(x)$ (dénommée FBM pour Fractional Brownian Motion) dont la courbe E est de dimension $D = 2 - H$, est telle que tous ses incréments $f_H(x_2) - f_H(x_1)$ ont une distribution gaussienne de variance (éq. I-18) :

$$\Delta^2 f_H(x_2-x_1) = \langle (f_H(x_2) - f_H(x_1))^2 \rangle = A |x_2-x_1|^{2H} \quad (\text{éq. I-18})$$

avec $0 < H < 1$ et $A > 0$

$\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne sur un grand nombre d'échantillons.

La fonction $\Delta^2 f_H(x_2-x_1)$, incrément quadratique moyen, est stationnaire (elle ne dépend que de x_2-x_1) et paire. Comme pour le mouvement brownien, elle est continue mais différentiable nulle part. En pratique, on calcule les valeurs de cette fonction à partir de sa Transformée de Fourier Discrète (TFD). Une méthode identique peut être utilisée pour construire une image fractale brownienne [KUB-88].

I.2.5.2. La fonction de WEIERSTRASS-MANDELBROT (WM)

Ce modèle de courbe est le résultat de la généralisation de MANDELBROT des fonctions de WEIERSTRASS non différentiables. Alors que les séries de Fourier imposent une progression linéaire des fréquences, la fonction de WEIERSTRASS leur impose une progression géométrique. La fonction analytique est donnée par :

$$WM(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b^{-n(2-D)} \cdot (1 - \cos b^n x) \quad (\text{éq. I-19})$$

$b \in]1, +\infty[$ et $0 < 2-D < 1$ (conditions de convergence)

b est une constante. Le graphe de cette fonction paire, représenté à la Figure I-16, nous montre une tendance à la croissance de WM en fonction de x .

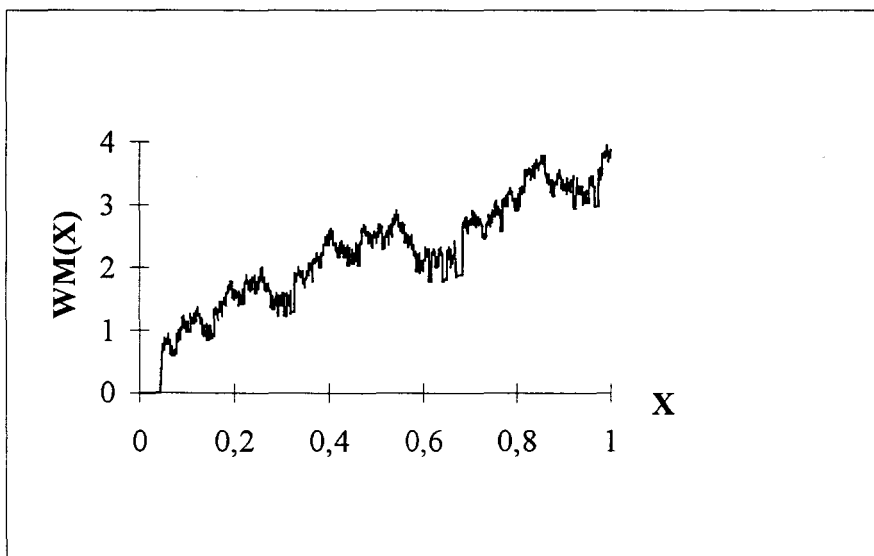


Figure I-16 : Courbe de WEIERSTRASS-MANDELBROT

avec $b = 2,1$ et $D = 1,50$

Afin de s'affranchir de cette tendance à la croissance (cf. section I.2.4.5.), BERRY et LEWIS [BER-80] proposent d'apporter un déphasage aléatoire de φ_n à l'équation (éq. I-19) qui devient :

$$\begin{cases} \text{WM}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b^{-n(2-D)} \cdot (1 - \cos(b^n x - \varphi_n)) \\ \varphi_n \in [0, \pi] \end{cases} \quad (\text{éq. I-20})$$

$b \in]1, +\infty[$ et $0 < 2-D < 1$ (conditions de convergence)

I.2.5.3. Fonctions auto-affines

Les fonctions auto-affines, de degré p non nul, sont directement issues de la construction de courbes fractales auto-affines (cf. section I.1.). Ce sont des fonctions bornées, définies sur l'intervalle $[0, 1]$ avec :

$$f(0) = f_0 = 0, f(1/p) = f_1, f(2/p) = f_2, f(1) = f_p = 1 \text{ (générateur)}$$

Ces fonctions ont la propriété de se reproduire sur chaque intervalle $[i/p, (i+1)/p]$ avec $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ à l'identique par rapport à l'intervalle de définition, de cette façon :

$$\forall x \in [i/p, (i+1)/p], f(x) = f_i + (f_{i+1} - f_i) \times f(p \cdot x - i)$$

Un cas particulier de degré $p = 4$, communément appelé fonction de KIESSWETTER de dimension fractale $D = 1,50$ est défini avec les quatre valeurs suivantes :

$$f_0 = 0, f_1 = -0,5, f_2 = 0, f_3 = 0,5 \text{ et } f_4 = 1$$

I.2.5.4. Courbes fractales de TAKAGI

B. DUBUC propose une construction très simple des courbes de TAKAGI [DUB-89b]. Ces courbes sont intéressantes car elles permettent aussi d'obtenir une nouvelle classe de surfaces fractales dont on peut connaître la dimension fractale théorique (Figure I-17).

Cette classe de courbes, définies sur $D_f = [0, 1]$, est obtenue à partir de la superposition de fonctions en dents de scie dont la fréquence et l'amplitude varient géométriquement.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b^n \psi(2^{n-1} x) \quad (\text{éq. I-21})$$

avec $1/2 < b < 1$ et $\psi(x) = 2 \cdot \Delta(x, Z)$ (Z désigne l'ensemble des entiers relatifs).

La fonction $\psi(\cdot)$ correspond à la fonction en dents de scie.

$\Delta(x, Z)$ est la distance entre la valeur réelle x et l'entier le plus proche :

$$\forall x \in \mathfrak{R}, \exists k \in \mathbb{Z} / k \leq x < k+1$$

(éq. I-22)

$$\Delta(x, \mathbb{Z}) = k$$

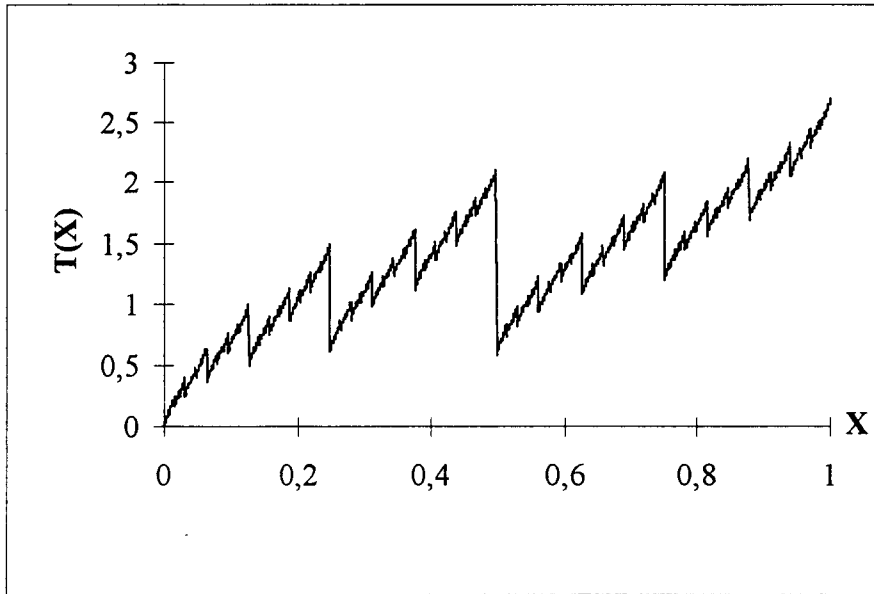


Figure I-17 : Courbe de TAKAGI non modifiée avec $b = 2^{-0,8}$ et $D = 1,20$

Afin de supprimer la tendance à la croissance de ces courbes, elles peuvent être modifiées par une valeur binaire aléatoire de la façon suivante :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b^n \psi(2^{n-1} x) \cdot \phi_n(2^{n-1} x) \quad (\text{éq. I-23})$$

avec $1/2 < b < 1$ et

$$\phi_n(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} X_{i,n} \delta_i(x) \quad (\text{éq. I-24})$$

où $X_{i,n}$ sont des variables aléatoires binaires, indépendantes, prenant leur valeur dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ et distribuées équiprobablement pour l'une ou l'autre valeur.

$$\delta_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [i, i+1] \\ 0 & \text{pour } x \notin [i, i+1] \end{cases}$$

Les dents de scie présentent par conséquent équitablement la pointe dirigée vers le haut ou vers le bas. DUBUC [DUB-89b] démontre que la dimension fractale théorique de telles courbes s'exprime de la façon suivante :

$$D = \frac{\ln(4 \cdot b)}{\ln(2)} \quad (\text{éq. I-25})$$

CHAPITRE II

METHODE PROPOSEE POUR L'ESTIMATION DE LA DIMENSION FRACTALE

II. METHODE PROPOSEE POUR L'ESTIMATION DE LA DIMENSION FRACTALE

II.1. Choix d'une méthode d'estimation

Nous avons mis en évidence, dans la section I.2.4., les limites des méthodes existantes d'estimation de la dimension fractale. Mathématiquement, toutes les méthodes définies précédemment sont équivalentes. A la limite, elles convergent toutes vers la même dimension fractale D car elles sont plongées dans un espace de dimension finie. Dans la pratique, leur comportement diffère car elles ne convergent pas de la même façon vers la limite D . Le choix de la méthode d'estimation s'est porté sur la méthode de dénombrement des boîtes, communément appelée "Box Counting Method". Elle est la plus utilisée et très souvent proposée comme un outil pour analyser les tendances des courbes ou des images car elle peut être utilisée sur n'importe quel objet mathématique. De plus, cette méthode offre le grand avantage de se prêter à des calculs simples et rapides. La rapidité est un facteur déterminant dans la mesure où elle permet de conclure rapidement quant'au caractère fractal de l'objet analysé.

La mise en œuvre de la méthode nous impose de choisir une suite $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ strictement décroissante, définie positive (borne inférieure zéro). Toutefois, comme nous avons pu le constater dans la section I.2.4., cette méthode est affectée par de multiples sources d'erreur. Les erreurs affectant la précision, c'est à dire la différence entre la dimension fractale estimée et la dimension fractale réelle D (cf. section I.2.4.1.), peuvent être regroupées en deux grandes classes (Figure II-1) :

- les erreurs stochastiques liées à la résolution, la discrétisation, le choix des points dans le plan Log-Log à prendre en compte pour réaliser la régression linéaire (cf. sections I.2.4.2., I.2.4.3. et I.2.4.4.)
- les erreurs systématiques essentiellement liées à la valeur réelle de la dimension fractale et à d'autres paramètres comme la tendance de la courbe par exemple (cf. section I.2.4.5.).

Ces deux classes d'erreur ne peuvent être modélisées par aucune fonction explicite. En effet, la relation entre la dimension fractale réelle et la dimension estimée est par trop complexe et incertaine. Comme pour chacune des estimations les deux classes d'erreur existent, nous avons choisi de hiérarchiser (Figure II-2) la procédure de minimisation de l'erreur en deux étapes. La première (étape de pondération) consiste à minimiser les erreurs stochastiques et la seconde (étape d'approximation) vise à diminuer les erreurs systématiques.

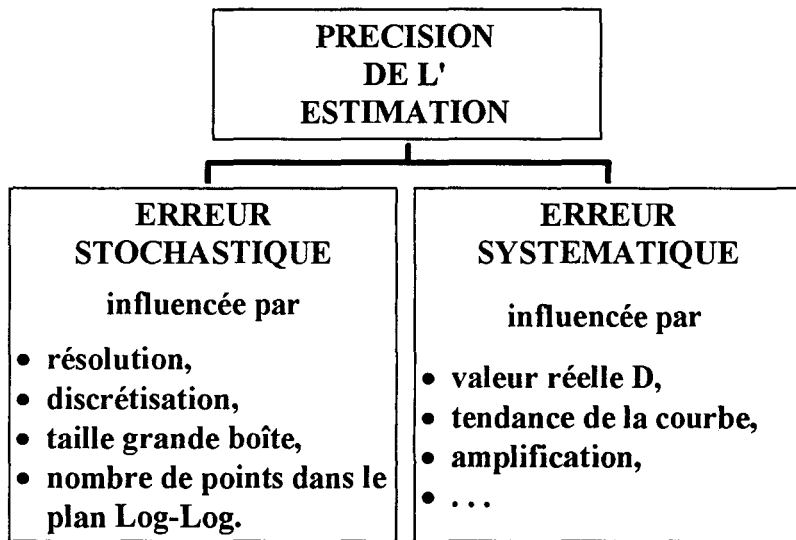


Figure II-1 : Classes d'erreur pour la précision de l'estimation

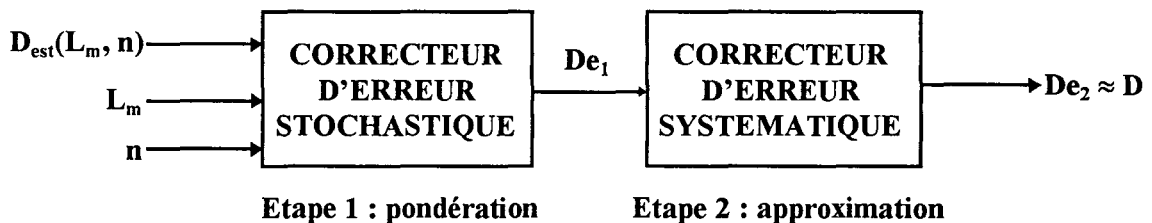


Figure II-2 : Plan de correction de l'erreur

avec

n : nombre de points du plan Log-Log retenus pour la régression linéaire,

L_m : taille de la plus grande boîte,

$D_{est}(L_m, n)$: dimension estimée par la méthode de dénombrement des boîtes (éq. I-10)

$D_{est}(L_m, n)$ est une fonction de L_m et de n .

II.2. Etape de pondération

II.2.1. Les erreurs stochastiques

L'étape de pondération est mise en place afin de minimiser les erreurs stochastiques. KUMAR [KUM-94] note que pour la méthode de dénombrement des boîtes, un vaste choix de tailles des boîtes, correctement sélectionnées, peuvent convenir pour obtenir une bonne estimation de la dimension fractale du mouvement brownien fractionnaire (cf. section I.2.5.1.). Pour une fonction donnée (correspondant à la courbe E), elle permet d'obtenir, à partir d'un ensemble de dimensions fractales estimées à l'aide de la méthode de dénombrement des boîtes (cf. section I.2.3.1.3.), une moyenne pondérée De_1 . Avec la méthode de dénombrement des boîtes, la dimension fractale estimée correspond à la pente de la droite de régression linéaire (éq. I-8)(éq. I-10) des points dans le plan Log-Log (Figure I-10). Nous avons pu remarquer que l'échelle de la résolution était un facteur déterminant dans la précision de la méthode (cf. section I.2.4.2.) et pour chaque niveau de résolution nous obtenons une évaluation de la dimension estimée différente. Chacune de ces résolutions peut être caractérisée par deux paramètres. La taille de la plus grande boîte de départ (nous la nommerons L_m) ainsi que le nombre n de points pris en compte pour réaliser la régression linéaire. Afin de limiter la dispersion des points dans ce plan, nous nous sommes efforcés de les répartir de la façon la plus homogène possible. La suite finie $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels), dont le premier terme ε_0 est égal à la taille de la plus grande boîte L_m retenue, est une suite arithmétique de raison $-\frac{L_m}{n}$. Elle présente l'avantage de ne pas décroître trop rapidement et d'être relativement homogène :

$$\begin{cases} \varepsilon_k = L_m \cdot \frac{n-k}{n} = \varepsilon_0 - \frac{k}{n} \cdot \varepsilon_0 & \text{avec } L_m > 0 \\ k \in \{0, \dots, n-1\} \end{cases}$$

Cette suite est strictement décroissante

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k = -L_m/n < 0 \quad (L_m > 0)$$

et elle est bornée par zéro

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \varepsilon_k > 0 \quad (L_m > 0).$$

En fonction de ce choix de la suite $\{\varepsilon_k ; k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$, on peut estimer la valeur de D par la méthode de dénombrement des boîtes. Cette valeur estimée, notée $D_{\text{est}}(L_m, n)$ est la pente de

la droite de régression linéaire définie par les n couples de points $(\ln(1/\varepsilon_k), \ln(N(\varepsilon_k)))$. $N(\varepsilon_k)$ représente le nombre de carrés de côté ε_k nécessaires pour recouvrir entièrement la courbe E . Cette estimation de la dimension est alors une fonction de la taille de la plus grande boîte L_m et du nombre de points n . Par conséquent, notre étude revient à trouver la meilleure approximation de D à partir de l'ensemble des valeurs $D_{\text{est}}(L_m, n)$.

Il s'agit donc de calculer, dans cette étape de pondération, De_1 telle que la valeur absolue $|De_1 - D|$ soit minimale. Afin de nous affranchir des erreurs inhérentes à la méthode de dénombrement des boîtes, nous nous efforçons de faire varier à la fois la taille de la plus grande boîte et le nombre de points pris en considération dans le plan Log-Log.

II.2.2. Variation de la taille de la plus grande boîte.

Pour une valeur fixe du nombre de points n , nous pouvons faire le choix de p valeurs de taille

maximale de la plus grande boîte $\left\{ \begin{array}{l} L_m(i) \\ i \in \{0, \dots, p-1\} \end{array} \right\}$ en procédant à un découpage du plan,

dans lequel est plongée la courbe, par dichotomie. Le premier choix de la taille de la plus grande boîte $L_m(0)$ est fixé à la taille de l'intervalle fermé du domaine de définition de la courbe. Pour le choix $L_m(0)$, un seul carré recouvre la courbe. La taille des boîtes suivantes s'en déduit de la manière suivante :

$$f : [x_{\min}, x_{\max}] \rightarrow \mathcal{R} \quad (\text{éq. II-1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_m(0) = x_{\max} - x_{\min} \\ i \in \{0, \dots, p-1\}, L_m(i) = L_m(0) \times \frac{1}{2^i} \end{array} \right.$$

Conformément à ce que nous avons défini à la section I.2.4.4., cela revient à faire p choix du premier terme ε_0 de la suite $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Pour chacun de ces p choix de taille de départ des boîtes, nous obtenons p valeurs de dimensions fractales estimées avec la méthode de dénombrement des boîtes, notées $D_{\text{est}}(L_m(p), n)$. Nous noterons $S(n)$ l'ensemble de ces p échantillons.

$$S(n) = \{D_{\text{est}}(L_m(0), n), \dots, D_{\text{est}}(L_m(i), n), \dots, D_{\text{est}}(L_m(p-1), n)\}$$

$$\text{avec } i \in \{0, \dots, p-1\}$$

A partir de cet ensemble, nous allons définir un coefficient de pondération μ_i pour chacune des p valeurs afin d'obtenir une moyenne pondérée $D_e(n)$ de la valeur de la dimension fractale qui ne sera plus qu'une fonction du nombre de points n choisis dans le plan Log-Log.

$$D_e(n) = \frac{\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \cdot D_{\text{est}}(L_m(i), n)}{\sum_{i=0}^{p-1} \mu_i} \quad (\text{éq. II-2})$$

Les coefficients μ_i sont évalués de la façon suivante.

Dans l'ensemble $S(n)$, nous recherchons la valeur r ($r \in \{0, \dots, p-1\}$) telle que :

$$D_{\text{est}}(L_m(r), n) = \text{Max}_{i \in \{0, \dots, p-1\}} \{D_{\text{est}}(L_m(i), n)\}$$

Ce choix est justifié à posteriori par les simulations (**Figure IV-8**) qui montrent que, dans tous les cas, les valeurs proches de $D_{\text{est}}(L_m(r), n)$ sont voisines de D .

Ensuite, nous choisissons un ensemble $S'(n)$ de $2m+1$ (avec $2m+1 < p$) valeurs telles que :

$$S'(n) = \{D_{\text{est}}(L_m(r-m), n), \dots, D_{\text{est}}(L_m(r+i), n), \dots, D_{\text{est}}(L_m(r+m), n)\}$$

avec $i \in \{-m, -(m-1), \dots, 0, \dots, m\}$

Soient $\bar{D}(n)$ et $\Delta D(n)$, la moyenne des valeurs de l'ensemble $S'(n)$ et leur écart (en distance d_1) par rapport à cette moyenne. $\bar{D}(n)$, fonction du nombre de points choisis pour construire la droite, peut être considérée comme une valeur proche de D .

$$\bar{D}(n) = \frac{1}{2m+1} \cdot \sum_{i=-m}^{i=m} D_{\text{est}}(L_m(r+i), n) \quad (\text{éq. II-3})$$

$$\Delta D(n) = \frac{1}{2m+1} \cdot \sum_{i=-m}^{i=m} |D_{\text{est}}(L_m(r+i), n) - \bar{D}(n)|$$

Nous avons choisi cet écart par rapport à l'écart-type usuel afin de simplifier le calcul. Les coefficients μ_i sont fonction de l'écart alors défini en fonction de $D_{\text{est}}(L_m(i), n)$ selon le profil trapézoïdale symétrique caractérisée par deux paramètres a et b (Figure II-3). La forme trapézoïdale que suivent les coefficients est choisie de telle sorte à accorder plus de poids aux valeurs $D_{\text{est}}(L_m(i), n)$ comprises dans l'intervalle fermé $[\bar{D}(n)-a, \bar{D}(n)+a]$. Les paramètres de sensibilité a et b seront reliés respectivement à $\bar{D}(n)$ et $\Delta D(n)$ par :

$$a = \text{pourcent} \times \Delta D(n) \quad (\text{éq. II-4})$$

$$b = \text{pourcent}' \times (\bar{D}(n) - \Delta D(n))$$

pourcent et $\text{pourcent}'$ sont deux coefficients réels à ajuster (méthode présentée dans la section III.4.1.1.) dans l'intervalle $[0,01 ; 2]$ caractérisant la forme de la fonction trapézoïdale. $\frac{1}{b}$ règle les pentes de la forme trapézoïdale, tandis que le paramètre a règle le plateau.

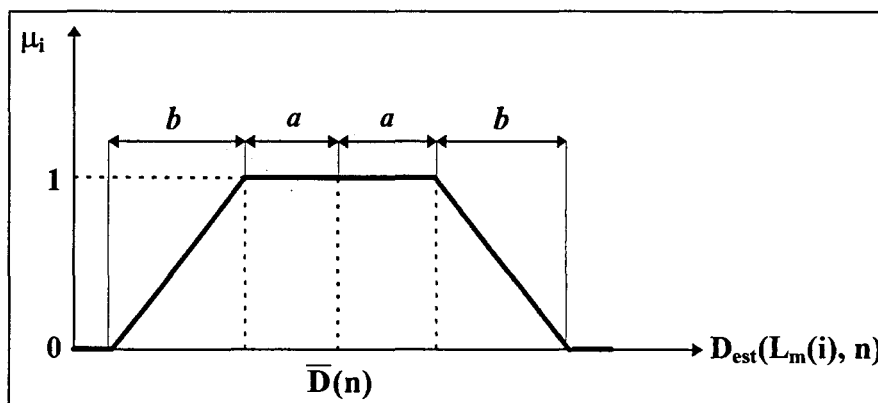


Figure II-3 : Fonction trapézoïdale symétrique des coefficients μ_i

II.2.3. Variation du nombre de points

Suivant le même raisonnement que celui pour lequel nous avons fait varier la taille de la plus grande boîte, il est possible de définir une moyenne générale pondérée De_1 en faisant maintenant varier le nombre de points pour réaliser la régression linéaire.

Considérons l'ensemble S , réunion de q sous-ensembles $S(n)$ construits selon la méthode précédente :

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \bigcup_{n=n_1}^{n_1+q-1} S(n) \\ \left\{ \begin{array}{l} S(n) = \{D_{\text{est}}(L_m(i), n)\} \\ i \in \{0, \dots, p-1\} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S'(n) = \{D_{\text{est}}(L_m(r+j), n)\} \\ j \in \{-m, -(m-1), \dots, 0, \dots, m\} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Cela revient à considérer q groupes de p échantillons de $D_{\text{est}}(L_m, n)$. Ces q groupes correspondent chacun à un nombre de p points dans le plan Log-Log. De la même façon que nous avons introduit les coefficients μ_i , nous faisons le choix de coefficients de pondération γ_i qui suivent la fonction trapézoïdale symétrique représentée à la Figure II-4. La valeur De_1 est calculée comme suit :

$$De_1 = \frac{\sum_{n=n_1}^{n_1+q-1} \gamma_i \cdot D_e(n)}{\sum_{i=1}^q \gamma_i} \quad (\text{éq. II-5})$$

La fonction trapézoïdale est elle-même paramétrée par deux coefficients a' et b' en relation avec la moyenne et l'écart de l'ensemble des échantillons par analogie avec la fonction trapézoïdale symétrique des coefficients μ_i .

$$a' = \text{pourcent} \times \Delta D \tag{éq. II-6}$$

$$b' = \text{pourcent}' \times (\bar{D} - \Delta D)$$

avec $(\text{pourcent}, \text{pourcent}') \in [0,01 ; 2]^2$ (présenté dans la section III.4.1.1.)

\bar{D} et ΔD sont évalués à partir de l'ensemble S de la même façon que $\bar{D}(n)$ et $\Delta D(n)$ l'étaient pour l'ensemble S'(n).

$$\bar{D} = \frac{1}{q} \cdot \sum_{n=n_1}^{n_1+q-1} D_e(n) \tag{éq. II-7}$$

$$\Delta D = \frac{1}{q} \cdot \sum_{n=n_1}^{n_1+q-1} |D_e(n) - \bar{D}|$$

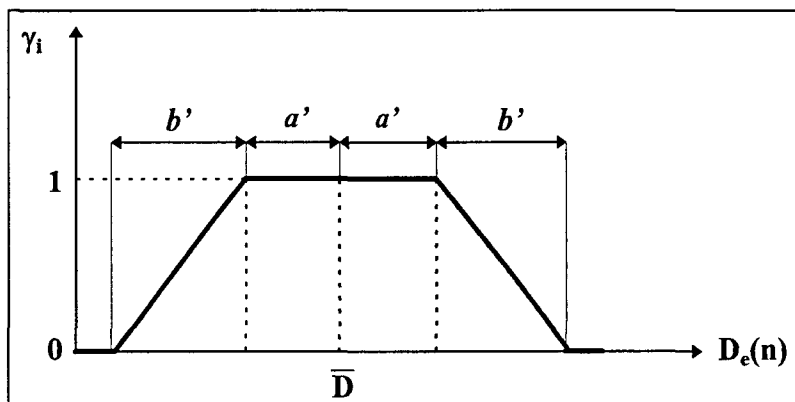


Figure II-4 : Fonction trapézoïdale des coefficients γ_i

Dans la mesure où les coefficients μ_i et γ_i sont correctement choisis, De_1 est assez proche de la véritable valeur de la dimension fractale D . De_1 est sensible au choix des deux coefficients. Toutefois, dans tous les cas (cf. section II.3.3.5.), l'influence des erreurs stochastiques est toujours fortement réduite. En effet, le calcul de la moyenne pondérée De_1 prend en compte un grand nombre d'échantillons et les erreurs stochastiques causées par les différentes échelles de résolution (L_m et n) se compensent l'une l'autre ainsi que le montrent les résultats de simulation. Les fonctions trapézoïdales symétriques associées aux coefficients μ_i et γ_i sont centrées autour de moyennes respectives $\bar{D}(n)$ et \bar{D} . Les couples (a, b) et (a', b') sont reliés aux écarts $\Delta D(n)$ et ΔD respectifs par rapport à ces moyennes.

II.3. Etape de l'approximation

L'étape précédente nous a permis, pour une fonction donnée, et avec le choix d'une méthode d'estimation (méthode de dénombrement des boîtes) de prendre en compte les erreurs stochastiques. Toutefois, dans la section I.2.4.1., nous avons indiqué que de nombreuses erreurs étaient elles-mêmes liées à la valeur réelle de la dimension fractale D . La première étape, ayant conduit à l'évaluation de De_1 , nous a permis de prendre en compte les erreurs aléatoires inhérentes à la méthode. Connaissant De_1 , la seconde étape vise à prendre en compte les éléments influant sur le caractère fractal : régularité, tendance de la courbe par exemple. La complexité de la relation liant ces éléments à D ne permet pas d'établir une fonction analytique. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de définir un Contrôleur en Logique Floue permettant de donner une approximation de la relation complexe.

II.3.1. La théorie des ensembles flous

Introduite par Lotfi A. ZADEH en 1965 [ZAD-65] et appliquée depuis 1975 aux systèmes de régulation, la théorie des ensembles flous part du constat que, dans le monde physique, on peut rencontrer des objets qui ne présentent pas des définitions précises de leur critères d'appartenance à une classe particulière. ZADEH a éprouvé le besoin de formaliser la représentation et le traitement de connaissances imprécises ou approximatives, afin de pouvoir commander des systèmes d'une grande complexité. La logique floue intervient dans la manipulation de connaissances imparfaites. Nous pouvons dire que la classe des animaux comprend naturellement les chiens, les chevaux, les oiseaux et exclut les objets tels les pierres, les plantes et ceci sans aucune ambiguïté. Concernant l'ensemble des "hommes de grande taille", une personne mesurant 1,75m ne présente pas un statut précis par rapport aux autres éléments de cet ensemble. En d'autres termes, l'ensemble des "hommes de grande taille" ne constitue pas un ensemble ou une classe au sens mathématique du terme. Un ensemble flou A constitue une classe d'objets avec pour chacun de ces objets (noté x) un degré d'appartenance à cet ensemble. Un tel ensemble est caractérisé par une fonction d'appartenance f_A qui associe à chaque objet un degré d'appartenance $f_A(x)$ (une possibilité) qui est un nombre réel compris dans l'intervalle $[0, 1]$. Cette théorie est une extension de la notion d'ensemble au sens usuel du terme. Dans \mathfrak{R} , par exemple, la fonction d'appartenance usuelle d'un élément x à un ensemble A ($A \subset \mathfrak{R}$) ne peut prendre que deux valeurs 0 et 1, respectivement pour le élément de l'ensemble A ($x \in A$) et x en dehors de A ($x \notin A$).

Dans la théorie des ensembles flous, le noyau de A est l'ensemble des éléments de X pour lesquels la fonction d'appartenance de A vaut 1. A partir de cette théorie, ZADEH définit plusieurs opérations concernant les ensembles flous qui sont des extensions de celles concernant les ensembles classiques (Figure II-5).

Si A et B sont deux sous-ensembles flous définis dans l'univers U et $f (f : x \rightarrow [0 ; 1])$ désigne la fonction d'appartenance de l'ensemble flou, la théorie des ensembles flous définit les propriétés suivantes [DUB-80] :

Propriétés	Fonctions d'appartenance	
égalité	$\forall x \in U, A = B \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x)$	
complémentarité	$\forall x \in U, A' = \bar{A} \Rightarrow f_{A'}(x) = 1 - f_A(x)$	
inclusion	$\forall x \in U, A \subset B \Leftrightarrow f_A(x) \leq f_B(x)$	Notations
réunion	$C = A \cup B \Leftrightarrow \forall x \in U, f_C(x) = \text{Max}(f_A(x), f_B(x))$	$f_C = f_A \vee f_B$
intersection	$C = A \cap B \Leftrightarrow \forall x \in U, f_C(x) = \text{Min}(f_A(x), f_B(x))$	$f_C = f_A \wedge f_B$
différence bornée	$C = A \text{ } - \text{ } B \Leftrightarrow \forall x \in U, f_C(x) = \text{Max}(0, f_A(x) - f_B(x))$	$f_C = f_A \text{ } - \text{ } f_B$

Tableau II-1 : Opérations théoriques sur les ensembles flous

La différence bornée [ZAD-75] entre deux ensembles A et B ($A \text{ } |-| \text{ } B$) caractérise l'ensemble flou des éléments qui appartiennent plus à l'ensemble A qu'à l'ensemble B. Cette propriété est une extension de la différence entre deux ensembles classiques (A-B). Dans la logique floue, les deux seules lois des ensembles classiques qui ne sont plus vérifiées sont :

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \text{ et } A \cup \bar{A} = U.$$

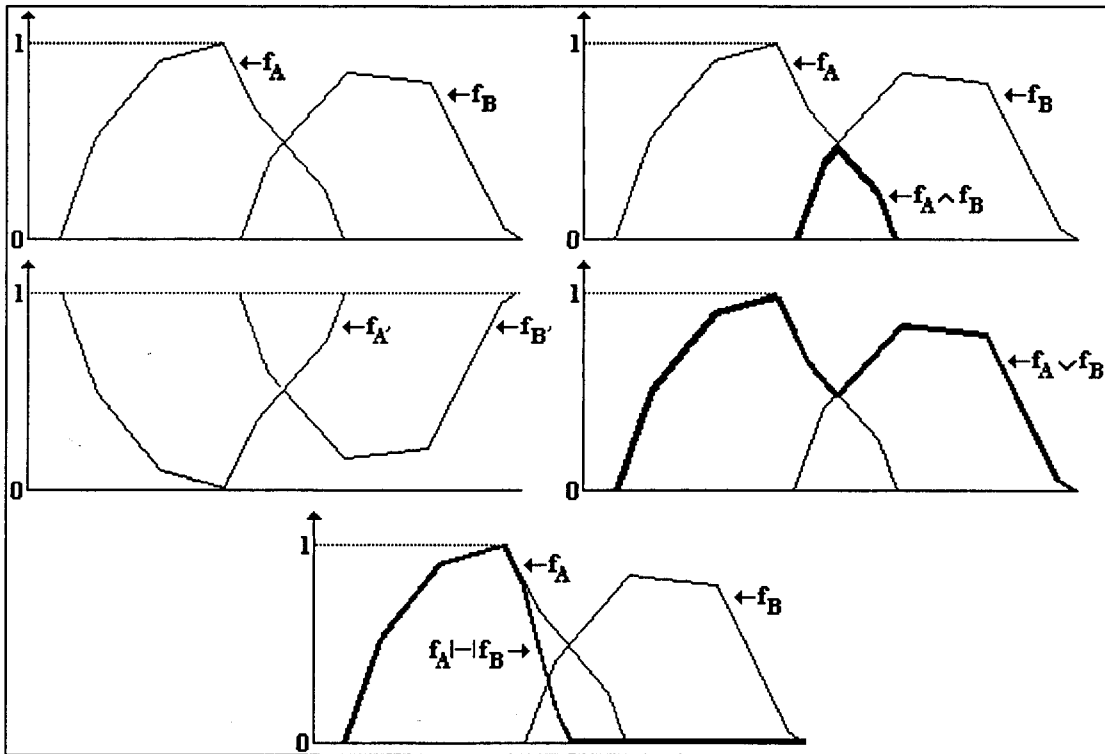


Figure II-5 : Représentation des fonctions d'appartenance des opérations théoriques sur les ensembles flous

A partir de cette théorie sur les ensembles flous, on peut introduire des variables linguistiques qui servent à modéliser les connaissances vagues [BOU-95]. Une variable linguistique est formée d'un triplet (V, X, T_v) , dans lequel V est une variable définie sur un ensemble de référence X . L'ensemble $T_v = \{A_1, A_2, \dots\}$ contient des sous-ensemble flous de X , utilisables pour caractériser V (exemple Figure II-6). Ainsi une variable linguistique va se situer à un deuxième niveau par rapport à une variable numérique. Dans l'exemple ci-dessous, la variable surface (linguistique) va se distinguer de la variable surface (numérique) par le type de ses valeurs, qui seront des étiquettes d'ensemble flous, comme minuscule, petite, moyenne, grande, immense. La distribution de possibilité, associée à chacun des ensembles flous de valeurs assignables à la variable linguistique, est considérée comme traduisant le contenu sémantique de l'information qu'ils véhiculent dans un contexte donné.

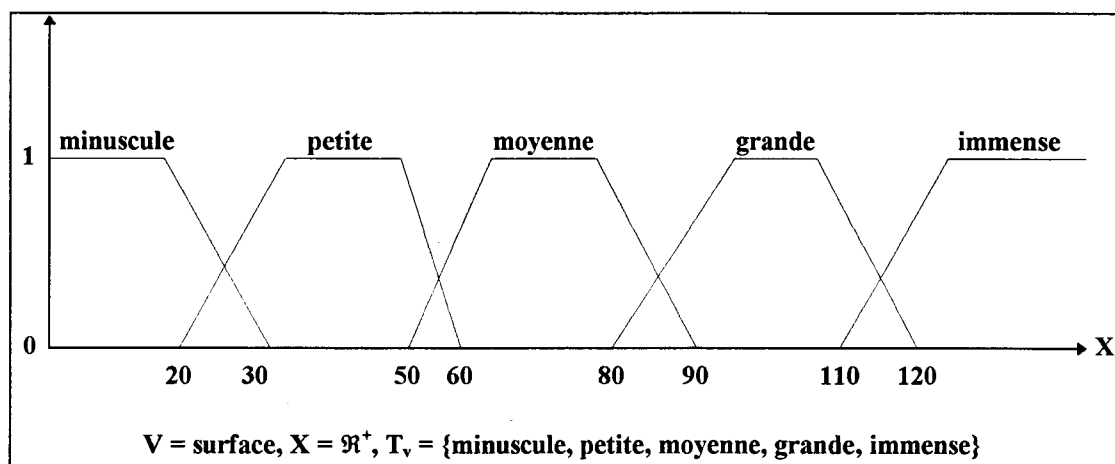


Figure II-6 : Exemple de variable linguistique (V, X, Tv) utilisée pour décrire une surface

Dès lors, on peut définir une proposition floue élémentaire. Etant donné un ensemble L de variables linguistiques, la proposition floue d'une variable (V, X, T_v) de L est définie par la qualification "V est A", où A est un sous-ensemble flou appartenant à T_v . La théorie sur les ensembles flous nous autorise à évaluer la valeur de vérité de propositions telles que "V est A et W est B" ou encore de "V est A ou W est B".

II.3.2. Les Contrôleurs en Logique Floue (C.L.F)

L'implication "SI V est A ALORS W est B" définit une règle floue, où "V est A" est la prémisse de la règle et "W est B" sa conclusion. La modélisation de systèmes complexes par la logique floue a été appliquée dans de nombreux domaines avec succès [TAK-85][MAM-75]. La logique floue et les réseaux neuronaux sont des techniques empiriques permettant de modéliser les systèmes complexes. Cependant la logique floue utilise des variables linguistiques ce qui facilite l'interprétation des connaissances [ZAD-94]. Le contrôle flou est utilisé lorsque des implications floues peuvent exprimer des règles de contrôle de systèmes. La plupart de ces implications sont composées de variables linguistiques associées à des fonctions d'appartenance ne possédant qu'un seul mode. En règle générale, le système à modéliser est multi-variables (plusieurs entrées qui génèrent plusieurs sorties). L'outil mathématique simple qui peut être proposé consiste à mettre un place une partition floue de l'espace des entrées et pour chacun de ces sous-espaces flous, on forme une relation linéaire entre les entrées et les sorties. Chacune des sorties pouvant être traitée séparément, nous pouvons considérer que le modèle flou proposé est multi-entrées/une sortie (MISO : Multi-Inputs/Single Output). Les

Contrôleurs en Logique Floue (notés C.L.F) sont composés d'une base de règles floues, d'une interface de fuzzification, d'un mécanisme d'inférence flou et d'une interface de défuzzification. Un exemple de règle simple est :

$$R : \text{SI } (X \text{ est } A) \text{ ALORS } (y \text{ est } Y) \quad (\text{éq. II-8})$$

A titre d'exemple, considérant que le nombre d'entrées est n , les composantes x_k du vecteur

$$\text{d'entrée } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ correspondent aux variables des prémisses et } y \text{ est la variable mono-}$$

dimensionnelle (scalaire) de sortie correspondant à la conclusion de la règle floue. Dès lors les règles floues R_j sont de la forme :

$$R_j : \text{SI } (x_1 \text{ est } A_{j1} \text{ et } \dots \text{ et } x_n \text{ est } A_{jn}) \text{ ALORS } (y \text{ est } Y_j) \quad (\text{éq. II-9})$$

$A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jn}$ sont les sous-ensembles flous représentant l'espace flou dans lequel la règle floue R_j est appliquée. Y_j sont les sous-ensembles flous ($j \in \{1, \dots, m\}$) de l'espace flou de sortie Y .

L'interface de fuzzification calcule, pour chacune des prémisses, le degré d'appartenance en fonction de la fonction d'appartenance associée et l'interface de défuzzification donne la valeur (non floue) de la sortie y en accord avec la fonction d'appartenance associée à Y et le mécanisme d'inférence.

Les modèles flous proposés par TAKAGI et SUGENO [TAK-85] consistent à la combinaison de plusieurs sous-modèles linéaires dont les sorties sont pondérées en accord avec des règles floues de façon à représenter le comportement des entrées/sorties d'un système non-linéaire. Dès lors, chaque règle peut être considérée comme la définition d'un modèle "local". La modélisation par la logique floue est particulièrement intéressante, car il a été montré que les Contrôleurs en Logique Floue sont des méthodes destinées à l'approximation de fonctions universelles [WAN-92a][CAS-95]. C'est à dire qu'ils sont capables d'approcher, à une valeur ε -près choisie, toute fonction réelle définie continue sur un compact et ceci avec des hypothèses peu restrictives telles que :

- des fonctions d'appartenance de formes gaussiennes, triangulaires ou trapézoïdales,

- un mécanisme d'inférence qui pour passer d'une règle composée de plusieurs prémisses et d'une conclusion (éq. II-9) à une règle simple (éq. II-8) résultante composée d'une prémisse et de la même conclusion utilise une t-norme T (le critère minimum est une t-norme.)

T, définie sur $[0, 1]$, est une t-norme (éq. II-10), si elle satisfait les quatre conditions suivantes :

$$\forall (x, y, z) \in [0, 1]^3, T(x, 1) = x \quad (\text{éq. II-10})$$

$$x \leq z \Rightarrow T(x, y) \leq T(z, y)$$

$$T(x, y) = T(y, x)$$

$$T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$$

Cette universalité des C.L.F est en parfaite adéquation avec le problème d'approximation de l'erreur systématique face à laquelle nous sommes confrontés. Les C.L.F ne peuvent être utilisés que lorsque l'on dispose d'une base d'apprentissage reliant les entrées à la sortie. Dans notre étude nous disposons de fonctions fractales théoriques à même de constituer une excellente base d'apprentissage. Il reste néanmoins à définir les attributs (entrées) pertinents(es) des courbes fractales capables de caractériser le comportement de l'erreur entre la dimension fractale estimée De_1 en sortie de l'étape de pondération et la vraie dimension fractale D.

La méthode d'estimation de la dimension fractale proposée est celle qui est représentée à la Figure II-7. A partir d'une courbe présentée en entrée, on mesure De_1 qui correspond à la sortie de l'étape de pondération et qui est la valeur estimée de la dimension fractale de la courbe compte tenu des erreurs stochastiques. En considérant toujours la courbe en entrée, on mesure trois autres caractéristiques : DENS, RD et R qui correspondent respectivement à la DENSité, au Degré de Rugosité et au domaine de la courbe (noté R) associée à $f : x \in D_f \rightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Deux autres valeurs SW et Q sont introduites. Elles correspondent respectivement au nombre de valeurs utilisées pour la mesure du Degré de Rugosité et au pas d'échantillonnage. En entrée du Contrôleur en Logique Floue, on présente le vecteur multi-dimensionnel X ($X \in \mathcal{R}_+^{*6}$) à six composantes mesurables, définies positives, dont quatre sont calculées de manière objective (De_1 , DENS, RD et R) et deux sont données par l'opérateur ou bien imposées par les appareils de mesure, dans le cas où f est le résultat d'une expérience physique (SW et Q). En sortie du Contrôleur en Logique Floue, on récupère une estimation de l'erreur

\hat{y} (scalaire) qu'il faut ajouter à la sortie de l'étape de pondération afin de rapprocher De_1 de la dimension fractale D ($De_2 = De_1 + \hat{y}$).

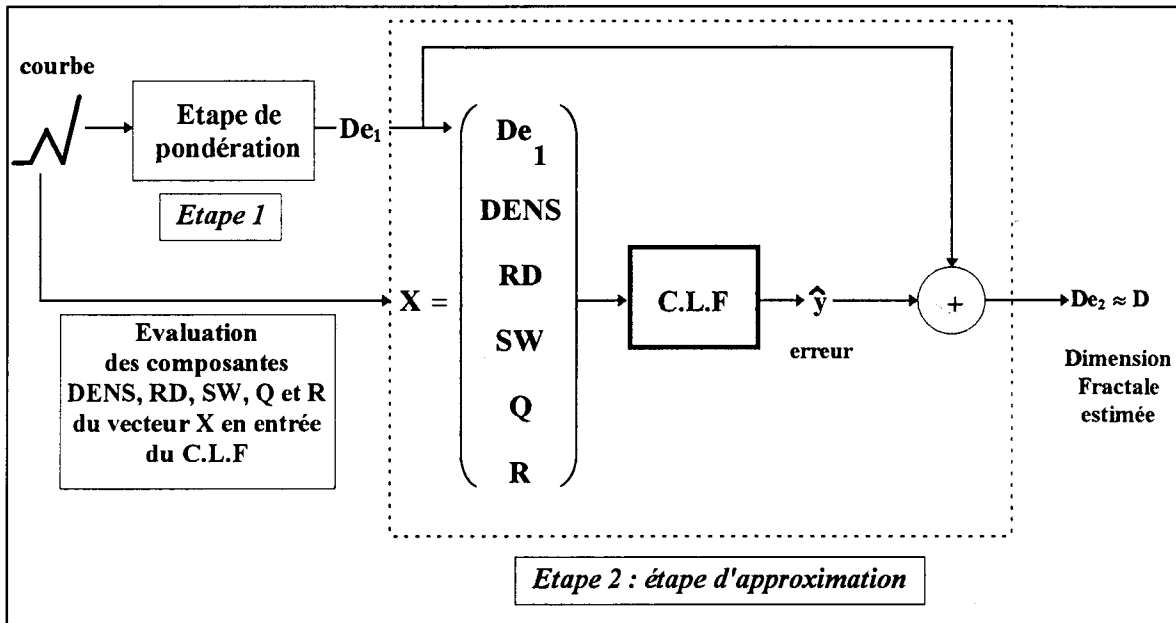


Figure II-7 : Schéma général de la méthode d'estimation de la dimension fractale

II.3.3. Définitions des variables d'entrées

Les variables d'entrées du C.L.F sont calculées à partir de la courbe présentée en entrée de la première étape de pondération. La sortie De_1 (dimension fractale estimée par la méthode de dénombrement des boîtes à laquelle sont retranchées les erreurs stochastiques) constitue une entrée importante du C.L.F. Dans toute la suite de notre étude, on étudie la dimension fractale pour une fonction réelle, continue f , définie sur l'intervalle fermé $[x_{\min}, x_{\max}]$ soit :

$$f : \begin{array}{l} D_f = [x_{\min}, x_{\max}] \rightarrow \mathfrak{R} \\ c \rightarrow f(c). \end{array}$$

La fonction f est échantillonnée suivant un pas d'échantillonnage constant (pas). De cette manière, on obtient une courbe E (un ensemble d'échantillons pris à partir de la fonction f). La courbe E est constituée de q segments disjoints I_k dans le plan dont les extrémités sont jointives :

$$E \text{ est définie par } \left\{ \begin{array}{l} \text{pas} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{q} \\ E = \bigcup_{k=0}^{q-1} I_k \\ I_k = [(c_k, f(c_k)) ; (c_{k+1}, f(c_{k+1}))] \\ k \in \{0, \dots, q\}, c_k = x_{\min} + k \times \text{pas} \end{array} \right.$$

A partir de cette définition, nous allons décrire cinq composantes du vecteur d'entrée du Contrôleur en Logique Floue : DENS, RD, SW, Q et R.

II.3.3.1. La DENSité (DENS)

Dans toute la suite, cette variable sera nommée DENS. DENS est une composante mesurable à partir de la courbe E. Elle est définie comme le rapport de la longueur de l'intervalle de définition de f ($D_f = [x_{\min}, x_{\max}]$) sur la somme des longueurs L_k des segments I_k (Figure II-8).

$$\text{DENS} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\sum_{k=0}^{q-1} L_k} \quad (\text{éq. II-11})$$

$$L_k = \sqrt{(c_{k+1} - c_k)^2 + (f(c_{k+1}) - f(c_k))^2}$$

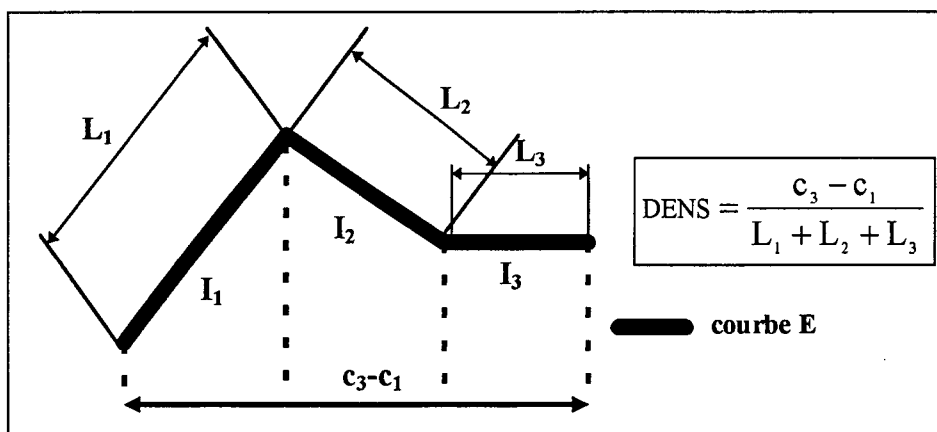


Figure II-8 : Définition de la variable d'entrée DENS

DENS est une variable inversement proportionnelle à la longueur de la courbe E. Plus la courbe est irrégulière (D augmente), plus sa longueur tend à croître. DENS est donc en relation avec la dimension fractale de f qui caractérise aussi l'irrégularité de la fonction comme nous avons pu le constater dans la section I.1. DENS et la dimension fractale varient inversement l'une par rapport à l'autre (Figure II-9).

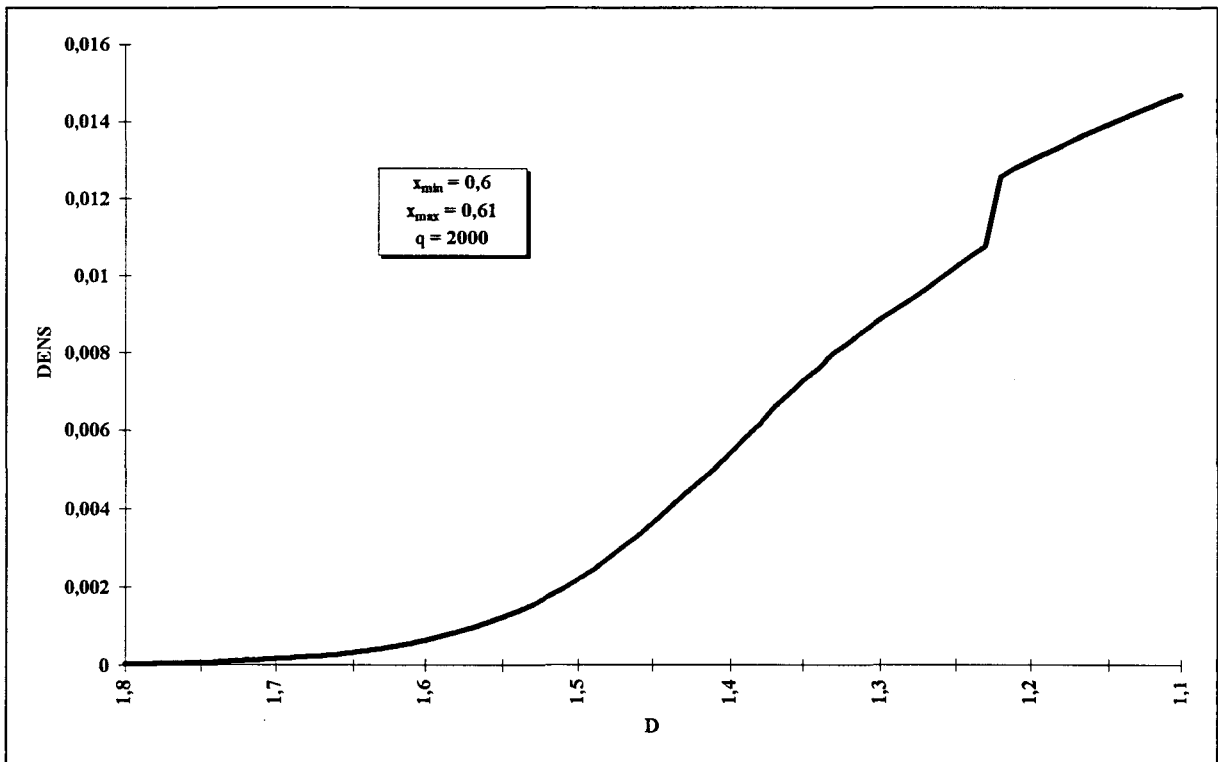


Figure II-9 : DENS en fonction de la dimension fractale pour la courbe de WEIERSTRASS-MANDELBROT (WM) avec $b = 2,10$ (éq. I-19)

II.3.3.2. Le Degré de Rugosité et la taille de la fenêtre (RD et SW)

Les attributs Degré de Rugosité et taille de la fenêtre seront désignés respectivement par RD (Rough Degree) et SW (Sliding Window). BASSINGTHWAIGHTE [BAS-94] ainsi que Mandelbrot [MAN-69a][MAN-69c] préconisent de prendre en compte la tendance de la courbe E. En effet, la variable DENS ne suit pas les variations locales de la courbe, ses croissances ou décroissances. La définition du Degré de Rugosité est reliée à la projection de la courbe E sur la courbe de la moyenne mobile E', déterminée à l'aide de la courbe E et du nombre SW de points $(c_k, f(c_k))$ pris en compte pour le calcul de cette moyenne mobile ($0 < SW < q$). La courbe E', moyenne mobile de E, est calculée à partir de la courbe E en réalisant la moyenne sur une fenêtre glissante de SW échantillons de points.

$$E' \text{ est définie par } \left\{ \begin{array}{l} \text{pas} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{q} \\ E' = \bigcup_{k=0}^{q-SW-1} I'_k \\ I'_k = [(c_k, d_k), (c_{k+1}, d_{k+1})] \\ k \in \{0, \dots, q-SW\}, \quad c_k = x_{\min} + k \times \text{pas} \\ d_k = \frac{1}{SW} \cdot \sum_{i=k}^{k+SW} f(c_i) \\ \text{avec } 0 < SW < q \end{array} \right. \quad (\text{Figure II-11}).$$

L'attribut RD, qui est une fonction de SW, s'exprime de la façon suivante (Figure II-10) :

$$RD = \frac{\sum_{k=0}^{q-SW-1} \Delta c_k}{\sum_{k=0}^{q-SW-1} L_k} \quad (\text{éq. II-12})$$

$$\Delta c_k = \sqrt{(c_{k+1} - c_k)^2 + (d_{k+1} - d_k)^2}$$

Pour le cas particulier $SW = 1$, si nous omettons le segment I_{q-1} , les courbes E et E' sont confondues et $RD = 1$. Si SW tend vers q , la courbe E' tend vers un segment de droite et ne traduit plus les variations locales de la courbe E . En fonction du nombre de segments (q) de la courbe E , SW doit prendre des valeurs compatibles de telle façon que la courbe E' traduise la tendance de la courbe E . Quelle que soit la valeur de SW , RD varie en sens inverse par rapport à la dimension fractale D , car l'irrégularité (et par voie de conséquence, la longueur) de la courbe E augmente (Figure II-12).

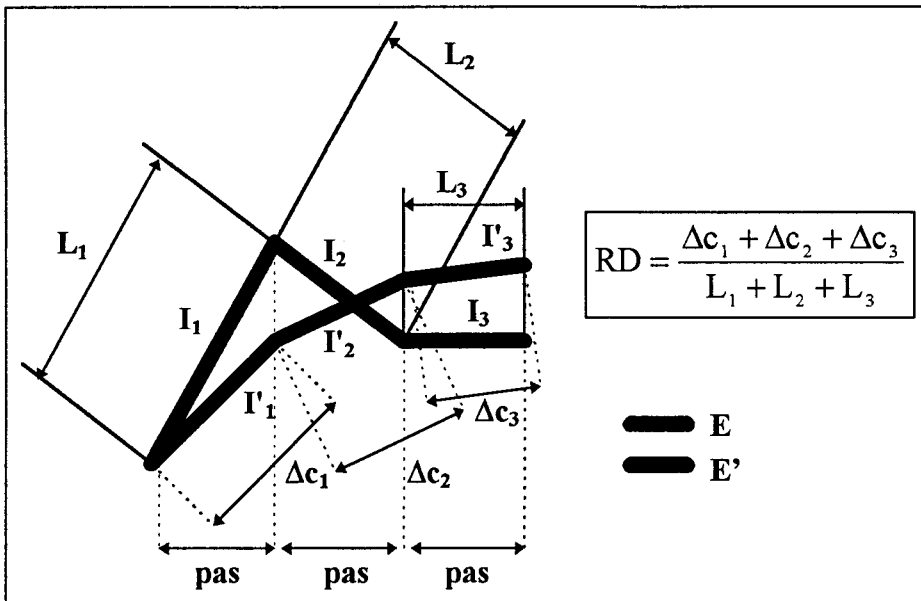


Figure II-10 : Définition de la variable d'entrée RD

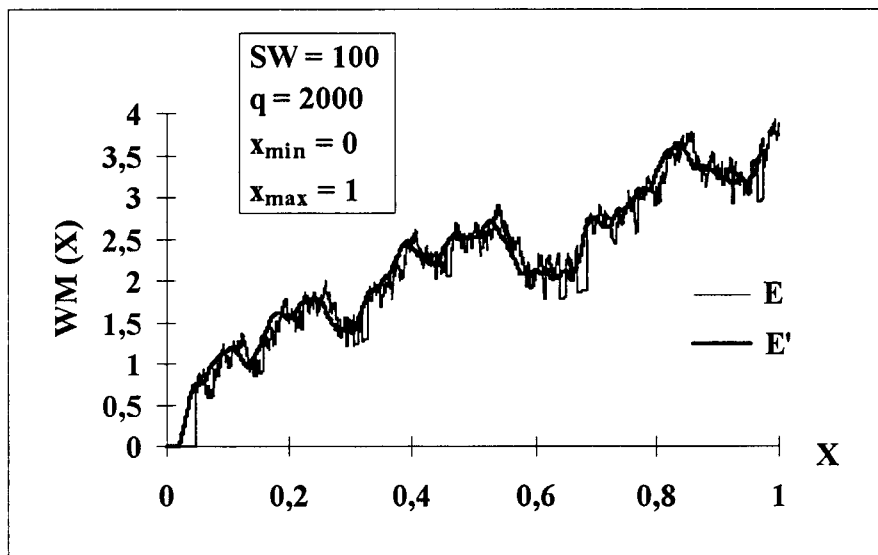


Figure II-11 : Courbes E et E' de la fonction de WEIERSTRASS-MANDELBROT avec $b=2,10$ et $D = 1,50$ (éq. I-19)

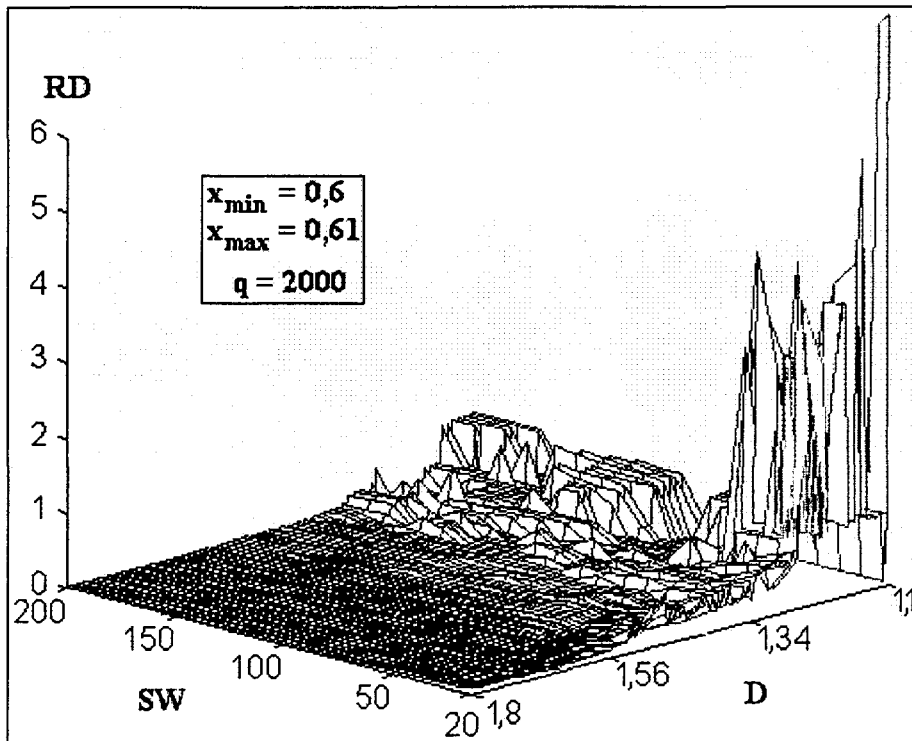


Figure II-12 : RD en fonction de la dimension fractale et de SW pour la courbe de WEIERSTRASS-MANDELBROT (WM) avec $b = 2,10$ (éq. I-19)

II.3.3.3.L'échantillonnage (Q)

Nous avons vu que pour se prêter aux calculs, la fonction f définie sur son intervalle D_f était échantillonnée. La courbe E , représentative de la fonction f sur D_f , est constituée de q segments jointifs. L'entrée Q est égale à $q+1$ valeurs. De cette entrée dépend la finesse de résolution de la courbe E . Lorsque que la fonction f est le résultat d'une expérience physique, Q représente la résolution de l'appareil de mesure.

II.3.3.4.Domaine de variation de la courbe (R)

Le domaine de variation de la courbe R est la différence en valeur absolue entre la valeur maximale et la valeur minimale de la fonction f sur son intervalle de définition D_f . Au cours de la section I.2.4.2., nous avons remarqué que des transformations élémentaires de la courbe (comme une amplification-Figure II-13) entraînaient une dispersion des points dans le plan Log-Log. Ce résultat est gênant, d'autant plus que les courbes sont souvent issues de mesures avec une amplification arbitraire en partie imposée par les normes des appareillages. R est défini ainsi :

$$R = \left| \max_{k \in \{0,1,\dots,q\}} \{f(c_k)\} - \min_{l \in \{0,1,\dots,q\}} \{f(c_l)\} \right|$$

(éq. II-13)

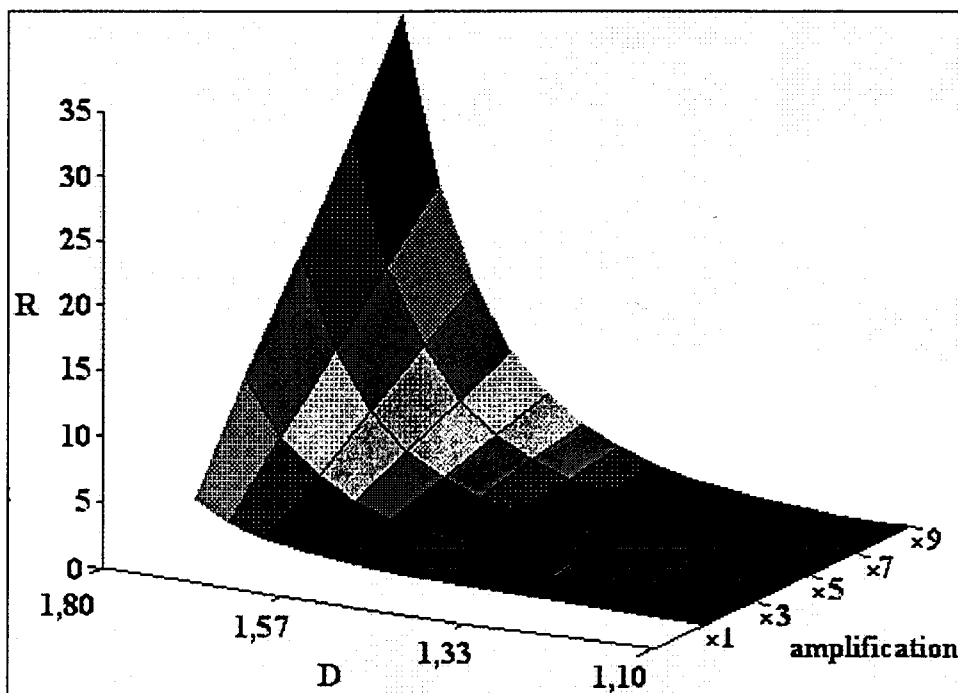


Figure II-13 : R en fonction de l'amplification et de la dimension fractale D de la courbe WM

II.3.3.5. Corrélation des entrées

C'est de la pertinence des entrées du Contrôleur en Logique Floue et de leur faible inter-indépendance que dépend la précision dans l'estimation de l'erreur. A l'entrée du Contrôleur en Logique Floue nous présentons un vecteur d'entrée X de dimension six. La pertinence des entrées sera évaluée avec la précision de la sortie du C.L.F. En ce qui concerne la dépendance des entrées, nous avons calculé la corrélation entre chacune des entrées pour les courbes de WEIERSTRASS-MANDELBROT (WM avec $b = 2,10$ - (éq. I-19)) et TAKAGI (T - (éq. I-21)) définie par :

(éq. II-14)

$$n \in \{1, \dots, N\}, \Omega = \{X_n\}, X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{6n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} De_1 \\ DENS \\ RD \\ SW \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

$$i \in \{1, \dots, 6\}, B_i = (x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{iN})^T - T : \text{opérateur transposé}$$

$$\text{CORRELATION } (B_i, B_j) = \frac{E(B_i \cdot B_j) - E(B_i) \cdot E(B_j)}{\sqrt{E(B_i^2) \cdot E(B_j^2)}} \\ (i, j) \in \{1, \dots, 6\}^2$$

E désigne l'espérance mathématique discrète

Ω (éq. II-14) représente l'ensemble des N échantillons de la base d'apprentissage. Les deux courbes WM et T, de dimension fractale théorique connue (éq. I-19) et (éq. I-25), sont construites en faisant varier simultanément D, Q et SW :

$$D = 1,1 + i \times 0,02 \text{ avec } i \in \{0, 1, \dots, 35\}$$

(éq. II-15)

$$Q = 500 + j \times 500 \text{ avec } j \in \{0, 1, \dots, 3\}$$

$$SW = 20 + k \times 10 \text{ avec } k \in \{0, 1, \dots, 18\}$$

Pour chacune des courbes, on obtient alors 2736 ($36 \times 4 \times 19$) courbes théoriques différentes. A partir de ces courbes, on détermine les vecteurs X_n ($n \in \{0, 1, \dots, 2735\}$) de Ω . Le Tableau II-2 et le Tableau II-3 nous renseignent sur les coefficients de corrélation entre les différentes variables. Le Tableau II-4 est obtenu en appliquant différents facteurs d'amplification sur la courbe WM. Chaque fonction WM obtenue en faisant varier D, Q et SW (éq. II-15), est multipliée par un gain prenant des valeurs discrètes dans l'intervalle [0,5 ; 10].

WM	D	De ₁	DENS	RD	SW	Q	R
D	1,000	0,995	-0,726	-0,287	0,016	-0,023	0,816
De ₁		1,000	-0,741	-0,281	0,016	0,005	0,782
DENS			1,000	0,251	-0,023	-0,184	-0,427
RD				1,000	-0,144	0,044	-0,162
SW					1,000	0,020	0,009
Q						1,000	-0,012
R							1,000

Tableau II-2 : Corrélations entre les variables d'entrée pour la courbe WM

T	D	De ₁	DENS	RD	SW	Q	R
D	1,000	0,990	-0,719	-0,346	0,022	-0,031	0,851
De ₁		1,000	-0,740	-0,353	0,024	0,060	0,810
DENS			1,000	0,355	-0,026	-0,158	-0,422
RD				1,000	-0,296	0,085	-0,203
SW					1,000	0,036	0,016
Q						1,000	-0,008
R							1,000

Tableau II-3 : Corrélations entre les variables d'entrée pour la courbe T

WM	D	De ₁	DENS	RD	SW	Q	R
D	1,000	0,996	-0,492	-0,244	0,016	-0,023	0,665
De ₁		1,000	-0,503	-0,239	0,016	0,005	0,635
DENS			1,000	0,129	-0,016	-0,125	-0,248
RD				1,000	-0,105	0,049	-0,105
SW					1,000	0,019	0,007
Q						1,000	-0,009
R							1,000

Tableau II-4 : Corrélations entre les variables d'entrée pour la courbe WM avec variations des amplifications

On peut noter l'excellente corrélation entre la dimension fractale D et la dimension fractale estimée De₁ en sortie de l'étape de pondération. La dépendance de ces deux dernières variables n'est nullement affectée par des amplifications de la courbe. Les erreurs stochastiques ont été fortement atténuées.

Les variables DENS et RD varient en sens inverse de la dimension fractale. Elles ont été définies comme le rapport d'une longueur de l'intervalle sur la longueur de la courbe. Plus la dimension augmente, plus la longueur de la courbe augmente et par conséquent plus ces rapports diminuent. Les quatre variables De₁, DENS, RD et R sont peu corrélées entre elles, surtout si le facteur gain est pris en compte. En ce qui concerne les variables imposées par l'opérateur ou l'appareil de mesure (SW et Q), elles sont à l'évidence indépendantes.

II.3.4. Définition de la sortie du Contrôleur en Logique Floue

D'après le schéma général de la méthode d'estimation de la dimension fractale proposée (Figure II-7), le Contrôleur en Logique Floue estime l'erreur systématique \hat{y} à apporter à la sortie De₁ de l'étape de pondération. Dans la mesure où nous estimons la dimension fractale de courbes plongées dans \mathcal{R}^2 , les dimensions sont comprises dans l'intervalle [1, 2]. L'erreur commise en sortie de l'étape de pondération est donc comprise dans l'intervalle [-1, 1]. Pour la

fonction d'approximation de l'erreur systématique, nous avons fait le choix de découper l'univers de sortie $[-1, 1]$ en plusieurs intervalles disjoints qui seront traités chacun comme autant de classes. Les classes sont de tailles différentes de façon à mieux représenter les faibles erreurs par rapport aux grandes erreurs et uniformes suivant l'échelle logarithmique.

Contrôleur en Logique Floue (C.L.F)	
ENTREE multi-dimensionnelle $X \in (\mathcal{R}_+)^6$	SORTIE monodimensionnelle estimation de l'erreur \hat{y} ($= De_2 - De_1$)
$X = \begin{pmatrix} De_1 \\ DENS \\ RD \\ SW \\ Q \\ R \end{pmatrix}$	$\hat{y} \in [-1, 1]$ 8 classes C_0 à C_7 $\hat{y} \in C_0, \hat{y} \in [-1, -10^{-1}]$ $\hat{y} \in C_1, \hat{y} \in]-10^{-1}, -10^{-2}]$ $\hat{y} \in C_2, \hat{y} \in]-10^{-2}, -10^{-3}]$ $\hat{y} \in C_3, \hat{y} \in]-10^{-3}, 0]$ $\hat{y} \in C_4, \hat{y} \in]0, 10^{-3}]$ $\hat{y} \in C_5, \hat{y} \in]10^{-3}, 10^{-2}]$ $\hat{y} \in C_6, \hat{y} \in]10^{-2}, 10^{-1}]$ $\hat{y} \in C_7, \hat{y} \in]10^{-1}, 1]$

Tableau II-5 : Entrées/Sortie du Contrôleur en Logique Floue

Les variables d'entrée et la variable de sortie étant définies, il s'agit de produire les règles floues du C.L.F qui relieront les variables d'entrée et la sortie scalaire \hat{y} de l'erreur à apporter à De_1 .

II.3.5. Génération des règles floues

Une base de règles floues peut être construite soit à partir d'une connaissance experte du système (les relations entre les variables linguistiques en entrée et la sortie sont connues intuitivement et peuvent être exprimées sous la forme SI ... ALORS ...), soit par apprentissage en fonction des entrées et des sorties souhaitées. Aucune connaissance a priori n'est disponible entre les variables d'entrée et l'erreur systématique commise sur l'estimation de la dimension fractale. Intuitivement, en fonction de la définition de nos variables d'entrée, des mesures opérées sur les courbes et des connaissances dont nous disposons sur la géométrie fractale, il est possible d'énoncer quelques règles simples telles que :

SI $De_1 \in [1,4 ; 1,6]$ **ALORS** \hat{y} est petit,

SI ($(De_1 \in [1,1 ; 1,4[$) **OU** ($De_1 \in]1,6 ; 1,8$)) **ALORS** \hat{y} est grand.

En effet, l'erreur devient faible pour une dimension fractale comprise dans l'intervalle $[1,4 ; 1,6]$ (cf. section I.2.4.1.). Ou bien encore (cf. section I.2.4.2.) :

SI ((Q est grand) **ET** (De_1 est grand)) **ALORS** \hat{y} est petit

SI ((Q est grand) **ET** (De_1 est petit)) **ALORS** \hat{y} est grand

Une discrétisation plus fine de la fonction f permet à l'étape de pondération d'estimer plus précisément la dimension fractale.

Toutefois, nous avons à notre disposition une base d'apprentissage de courbes fractales dont la dimension fractale est connue a priori. A partir de ces courbes, il est aisé de mesurer les valeurs des variables d'entrée et de connaître à quelle classe d'erreur elles doivent être rapprochées. Une méthode d'extraction de règles, appelée SOFM (Self-Organizing Fuzzy Modelling system), est proposée par TONG [TON-80][WAN-92a]. Elle se décompose en trois parties. Dans un premier temps, on se fixe une base de règles a priori en divisant l'espace des entrées (Figure II-6) pour chacune des variables en plusieurs sous-espaces (petite valeur positive, valeur moyenne positive, grande valeur positive ... etc). Ensuite à l'aide d'un critère de minimisation de l'erreur entre les entrées et les sorties, on calcule la viabilité (pourcentage de chaque règle parmi toutes les règles de la base pour la sortie désirée) des règles posées. La modification des règles s'effectue par la résolution des conflits entre les règles. Parmi deux règles en contradiction, soit on en supprime une au hasard ou bien on ne retient que la règle qui apparaît le plus souvent dans la base de règles. Des approches similaires sont proposées avec l'apprentissage des règles et des fonctions d'appartenance simultanément ou séparément [CAR-96][TAN-96]. L'inconvénient de ces méthodes est que la construction du modèle flou est largement tributaire de la structure des règles ou des fonctions d'appartenance imposées a priori et que nécessairement de nombreuses intersections dans les sous-espaces de l'espace des entrées restent non résolues. Une méthode, exempte de définition de règles a priori et capable de résoudre les intersections dans l'espace des entrées est préférable.

Notre méthode d'extraction des règles floues est basée sur [ABE-95] et s'appuie sur les méthodes classiques de classification, lesquelles, à partir de vecteurs d'entrée connus,

définissent les règles par récurrence en considérant respectivement les hyper-volumes d'activation et d'inhibition (désignés respectivement par les lettres A et I) qui délimitent les régions floues de l'espace des attributs qui seront associés ou non à chaque classe en sortie. Les frontières des hyper-volumes d'inhibition correspondent aux intersections entre les différents hyper-volumes d'activation.

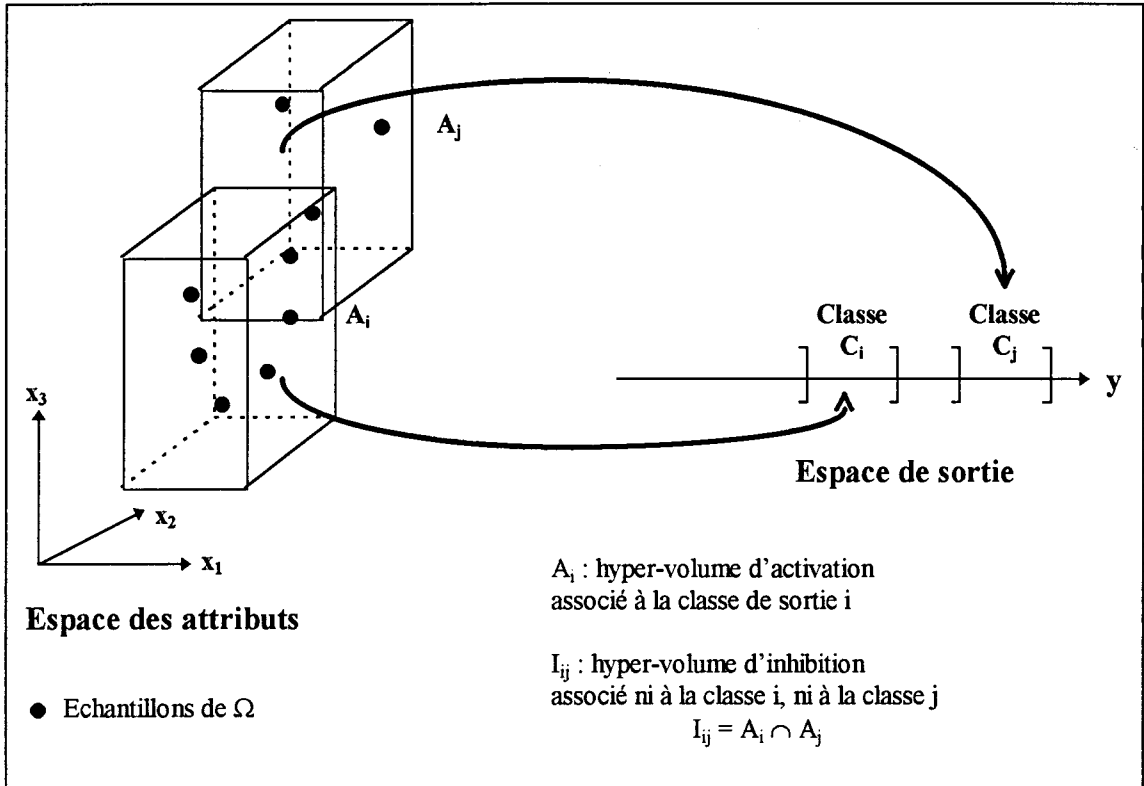


Figure II-14 : Hyper-volumes d'Activation et d'Inhibition dans le cas trois Entrées/une Sortie

La génération des règles floues (Figure II-14) se décompose suivant la récurrence ci-dessous :

Initialisation de la récurrence (niveau $l = 1$)

$$n \in \{1, \dots, N\}, \Omega = \{X_n\} \text{ avec } X_n = (x_{1n}, \dots, x_{kn}, \dots, x_{6n})^T$$

A partir de l'ensemble Ω des N échantillons de la base d'apprentissage, les frontières des hyper-volumes d'activation $A_{ii}(1)$ de niveau 1 correspondant à une sortie de la classe C_i ($i \in \{0, 1, \dots, 7\}$ - Tableau II-5) sont définies par respectivement les bornes inférieures v_{iik} et supérieures V_{iik} :

$$A_{ii}(1) = \{X_n / X_n \in \Omega \text{ et pour } k \in \{1, \dots, 6\}, v_{iik}(1) \leq x_{kn} \leq V_{iik}(1)\}$$

$$\text{avec } v_{iik}(1) = \min_{(k,n) \in \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, N\}} \{x_{kn}\} \text{ et } V_{iik}(1) = \max_{(k,n) \in \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, N\}} \{x_{kn}\}.$$

Les régions d'inhibition $I_{ij}(1)$ de niveau 1 sont définies comme les intersections entre deux hyper-volumes d'activation $A_{ii}(1)$ et $A_{jj}(1)$ distincts. Leurs bornes inférieures et supérieures seront notées respectivement $w_{ijk}(1)$ et $W_{ijk}(1)$:

$$\forall (i, j) \in \{0, 1, \dots, 7\}^2, i \neq j, I_{ij}(1) = A_{ii}(1) \cap A_{jj}(1)$$

$$\text{où } v_{iik}(1) \leq w_{ijk}(1) \leq W_{ijk}(1) \leq V_{ijk}(1)$$

Dès lors, une règle floue de niveau 1 s'énonce

Si $X \in A_{ii}(1)$ ET $X \notin I_{ij}(1)$ alors $y \in C_i$

Récurrence (niveau l , avec $l \geq 2$)

Soit l'ensemble $\Omega_{ij}(l)$, de niveau l , des éléments de Ω appartenant à $I_{ij}(l)$

$$\forall (i, j) \in \{0, 1, \dots, 7\}^2, i \neq j, \Omega_{ij}(l) = \{X_n / X_n \in \Omega \text{ et } w_{ijk}(l) \leq x_{kn} \leq W_{ijk}(l) \text{ pour } k \in \{1, \dots, 6\}\}$$

Si $\Omega_{ij}(l-1) \neq \emptyset$, alors on définit les hyper-volumes d'activation $A_{ij}(l)$ et d'inhibition $I_{ij}(l)$ de niveau l par :

$$\forall (i, j) \in \{0, 1, \dots, 7\}^2, A_{ij}(l) = \{X_n / X_n \in \Omega_{ij}(l-1) \text{ et } v_{iik}(l) \leq x_{kn} \leq V_{iik}(l) \text{ pour } k \in \{1, \dots, 6\}\}$$

avec pour tous les vecteurs X_n de $\Omega_{ij}(l-1)$,

$$v_{iik}(l) = \min_{(k,n) \in \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, N\}} \{x_{kn}\} \text{ et } V_{iik}(l) = \max_{(k,n) \in \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, N\}} \{x_{kn}\}$$

et

$$\forall (i, j) \in \{0, 1, \dots, 7\}^2, i \neq j, I_{ij}(l) = A_{ij}(l) \cap A_{ji}(l)$$

$$\text{où } v_{iik}(l) \leq w_{ijk}(l) \leq W_{ijk}(l) \leq V_{ijk}(l)$$

Condition d'arrêt de la récurrence

On définit les hyper-volumes d'activation et d'inhibition par récurrence jusqu'à ce qu'il n'existe plus d'intersection entre tous les hyper-volumes d'activation de niveau l ($l \geq 2$)

$$\forall (i, j) \in \{0, 1, \dots, 7\}^2, i \neq j, I_{ij}(l) = \emptyset$$

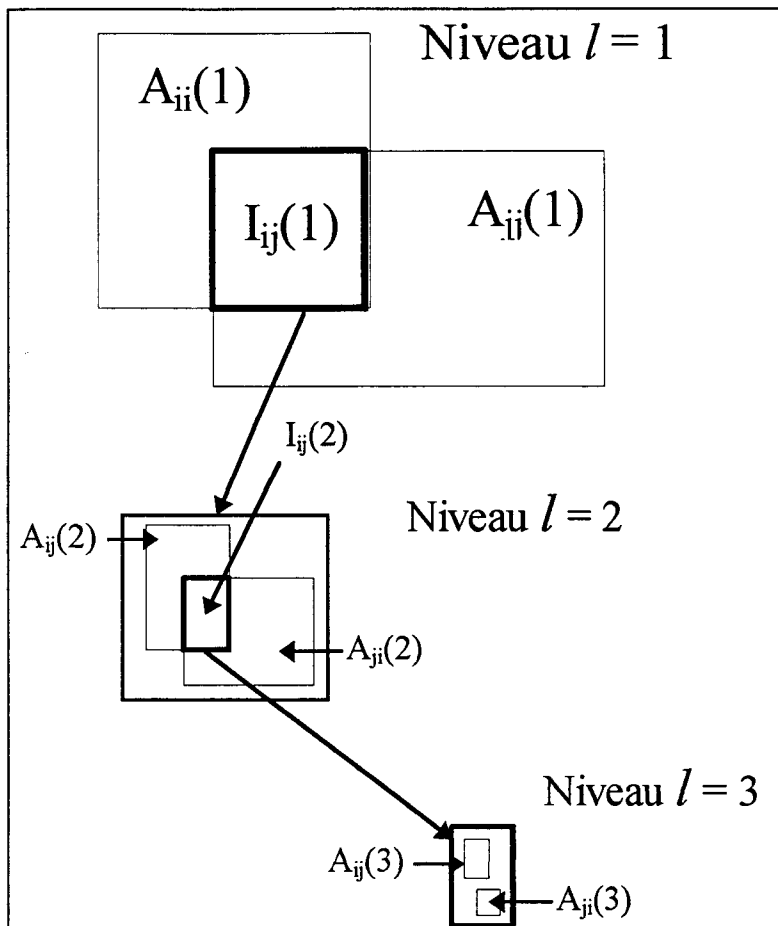


Figure II-15 : Définition récursive des hyper-volumes d'activation et d'inhibition dans le cas où $k \in \{1, 2\}$ - espace à 2 attributs

L'espace des attributs dont la partition est définie par les sous-espaces flous $A_{ij}(l)$ et $I_{ij}(l)$, nous permet d'énoncer les règles floues $R_{ij}(l)$ de niveau l :

$$R_{ij}(l) : \text{Si } X \in A_{ij}(l) \text{ ET } X \notin I_{ij}(l) \text{ ALORS } y \in C_i \quad (\text{éq. II-16})$$

Remarquons qu'ici $I_{ij}(l)$ est égal à $I_{ji}(l)$ et qu'au niveau $l=1$, les indices i et j sont identiques pour les hyper-volumes d'activation $A_{ij}(1)$.

Comme nous pouvons le constater, cette approche se prête aisément aux calculs mais devient difficile à appliquer si les classes en sortie entraînent d'importants recouvrement dans l'espace des attributs. Dans la mesure où la sortie du C.L.F est un scalaire et que les classes C_i sont jointives, il n'est pas possible d'avoir une intersection entre plus de deux hyper-volumes d'activation.

II.3.6. Interface de fuzzification

II.3.6.1. Les fonctions d'appartenance

Des fonctions d'appartenance doivent être associées à chacun des sous-espaces de l'espace des attributs. Nous avons noté que les Contrôleurs en Logique Floue sont des méthodes destinées à l'approximation de fonctions universelles [WAN-92b][CAS-95] pourvu que ces fonctions d'appartenance soient trapézoïdales quelconques (Figure II-16 et Figure II-17) ou encore de formes gaussiennes (Figure II-18). Nous définissons les fonctions d'appartenance de telle façon que la valeur du degré d'appartenance du vecteur X présenté en entrée du C.L.F soit maximum (proche de 1) lorsque X se situe à l'intérieur des frontières des hyper-volumes d'activation et d'inhibition et qu'elle décroisse en s'éloignant des frontières.

Nous nommerons par $m_Z(x_k, \gamma_k)$, le degré d'appartenance en accord avec la fonction d'appartenance de la variable x_k pour le sous-espace flou Z . γ_k est un paramètre interne de la fonction d'appartenance caractérisant sa forme pour la variable x_k .

Si $Z = A_{ij}(I)$, $u_k = v_{ijk}(I)$ et $U_k = V_{ijk}(I)$

et si $Z = I_{ij}(I)$, $u_k = w_{ijk}(I)$ et $U_k = W_{ijk}(I)$

Les fonctions d'appartenance sont paramétrées (γ_k) et les hyper-volumes d'activation et d'inhibition auront la même forme (trapézoïdale ou gaussienne) mais différeront par le choix de leur paramètres. Finalement le degré d'appartenance du vecteur d'entrée X à l'ensemble Z se définit par :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \in Z, m_Z(X) = \min_{k \in \{1, \dots, 6\}} \{m_Z(x_k, \gamma_k)\} \quad (\text{éq. II-17})$$

$(i, j) \in \{0, 1, \dots, 7\}^2, Z = \{A_{ij}(I), I_{ij}(I)\}$

◆ *Fonction d'appartenance trapézoïdale symétrique* (Figure II-16)

La forme de cette fonction d'appartenance est représentée à la Figure II-16. Les pentes de part et d'autre des bornes de l'hyper-volume pour la variable k ($k \in \{1, 2, \dots, 6\}$) sont symétriques et sont égales à γ_k qui est un paramètre de sensibilité. Plus la pente sera grande, plus la

frontière sera abrupte et plus on tend vers une appartenance de la variable x_k à l'ensemble Z au sens usuel du terme mathématique (0 ou 1). Si la pente devient trop faible, elle tend à recouvrir le noyau d'un autre ensemble Z' flou. Par conséquent, une pente faible gomme la partition de l'espace des attributs et donc conduit à une perte de précision. Pour une variable x_k et une fonction trapézoïdale symétrique, le degré d'appartenance de la variable x_k à l'ensemble flou Z s'exprime par :

$$m_z(x_k, \gamma_k) = \begin{cases} 1 & x_k \in [u_k, U_k] \\ 1 - \max(0, \min(1, \gamma_k(u_k - x_k))) & x_k < u_k \\ 1 - \max(0, \min(1, \gamma_k(x_k - U_k))) & x_k > U_k \end{cases} \quad (\text{éq. II-18})$$

avec $\forall k \in \{1, \dots, 6\}, \gamma_k \neq 0$

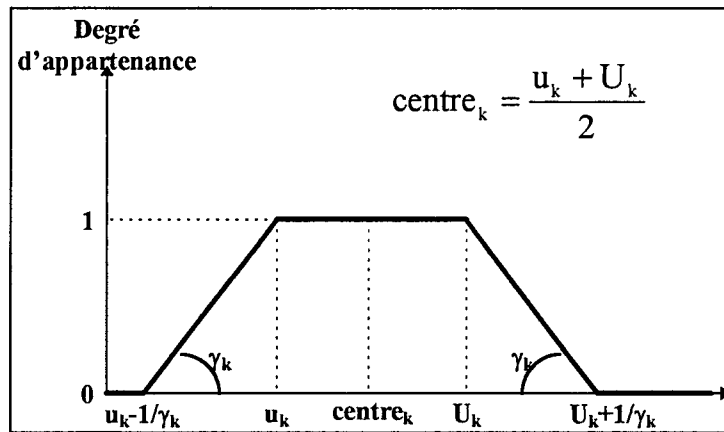


Figure II-16 : Fonction d'appartenance trapézoïdale symétrique

◆ *Fonction d'appartenance trapézoïdale asymétrique* (Figure II-17)

Cette forme de fonction d'appartenance se rapproche de la fonction trapézoïdale symétrique excepté le fait que les pentes de part et d'autre sont distinctes. Elle possède donc deux paramètres de sensibilité internes γ_k et γ'_k . Elle s'exprime de la façon suivante :

$$m_z(x_k, \gamma_k, \gamma'_k) = \begin{cases} 1 & x_k \in [u_k, U_k] \\ 1 - \max(0, \min(1, \gamma_k(u_k - x_k))) & x_k < u_k \\ 1 - \max(0, \min(1, \gamma'_k(x_k - U_k))) & x_k > U_k \end{cases} \quad (\text{éq. II-19})$$

avec $\forall k \in \{1, \dots, 6\}, \gamma_k \neq 0$ et $\gamma'_k \neq 0$

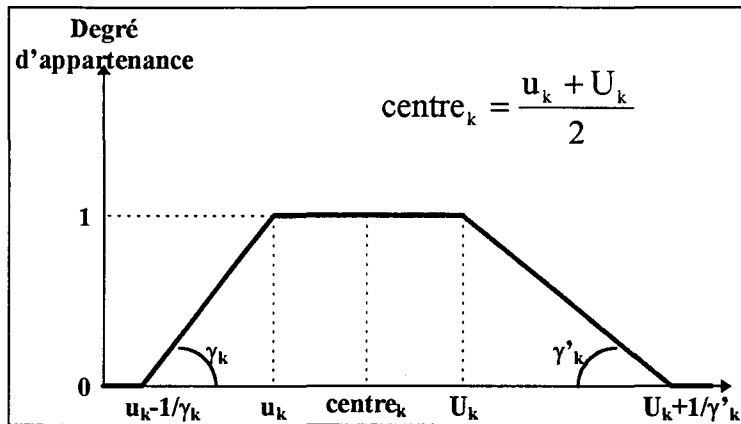


Figure II-17 : Fonction d'appartenance trapézoïdale asymétrique

◆ *Fonction d'appartenance gaussienne* (Figure II-18)

Cette fonction présente l'avantage de ne jamais s'annuler et par conséquent de prendre en considération tous les points du sous-espace flou associé à la variable x_k . La valeur maximale 1 est atteinte au centre du sous-espace flou (le noyau de la fonction d'appartenance est réduit à un point) et les points d'inflexion de la courbe sont positionnés par rapport à la taille de l'hyper-volume avec un paramètre de sensibilité γ_k . Elle est définie par :

$$m_z(x_k, \gamma_k) = \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_k - \text{centre}_k)^2}{\gamma_k^2}\right) \quad (\text{éq. II-20})$$

$$\text{centre}_k = \frac{u_k + U_k}{2}$$

avec $\forall k \in \{1, \dots, 6\}, \gamma_k \neq 0$

De la même façon que pour les fonctions d'appartenance trapézoïdales symétriques ou asymétriques, pour une forte valeur du paramètre γ_k , les aires délimitées par les fonctions d'appartenance gaussiennes auront tendance à se recouvrir et donc la partition de l'espace devient par conséquent moins nette. Inversement, pour une faible valeur du paramètre interne γ_k , on se rapproche de la définition usuelle d'appartenance au sens mathématique.

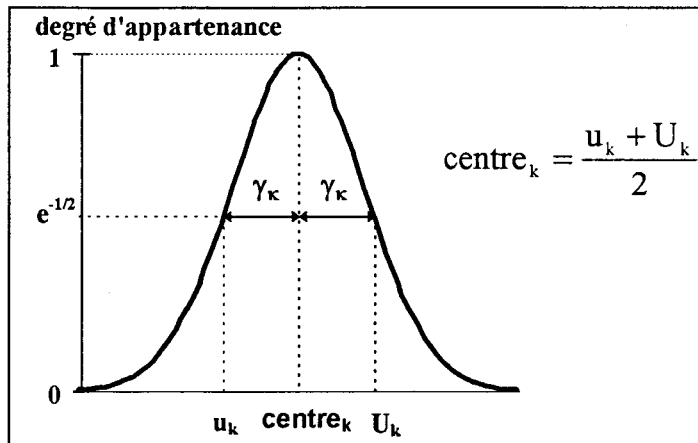


Figure II-18 : Fonction d'appartenance gaussienne pour le cas particulier où

$$\gamma_k = \frac{U_k - u_k}{2}$$

II.3.6.2. Mécanisme d'inférence flou

Les expressions des règles floues de niveau l (éq. II-16) comportent des prémisses combinées entre elles par des ET logiques (nous devons utiliser des t-normes (éq. II-10) pour nous assurer de définir une méthode pour approcher la dimension fractale universelle). Par conséquent, le degré d'appartenance $d_{R_{ij}(l)}(X)$ associée à la prémisse de la règle floue de niveau l $R_{ij}(l)$ du type (éq. II-16) pour une entrée X est donné par :

$$d_{R_{ij}(l)}(X) = \max(0, m_{A_{ij}(l)}(X) - m_{I_{ij}(l)}(X)) \quad (\text{éq. II-21})$$

Nous prenons la différence bornée (Tableau II-1) entre les hyper-volumes $A_{ij}(l)$ et $I_{ij}(l)$ de niveau l . Finalement, le degré d'appartenance final d'un vecteur X à un ensemble de règles floues $\{l \in \{1, \dots, L\}, R_{ij}(l)\}$ pour tous les niveaux l s'exprime par :

$$d_{R_{ij}}(X) = \max_{l \in \{1, \dots, L\}} \{d_{R_{ij}(l)}(X)\} \quad (\text{éq. II-22})$$

Nous prenons le maximum car il s'agit d'une réunion (Tableau II-1). En effet, si l'hyper-volume d'activation $A_{ij}(l+1)$ existe, il est inclus dans l'hyper-volume d'inhibition $I_{ij}(l)$. Les règles de niveaux l sont combinées entre elles par des OU (critère maximum). Maintenant le degré d'appartenance $d_i(X)$ d'un vecteur X donné entraînant une sortie dans la classe C_i ($i \in \{0, 1, \dots, 7\}$) est :

$$d_i(X) = \min_{\substack{(i,j) \in \{0, \dots, 7\}, i \neq j \\ A_i(1) \cap A_j(1) \neq \emptyset}} \{d_{R_{ij}}(X)\} \quad (\text{éq. II-23})$$

Pour (éq. II-23), l'opérateur minimum nous permet de nous assurer que si la classe de sortie C_i entraîne au niveau des régions de l'espace des attributs plus d'un chevauchement avec plus d'une autre classe en sortie, les conflits sont réglés indépendamment. En effet, si $d_{R_{ij}}(X) = 1$ et $d_{R_{ik}}(X) = 0$, cela signifie que X appartient à l'hyper-volume d'inhibition défini par les classes C_i et C_k et que de toute façon il ne doit pas être assigné à la sortie de classe C_i . Le mécanisme d'inférence flou résultant est représenté à la Figure II-19.

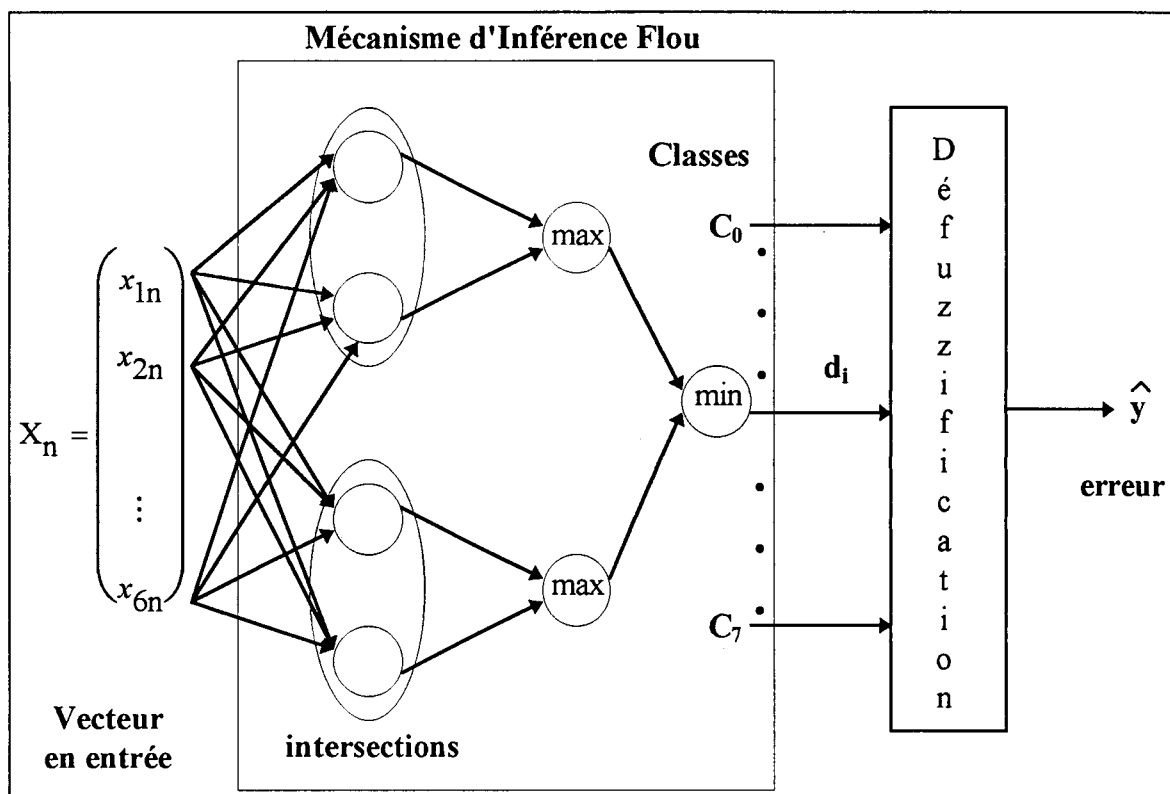


Figure II-19 : Mécanisme d'inférence flou

II.3.7. Interface de défuzzification

Afin de passer d'une valeur floue de la sortie à une valeur non-floue \hat{y} , la méthode la plus souvent utilisée est basée sur le centre de gravité [TAK-85] :

$$\hat{y} = \frac{\int d_i(X) \cdot y \cdot dy}{\int d_i(X) \cdot dy} \quad (\text{éq. II-24})$$

une bonne méthode pour approcher le centre de gravité, lorsque la sortie \hat{y} est comprise dans des classes C_i ($i \in \{0, \dots, 7\}$) définies par un intervalle $C_i =]C_{i\min}, C_{i\max}]$, est de considérer le centre de classe m_i et sa variance σ_i , tout en prenant en compte le fait que nos classes sont distribuées uniformément suivant l'échelle logarithmique et de calculer

$$\hat{y} = \frac{\sum_{i=0}^7 d_i(X) \cdot m_i \cdot \sigma_i}{\sum_{i=0}^7 d_i(X) \cdot \sigma_i} \quad (\text{éq. II-25})$$

$$m_i = \sqrt{C_{i\min} \times C_{i\max}}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{C_{i\max}}{C_{i\min}}}$$

avec $\forall i \in \{0, \dots, 7\}, C_{i\min} \neq 0$ et $C_{i\max} \neq 0$

Lorsque les valeurs $C_{i\min}$ et $C_{i\max}$ sont égales à zéro, on leur affecte la valeur 10^{-6} (pour les classes C_3 et C_4 -Tableau II-5).

\hat{y} est la sortie non floue du Contrôleur. Elle correspond à l'erreur systématique à apporter comme correction de la dimension fractale estimée De_1 à la sortie de l'étape de pondération. La valeur De_2 ($De_2 = De_1 + \hat{y}$) peut être considérée comme une valeur très proche de la dimension fractale D de la courbe à l'étude ($De_2 \approx D$).

Par rapport aux autres méthodes d'extraction de règles, la méthode appliquée au niveau de l'étape d'approximation permet d'obtenir une partition floue plus précise de l'espace des entrées. Ceci est dû au fait que cette partition est générée directement à partir des données entrée/sortie et qu'aucune contrainte, comme le nombre de sous-ensembles flous, le mode de partition, ne lui est imposée. Toutefois, la définition récursive des règles floues implique leur génération en grand nombre, ce qui engendre une grande complexité de calcul. Ce problème pourra être résolu par une procédure de décomposition de la structure du Contrôleur en Logique Floue présentée au chapitre suivant.

A partir des expériences et de nos connaissances sur les caractères impliqués dans les courbes fractales, nous avons fait le choix d'un modèle hiérarchisé en deux étapes afin de minimiser l'erreur de l'estimation de la dimension fractale. Dans un premier temps, à l'étape de pondération, les erreurs stochastiques inhérentes à la méthode de dénombrement des boîtes sont prises en compte. Ensuite, ce sont les erreurs systématiques qui sont prises en compte dans l'étape d'approximation. Le chapitre suivant a pour but d'optimiser le modèle défini, c'est à

dire conjointement de nous assurer un choix optimal des paramètres et une réduction de sa complexité. Ces deux opérations conjointes d'optimisation peuvent être réalisées par algorithme génétique (cf. section III.2.).

CHAPITRE III

OPTIMISATION

III. OPTIMISATION

III.1. Introduction

Dans notre méthode, l'estimation de la dimension fractale d'une courbe est transformée en problème d'approximation d'une fonction complexe résolu par le modèle flou proposé à la section II.3.2. Ce modèle peut être optimisé suivant deux niveaux afin de concilier à la fois précision, lisibilité et rapidité.

En basant la méthode d'estimation de la dimension fractale sur la méthode de dénombrement des boîtes, nous avons fait le choix d'une méthode simple à mettre en œuvre et rapide. Les erreurs stochastiques étant éliminées après une étape de pondération, l'estimation de l'erreur systématique à apporter est réalisée à l'aide d'un Contrôleur en Logique Floue. Cependant, le nombre important d'entrées dans le C.L.F (vecteur d'entrée multi-dimensionnel-Tableau II-5) entraîne la génération automatique d'un grand nombre de règles floues (et de fonctions d'appartenance) qui nuisent à une bonne lisibilité des relations entre les entrées du C.L.F et sa sortie. Formellement, la complexité du calcul croît exponentiellement en fonction du nombre d'entrées. De plus, lorsque le nombre d'entrées est important ou bien lorsque des petites régions de l'espace des entrées se recouvrent, la méthode d'extraction des règles floues crée des règles non significatives, difficiles à interpréter et caractérisant de trop petits espaces d'entrée. Ceci nuit non seulement à la lisibilité mais aussi à la rapidité du calcul. C'est la raison pour laquelle la structure complexe du C.L.F doit être simplifiée et optimisée en s'assurant d'obtenir une structure simple et optimale. Cette recherche d'une structure plus simple et optimale est d'autant plus ardue que les relations en l'espace des entrées et celui de la sortie sont a priori inconnues.

D'autre part, la génération de règles floues s'apparente à un découpage de l'espace des entrées en régions, auxquelles sont associées des fonctions d'appartenance, et à la mise en place de relations entre ces régions et la sortie. Afin de garantir une bonne précision, il est nécessaire de réaliser la meilleure disposition des fonctions d'appartenance dans l'univers du discours d'entrée. Ainsi est-il primordial de configurer le modèle flou (adapter la forme et la disposition des fonctions d'appartenance) en recherchant dans tout l'univers du discours les solutions optimales.

Dans les deux cas, la recherche de solutions optimales entraîne l'exploration d'un grand nombre de solutions et, parmi les candidats susceptibles de répondre à nos critères de sélection, beaucoup de réponses peuvent sembler convenir. Afin de répondre à nos attentes, la mise en place d'une méthode combinant un modèle flou et l'algorithme génétique est particulièrement bien adaptée [MUN-94]. A l'instar des méthodes conventionnelles, l'algorithme génétique autorise l'exploration de plusieurs solutions en parallèle et fournit une réponse quasi-optimale pour des problèmes complexes où il existe de nombreux minima locaux.

III.2. L'algorithme génétique

Les fondements des algorithmes génétiques ont été développés par HOLLAND en 1975. Depuis, les algorithmes génétiques connaissent un intérêt sans cesse croissant pour les techniques de recherche et d'optimisation des procédures. Ces algorithmes sont construits par analogie avec les phénomènes naturels. Ils prennent leur source auprès de la théorie néo-Darwinienne qui peut s'énoncer de la façon suivante : "un groupe d'éléments voit la domination des individus les mieux adaptés pour la reproduction, si il possède les trois propriétés de reproduction, de variation et d'hérédité. Ces conditions sont nécessaires et suffisantes. La propriété de reproduction assure la compétition entre les individus, alors que la propriété de variation de la population favorise des différences entre les individus. Enfin, l'hérédité permet d'assurer une ressemblance entre les parents et les enfants issus de la reproduction. Chaque individu, plongé dans un contexte donné, est caractérisé par un chromosome porteur de l'information. A partir du choix d'une fonction d'évaluation (sélection naturelle), l'algorithme génétique se décompose en quatre étapes.

La première étape concerne l'initialisation de la population (population initiale). On réalise un tirage aléatoire dans l'espace des possibles. A la seconde étape (la sélection), au travers de la fonction d'évaluation, on conserve uniquement les meilleurs individus. Dans un troisième temps, on procède à l'étape de reproduction par recombinaison ou mutation. Les solutions filles héritent des caractéristiques qui favorisaient la sélection des solutions mères. Enfin, au cours de la quatrième étape, on retourne à la deuxième étape un nombre fixé de fois qui correspondra au nombre de générations.

La puissance des algorithmes génétiques [MIC-94] réside dans leur aptitude à inspecter plusieurs régions de l'espace des solutions potentielles simultanément sans la nécessité de disposer d'une base d'apprentissage. Durant la procédure, la recherche se concentre graduellement dans les régions où se situent les éléments susceptibles de correspondre à

l'optimum recherché. Cette méthode de recherche ne dépend que de quatre paramètres pour un algorithme simple : la taille de la population (nombre d'individus ou de chromosomes), le nombre de générations (nombre de cycles de reproduction) et pour l'étape de la reproduction, la probabilité de mutation (notée p_m) et de croisement entre les individus (notée p_c).

III.2.1. Le codage

Chaque individu de la population est le porteur d'une information, le chromosome, lui-même composé de gènes (encore appelés les bases). Un tel chromosome est le plus souvent représenté par des codes binaires (Figure III-1) de longueur limitée. L'ensemble des chromosomes (donc des individus) définit la population à un instant donné (la génération). Pour l'étape d'initialisation, la population initiale (première génération) est générée aléatoirement.

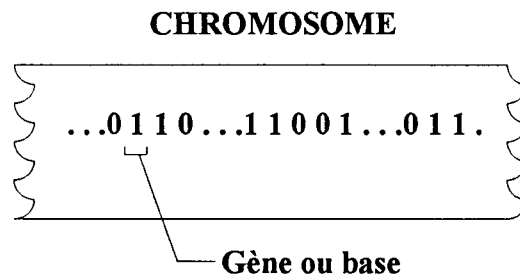


Figure III-1 : Exemple de chromosome - ruban de la machine de TÜRING

III.2.2. La sélection

La fonction d'évaluation est la fonction à optimiser. Pour chacune des étapes de la poursuite de l'algorithme (génération), tous les chromosomes de la population sont décodés puis évalués. Pour une génération donnée, on calcule la somme totale des évaluations de chaque chromosome de la population et la probabilité de sélection de chacun d'entre eux définie comme le rapport de leur évaluation sur la somme totale des évaluations. Cette probabilité de sélection est le reflet de la performance d'un chromosome par rapport à l'ensemble des individus. La procédure de sélection des individus appelés à former la nouvelle population s'établit de la manière suivante.

On construit une séquence ordonnée de valeurs aléatoires comprises dans l'intervalle fermé $[0, 1]$ qui comporte autant d'éléments qu'il existe d'individus dans la population. A chaque chromosome, on associe la probabilité cumulée de sélection. Pour chaque valeur de la séquence, on construit la nouvelle population en sélectionnant le chromosome pour lequel la

probabilité de sélection cumulée est directement supérieure ou égale à la valeur de la séquence. A chaque génération, la taille de la population reste invariante.

III.2.3. La reproduction

Il s'agit d'exploiter le passé. Les solutions filles héritent de caractéristiques qui avaient favorisé la sélection des solutions mères. On oriente l'exploration de l'espace de solutions potentielles. La nouvelle population (génération suivante) est engendrée à partir de cas déjà évalués par recombinaison et mutation. Cette étape de la reproduction permet d'entretenir la variété dans la population. C'est au sein de cette étape que s'adapte les stratégies dont l'optimisation résulte d'une confrontation entre les mécanismes de l'hérédité et le processus de sélection.

III.2.3.1. La recombinaison

La recombinaison ("crossover") correspond à une exploration orientée de l'espace des solutions potentielles (Figure III-2). Dans cette étape, on procède au choix des paires de chromosomes candidats à la recombinaison (Figure III-3). A chaque chromosome de la population évaluée, on associe une valeur aléatoire comprise dans l'intervalle fermé $[0, 1]$. Pour une probabilité de recombinaison p_c fixée et constante durant toute la poursuite de l'algorithme, les chromosomes pour lesquels la valeur aléatoire sera strictement inférieure à p_c sont appelés à se recombiner deux à deux. Si le nombre de chromosomes retenus est impair, aléatoirement on retranche un candidat ou bien on en ajoute un sélectionné au hasard dans la population. La position de la recombinaison pos est un élément tiré au hasard dans l'ensemble des entiers défini par le nombre de gènes (taille des individus) contenu dans les chromosomes.

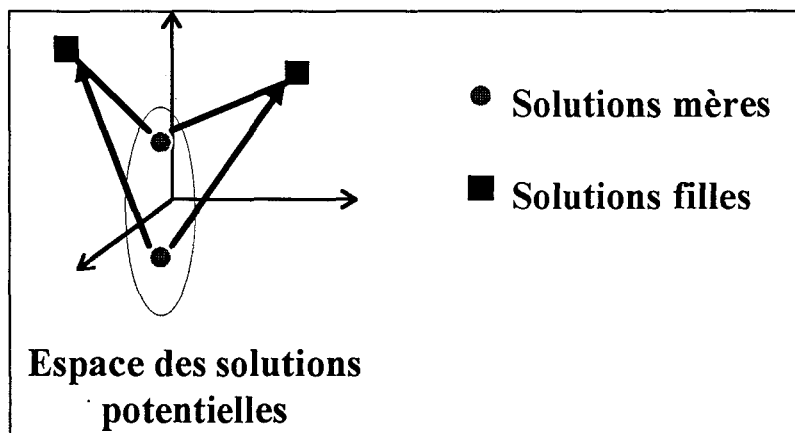


Figure III-2 : Exploration de l'espace de solutions potentielles par recombinaison

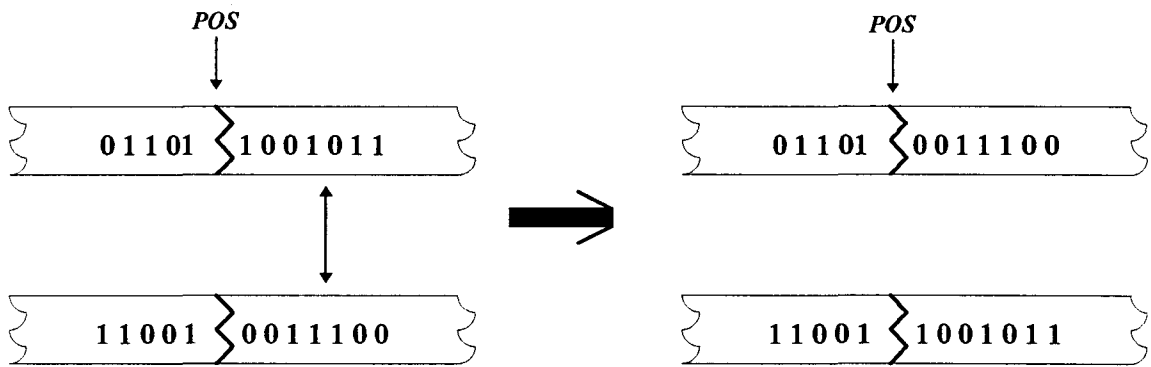


Figure III-3 : Recombinaison sur une paire de chromosomes

III.2.3.2. La mutation

On se fixe une valeur de probabilité de mutation p_m de telle façon que l'on espère qu'en moyenne $100 \times p_m$ pour cent de l'ensemble des gènes de la population subissent une mutation à chaque génération. Cette opération de mutation (Figure III-4) s'applique à tous les gènes des individus de la population avec une chance équiprobable pour chacun d'entre eux. Pour chaque gène, on génère une valeur aléatoire comprise dans l'intervalle fermé $[0, 1]$. Le gène concerné subit une mutation dans la mesure où la valeur générée est strictement inférieure à p_m . L'idée est qu'une petite mutation peut suffire à améliorer la résolution du problème (Figure III-5).



Figure III-4 : Mutation sur un chromosome

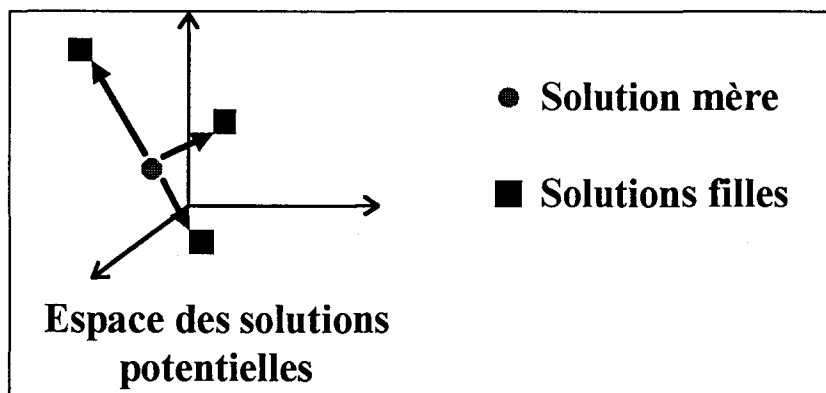


Figure III-5 : Exploration de l'espace de solutions potentielles par mutation

III.3. Méthode de décomposition du modèle flou en structure hiérarchique

La partition en régions floues de l'espace des entrées est réalisée de façon à ce qu'il n'y ait pas de recouvrement (élimination des intersections). Toutefois, la méthode ne nous garantit pas de la complexité du modèle flou. Théoriquement, cette complexité du modèle croît exponentiellement en fonction du nombre d'entrées. De plus, la méthode de génération des règles floues (cf. section II.3.5.) entraîne la création d'un grand nombre de règles caractérisant de petits sous-espaces non significatifs. Il est nécessaire de définir une procédure de décomposition afin de réduire le nombre des fonctions d'appartenance (et par conséquent le nombre des règles produites). Ceci permet non seulement de simplifier les calculs mais aussi de nous assurer d'une meilleure lisibilité parce qu'il est difficile pour le concepteur d'intégrer et de comprendre les relations qui existent entre les variables d'entrée et la variable de sortie du Contrôleur pour un grand nombre de règles. Afin de réduire le nombre des entrées et par la suite la complexité du modèle, il est possible de retirer une variable d'entrée et de regarder la conséquence induite sur le nombre de règles produites. Si le nombre total de règles ne varie pas, l'entrée peut être considérée comme inutile. Dans le cas contraire, c'est une entrée pertinente et elle doit être conservée [ABE-95]. Selon cette méthode, l'élimination de variables redondantes s'effectue après l'extraction des règles floues. Il existe aussi d'autres méthodes afin d'éliminer les entrées redondantes. Par exemple, une méthode utilisée dans [PAW-86][PEY-94] permet de réduire le nombre de variables aux plus significatifs en se basant sur la théorie des ensembles approximatifs. L'avantage de cette méthode est qu'elle offre la possibilité d'éliminer la redondance avant l'extraction des règles à partir des données. Ceci pourrait, dans certains cas, engendrer une perte de précision en sortie du Contrôleur en Logique Floue. Dans la mesure où nous recherchons dans le chapitre II à concevoir un Contrôleur en Logique Floue conduisant à une estimation de la dimension fractale la plus précise possible, aucune variable d'entrée n'est éliminée. La redondance à l'entrée sera traitée dans ce chapitre lorsque l'optimisation de la structure du Contrôleur en Logique Floue est mise en place en tenant compte à la fois des critères de précision; de rapidité et de lisibilité.

Les entrées redondantes étant éliminées, afin de réduire la complexité du Contrôleur en Logique Floue multi-entrées, nous sommes amenés à décomposer le modèle flou en un ensemble de Contrôleurs plus simples, reliés entre eux en série sous la forme d'une structure hiérarchique.

La recherche de structures hiérarchiques pour un modèle flou de type M.I.S.O complexe basées sur l'algorithme génétique sont très souvent proposées. Elles combinent soit la réduction du nombre de règles floues, soit la réduction du nombre de règles et l'adaptation des fonctions d'appartenance en définissant une fonction d'évaluation prenant en compte le nombre de règles floues générées, la moyenne de l'erreur commise entre la sortie désirée et la sortie réelle de la structure à partir des éléments de la base d'apprentissage et le nombre total de fonctions d'appartenance. La population initiale proposée pour l'algorithme génétique est soit une structure arborescente [SHI-95][FUK-95][LIN-96], soit un découpage homogène de l'espace des entrées [TAN-96]. Bien qu'il faille choisir une structure pour l'initialisation de la population de départ de l'algorithme génétique, un inconvénient majeur réside dans le fait d'intégrer dans la fonction d'évaluation le nombre de règles floues généré pour chacun des chromosomes et par conséquent de devoir extraire les règles à chaque étape de l'algorithme génétique. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes attachés à proposer un modèle de structure hiérarchique à la fois simple dans sa construction et linéaire de façon à ce qu'il permette une interprétation aisée.

La construction d'une structure hiérarchique est rendue difficile, car il faut une connaissance des relations entre les variables en entrée. Aussi la structure doit être déterminée par l'opérateur lorsque ces relations sont inconnues. En fait, la procédure de l'extraction des règles floues peut être considérée comme un problème de classification, qui peut se décomposer en une série de partitions simples (en deux classes) successives. En tenant compte de cette propriété, notre procédure de décomposition permet d'associer une telle partition à un Contrôleur en Logique Floue simple avec un nombre d'entrées réduit. De cette manière, la structure décomposée du modèle flou initial est obtenue par la connexion en série de tous les Contrôleurs en Logique Floue simples. Dans le modèle décomposé, les couches intermédiaires sont définies comme les résultats intermédiaires de la classification.

III.3.1.Série de Contrôleurs en Logique Floue à deux entrées

La procédure de décomposition hiérarchique transforme le Contrôleur en Logique Floue défini précédemment avec sa structure complexe (six variables en entrée) en une série de Contrôleurs plus simples. Chacun d'entre eux ne possède pas plus de deux entrées et par conséquent un nombre de règles bien inférieur. A la différence du C.L.F défini avec ses n entrées et une sortie scalaire constituée de m classes distinctes, un Contrôleur décomposé ne générera qu'une partition en deux classes sur son intervalle de sortie. Donc $m-1$ Contrôleurs simples seront

nécessaires pour remplir la fonction du Contrôleur original (Figure III-6). En général, il existe une perte de précision dans la structure décomposée en raison de la disparition des interconnexions entre les variables d'entrées. C'est la raison pour laquelle la structure doit être construite en s'assurant que cette perte soit minimale. La structure proposée ici s'accorde avec un système multi-entrées-une sortie. Dans le cas d'un système à plusieurs sorties, il est toujours possible de le transformer en une collection de systèmes à sortie unique (scalaire).

Après avoir obtenu la structure décomposée, on procède à la génération des règles floues, selon le principe présenté à la section II.3.5, pour chaque Contrôleur décomposé indépendamment.

III.3.1.1. Construction de la structure hiérarchique

Considérons un espace des entrées de dimension n . L'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$ constitue l'ensemble des variables en entrée. La sortie finale de la structure est subdivisée en m classes constituant la méta-classe $MC_1 = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$. La construction de la structure s'opère suivant les cinq étapes suivantes :

Etape 1 Initialisation

$$k = 1$$

la partition P_1 est égale à $\{MC_1\}$

avec $MC_1 = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$

Etape 2 Sélection d'une variable d'entrée z_1 ($z_1 \in \{x_1, \dots, x_n\}$) et de la sortie z_2 du $(k-1)^{\text{ième}}$ C.L.F.

Sélection d'une méta-classe MC_i ($i \in \{1, \dots, k\}$) de la partition courante

$$P_k = \{MC_1, \dots, MC_k\}.$$

Division de MC_i en deux nouvelles sous-méta-classes Q_1 et Q_2 de telle façon que :

- $MC_i = Q_1 \cup Q_2,$

- $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset,$

- la Perte d'Information $PI(z_1, MC_i, Q_1, Q_2)$ soit minimale.

Etape 3 Génération des règles floues à partir de la base d'apprentissage pour le $k^{\text{ième}}$ C.L.F. pour lequel les variables d'entrées deviennent z_1 et z_2 et la sortie correspond aux classes définies par Q_1 et Q_2 .

Etape 4 La méta-classe MC_i devient Q_1 et on crée la méta-classe MC_{k+1} correspondant à Q_2 .

$$k = k + 1$$

Etape 5 Arrêt de la procédure si

$k = m-1$

dans ce cas, il existe m méta-classes MC_1, \dots, MC_m telles que $\forall p \in \{1, \dots, m\}$,

$\text{Card}(MC_p) = 1$

sinon, retour à l'Etape 2.

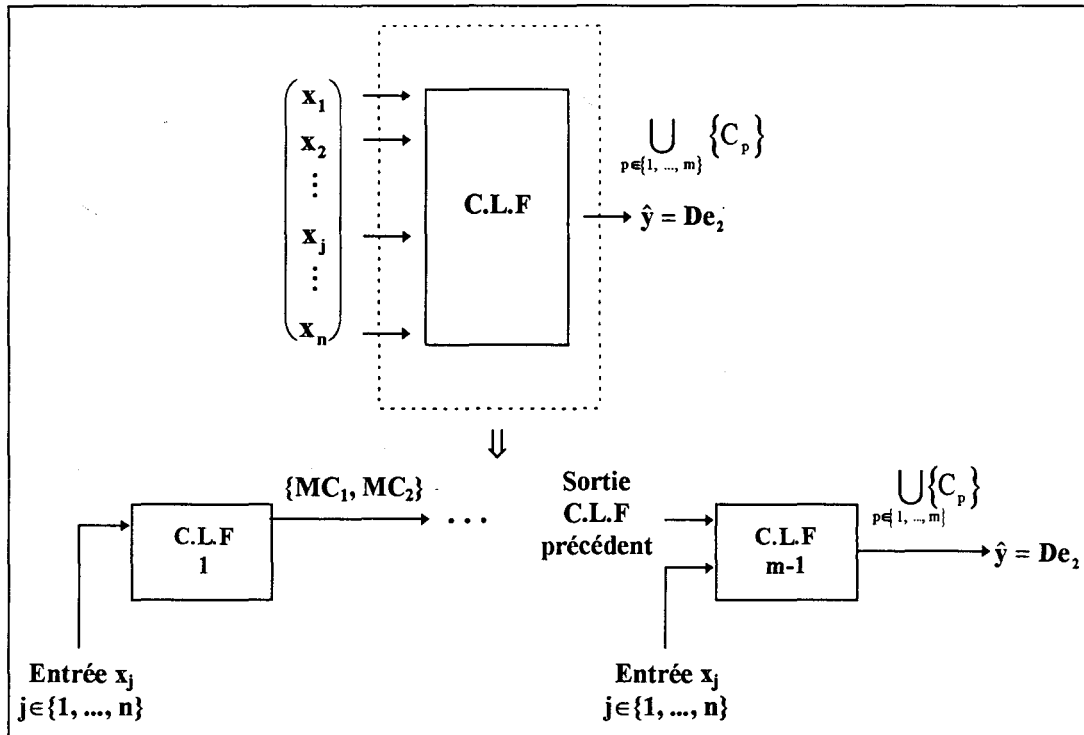


Figure III-6 : Décomposition du modèle flou en structure hiérarchique

III.3.1.2. Minimisation de la perte d'informations

Au niveau de la seconde étape (Etape 2), la sélection d'une variable d'entrée optimale z_1 , de sorte que la perte d'informations dans le Contrôleur soit minimale, s'effectue par algorithme génétique. Etant donné une variable d'entrée x_j , la division en deux sous-méta-classes Q_1 et Q_2 de la méta-classe MC_i correspond à une partition de l'espace mono-dimensionnel associé à la variable x_j en deux intervalles I_1 et I_2 . Les bornes de l'intervalle I_1 et I_2 correspondent respectivement aux valeurs minimale et maximale de la variable x_j pour les classes appartenant à Q_1 et Q_2 . La perte d'information correspond à l'intersection de ces deux intervalles (Figure III-7).

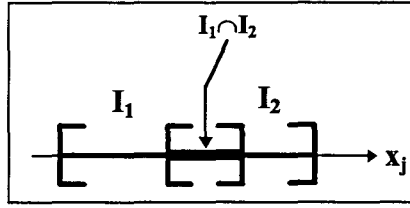


Figure III-7 : Partition de l'espace mono-dimensionnel de la variable d'entrée x_j

$$t \in \{1, \dots, N\}, X_t = \begin{pmatrix} x_{1t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{pmatrix}, X_t \in \Omega, \quad (\text{éq. III-1})$$

- pour les X_t associés aux classes de sortie de la partition Q_1 ,

$$I_1 = \left[\text{Min}_{t \in \{1, \dots, N\}} \{x_{jt} / X_t \in Q_1\}, \text{Max}_{t \in \{1, \dots, N\}} \{x_{jt} / X_t \in Q_1\} \right]$$

I_1 est la projection des échantillons de Q_1 sur l'axe x_j

- pour les X_t associés aux classes de sortie de la partition Q_2 ,

$$I_2 = \left[\text{Min}_{t \in \{1, \dots, N\}} \{x_{jt} / X_t \in Q_2\}, \text{Max}_{t \in \{1, \dots, N\}} \{x_{jt} / X_t \in Q_2\} \right]$$

I_2 est la projection des échantillons de Q_2 sur l'axe x_j

Au niveau de l'Etape 2, on se fixe une méta-classe MC_i ($i \in \{1, \dots, k\}$). On lui fait correspondre un codage binaire dont la longueur est déterminée par le nombre total de classes l_i ($l_i \leq m$) comprises dans cette méta-classe. Dès lors, la définition d'un chromosome $(b_1 b_2 \dots b_p \dots b_{l_i})$ associé à la méta-classe MC_i est la suivante :

$$(p, i) \in \{1, \dots, l_i\} \times \{1, \dots, k\}, MC_i = (b_1 b_2 \dots b_p \dots b_{l_i}) \quad (\text{éq. III-2})$$

$$\text{avec } b_p \in \{0, 1\}, \begin{cases} b_p = 0, C_p \in Q_1 \\ b_p = 1, C_p \in Q_2 \end{cases}$$

$$\text{et Card}(MC_i) = l_i \text{ et } \begin{cases} MC_i = \bigcup_{p \in \{1, \dots, l_i\}} \{C_p\} = Q_1 \cup Q_2 \\ Q_1 \cap Q_2 = \emptyset \end{cases}$$

Ensuite, on sélectionne une entrée x_j ($j \in \{1, \dots, n\}$). Pour l'entrée x_j et la méta-classe MC_i fixées, la fonction d'évaluation est égale à la Perte d'Information $PI(x_j, MC_i, (b_1 b_2 \dots b_p \dots b_{l_i}))$ qui s'énonce ainsi :

(éq. III-3)

$$t \in \{1, \dots, N\}, X_t = \begin{pmatrix} x_{1t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{pmatrix}, X_t \in \Omega,$$

• Si $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, alors

$$\text{PI} \left(x_j, \text{MC}_i, \left(b_1 \dots b_p \dots b_{l_i} \right) \right) =$$

$$\max_{j \in \{1, \dots, n\}} \left\{ \min_{t \in \{1, \dots, N\}} \left\{ x_{jt} / X_t \in Q_1 \right\}, \min_{t \in \{1, \dots, N\}} \left\{ x_{jt} / X_t \in Q_2 \right\} \right\} -$$

$$\min_{j \in \{1, \dots, n\}} \left\{ \max_{t \in \{1, \dots, N\}} \left\{ x_{jt} / X_t \in Q_1 \right\}, \max_{t \in \{1, \dots, N\}} \left\{ x_{jt} / X_t \in Q_2 \right\} \right\}$$

• Si $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, alors

$$\text{PI} \left(x_j, \text{MC}_i, \left(b_1 \dots b_p \dots b_{l_i} \right) \right) = 0$$

Pour la méta-classe MC_i et l'entrée x_j , l'algorithme génétique retourne le chromosome $(\hat{b}_1(j,i) \dots \hat{b}_p(j,i) \dots \hat{b}_{l_i}(j,i))$ qui correspond au minimum de Perte d'Information PI et par conséquent à la partition quasi-optimale de la méta-classe MC_i en deux sous-méta-classes Q_1 et Q_2 par l'intermédiaire de l'entrée x_j . En répétant la procédure de recherche par l'algorithme des partitions quasi-optimales pour toutes les méta-classes en cours à l'Etape 2 et pour toutes les entrées, le choix de la Perte d'Information minimale permet de déterminer l'entrée z_1 candidate au $k^{\text{ième}}$ C.L.F et de construire les nouvelles méta-classes MC_i et MC_{k+1} de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists (i,j) \in \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, n\} / \\ \text{PI} \left(x_j, \text{MC}_i, \left(\hat{b}_1(j,i) \dots \hat{b}_p(j,i) \dots \hat{b}_{l_i}(j,i) \right) \right) = \\ \min_{\substack{a \in \{1, \dots, n\} \\ b \in \{1, \dots, k\}}} \left\{ \text{PI} \left(x_a, \text{MC}_b, \left(\hat{b}_1(a,b) \dots \hat{b}_p(a,b) \dots \hat{b}_{l_b}(a,b) \right) \right) \right\} \\ \text{MC}_i = \bigcup_p \{C_p\}, \forall p \in \{1, \dots, l_i\}, \hat{b}_p(j,i) = 0 \\ \text{MC}_{k+1} = \bigcup_p \{C_p\}, \forall p \in \{1, \dots, l_i\}, \hat{b}_p(j,i) = 1 \end{array} \right. \quad (\text{éq. III-4})$$

et $z_1 = x_j$

III.3.2. Série de Contrôleurs en Logique Floue à trois entrées

Cette nouvelle décomposition en série est calquée sur la structure hiérarchique définie à la section III.3.1., avec la même définition des espaces d'entrée et de sortie. Cependant, on envisage une entrée supplémentaire pour chacun des Contrôleurs en Logique Floue décomposé. La considération d'une entrée supplémentaire nous permet de réduire la perte

d'information au niveau de la décomposition du C.L.F à n entrées en offrant la possibilité de nouvelles interconnexions entre les entrées. Les étapes de la construction des C.L.F décomposés à trois entrées sont semblables à celles décrites pour des C.L.F à deux entrées. La différence se situe au niveau de la fonction d'évaluation à minimiser. Au niveau de l'Etape 2, la sélection se porte maintenant sur deux variables d'entrée optimales, de sorte que la perte d'informations dans le Contrôleur soit minimale. L'optimisation est toujours menée par algorithme génétique. Toutefois, étant donné les deux entrées x_j et $x_{j'}$ ($(x_j, x_{j'}) \in \{x_1, \dots, x_n\}^2$) du C.L.F décomposé, la division en deux sous-méta-classes Q_1 et Q_2 correspond à une partition de l'espace bi-dimensionnel associé aux variables x_j et $x_{j'}$ en deux rectangles I_1 et I_2 . Les frontières des rectangles I_1 et I_2 correspondent respectivement aux valeurs minimale et maximale des entrées x_j et $x_{j'}$ pour les classes appartenant à Q_1 et Q_2 . La perte d'information correspond à l'aire de l'intersection $I_1 \cap I_2$ (Figure III-8).

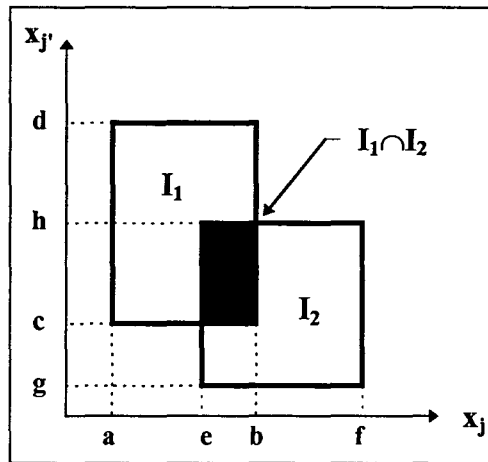


Figure III-8 : Partition de l'espace bi-dimensionnel des variables d'entrée x_j et $x_{j'}$

(éq. III-5)

$$t \in \{1, \dots, N\}, X_t = \begin{pmatrix} x_{1t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{pmatrix}, X_t \in \Omega,$$

- pour les X_t associés aux classes de sortie de la partition Q_1 ,

$$I_1 = [a, b] \times [c, d]$$

$$\text{avec } a = \underset{t \in \{1, \dots, N\}}{\text{Min}} \{x_{jt} / X_t \in Q_1\} - b = \underset{t \in \{1, \dots, N\}}{\text{Max}} \{x_{jt} / X_t \in Q_1\}$$

$$c = \underset{t \in \{1, \dots, N\}}{\text{Min}} \{x_{j't} / X_t \in Q_1\} - d = \underset{t \in \{1, \dots, N\}}{\text{Max}} \{x_{j't} / X_t \in Q_1\}$$

I_1 est la projection des échantillons de Q_1 sur le plan $x_j - x_{j'}$

- pour les X_t associés aux classes de sortie de la partition Q_2 ,

$$I_2 = [e, f] \times [g, h]$$

$$\text{avec } e = \underset{t \in \{1, \dots, N\}}{\text{Min}} \{x_{jt} / X_t \in Q_2\} - f = \underset{t \in \{1, \dots, N\}}{\text{Max}} \{x_{jt} / X_t \in Q_2\}$$

$$g = \underset{t \in \{1, \dots, N\}}{\text{Min}} \{x_{j't} / X_t \in Q_2\} - h = \underset{t \in \{1, \dots, N\}}{\text{Max}} \{x_{j't} / X_t \in Q_2\}$$

I_2 est la projection des échantillons de Q_2 sur le plan $x_j - x_{j'}$

En conservant la même définition pour les chromosomes qu'en (éq. III-2) et en fixant toujours une méta-classe MC_i mais en considérant maintenant les deux entrées x_j et $x_{j'}$, la Perte d'Information $PI(x_j, x_{j'}, MC_i, b_1 b_2 \dots b_p \dots b_{li})$ devient :

$$t \in \{1, \dots, N\}, X_t = \begin{pmatrix} x_{1t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{pmatrix}, X_t \in W, \quad (\text{éq. III-6})$$

Si $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, alors

$$PI(x_j, x_{j'}, MC_i, (b_1 \dots b_p \dots b_{li})) = (\text{Min}(b, f) - \text{Max}(a, e)) \times (\text{Min}(d, h) - \text{Max}(c, g))$$

sinon

$$PI(x_j, x_{j'}, MC_i, (b_1 \dots b_p \dots b_{li})) = 0$$

En répétant la procédure de recherche par algorithme génétique pour chacune des méta-classes MC_i et pour les C_n^2 combinaisons de variables d'entrée x_j et $x_{j'}$, le minimum de la Perte d'Information $PI(x_j, x_{j'}, MC_i, (\hat{b}_1(j, j', i) \dots \hat{b}_p(j, j', i) \dots \hat{b}_{li}(j, j', i)))$ nous permet de déterminer les deux variables candidates et la méta-classe à scinder à l'entrée du $k^{\text{ième}}$ C.L.F. Le codage $(\hat{b}_1(j, j', i) \dots \hat{b}_p(j, j', i) \dots \hat{b}_{li}(j, j', i))$ correspond à la partition quasi-optimale de la méta-classe MC_i associée aux variables x_j et $x_{j'}$.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \exists(i, j, j') \in \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, n\}^2 / \\
 \text{PI} \left(x_j, x_{j'}, MC_i, \left(\hat{b}_1(j, j', i) \dots \hat{b}_p(j, j', i) \dots \hat{b}_i(j, j', i) \right) \right) = \\
 \text{Min}_{\substack{(a,b) \in \{1, \dots, n\}^2 \\ a \neq b \\ c \in \{1, \dots, k\}}} \left\{ \text{PI} \left(x_a, x_b, MC_c, \left(\hat{b}_1(a, b, c) \dots \hat{b}_p(a, b, c) \dots \hat{b}_i(a, b, c) \right) \right) \right\} \\
 MC_i = \bigcup_p \{C_p\}, \forall p \in \{1, \dots, l_i\}, \hat{b}_p(j, j', i) = 0 \\
 MC_{k+1} = \bigcup_p \{C_p\}, \forall p \in \{1, \dots, l_i\}, \hat{b}_p(j, j', i) = 1
 \end{array} \right. \quad (\text{éq. III-7})$$

Dans les deux cas de structure décomposée (à deux et trois entrées), la génération de la base de règles floues est réalisée après la construction des C.L.F en série. Dans la mesure où le nombre d'entrées de chacun des C.L.F décomposés est réduit, le nombre de règles décroît et la lisibilité, comme la rapidité des calculs, s'en trouvent accrues.

III.4. Optimisation des fonctions d'appartenance

Il s'agit dans cette partie d'adapter les fonctions d'appartenance de façon à ce qu'elles réalisent un découpage quasi-optimal des régions de l'espace des entrées. Pour que les Contrôleurs en Logique Floue restent des estimateurs universels (cf. section II.3.2.), une condition porte sur les fonctions d'appartenance associées à chacun des sous-espaces flous générés par les règles floues [CAS-95]. Les formes trapézoïdales ou gaussiennes, entre autre, remplissent la condition nécessaire à cette universalité. L'optimisation pour la structure initiale et la structure décomposée des fonctions d'appartenance se situe à deux niveaux. La première optimisation se situe au niveau des paramètres internes de la fonction d'appartenance : largeur de l'intervalle sur lequel la fonction décroît de la valeur 1 vers 0 et le centre du noyau. La seconde optimisation correspond au choix le mieux adapté de la forme de la fonction d'appartenance : les formes retenues seront trapézoïdales symétriques ou gaussiennes.

III.4.1. Paramètres de sensibilité des fonctions d'appartenance

Les équations des fonctions d'appartenance ont été explicitées à la section II.3.6.1. Le centre des noyaux est imposé par la génération des règles floues. Il correspond systématiquement au milieu du sous-espace flou. La taille du noyau est fixe pour les fonctions trapézoïdales et il correspond à l'intervalle $[u_k, U_k]$ (éq. II-18). En ce qui concerne les fonctions de forme gaussienne, le noyau est réduit à un point : le centre de la gaussienne (éq. II-20). Afin de faciliter la recherche de la largeur optimale sur laquelle se réalise la décroissance des fonctions

d'appartenance, nous ferons le choix de formes symétriques dépendantes de l'unique paramètre de sensibilité γ_k . L'optimisation de ce dernier, pour chacune des fonctions d'appartenance de formes trapézoïdale symétrique et gaussienne, s'effectue par algorithme génétique. La largeur ($1/\gamma_k$ pour les fonctions trapézoïdales et γ_k pour les fonctions de type gaussienne) de la décroissance sera réglée en fonction des bornes du sous-ensemble flou. Elle varie dans un intervalle délimité par la taille maximum de l'intervalle définie par les frontières des hyper-volumes d'activation (taille t_k) et d'inhibition (taille t'_k) pour chacune des entrées $k \in \{1, \dots, n\}$, x_k . Dans le cadre de l'estimation de la dimension fractale pour le modèle initial, le nombre des entrées est de 6 ($n = 6$) et le nombre de classes en sortie est de 8 ($m = 8$).

$$\forall k \in \{1, \dots, 6\}, \quad (\text{éq. III-8})$$

$$t_k = \text{Max}_{i \in \{0, \dots, 7\}} \{V_{iik}(1) - v_{iik}(1)\} \text{ et } t'_k = \text{Max}_{i \in \{0, \dots, 7\}} \{W_{iik}(1) - w_{iik}(1)\}$$

- pour les fonctions trapézoïdales symétriques $m_Z(x_k, \gamma_k)$

$$\forall k \in \{1, \dots, 6\}, \forall (i, j) \in \{0, \dots, 7\}^2,$$

$$\begin{cases} 1/\gamma_k = \textit{pourcent} \times t_k & \text{pour } Z = A_{ij}(1) \\ 1/\gamma_k = \textit{pourcent} \times t'_k & \text{pour } Z = I_{ij}(1) \end{cases}$$

- pour les fonctions gaussienne $m_Z(x_k, \gamma_k)$

$$\forall k \in \{1, \dots, 6\}, \forall (i, j) \in \{1, \dots, 7\}^2,$$

$$\begin{cases} \gamma_k = \textit{pourcent} \times \frac{t_k}{2} & \text{pour } Z = A_{ij}(1) \\ \gamma_k = \textit{pourcent} \times \frac{t'_k}{2} & \text{pour } Z = I_{ij}(1) \end{cases}$$

Le choix de t_k et t'_k permet d'accorder une pondération plus importante au hyper-volumes de petites tailles. Ceci permet d'équilibrer le poids de toutes les règles existantes.

Le paramètre de sensibilité γ_k devient dès lors une fonction d'un coefficient *pourcent* non nul. Afin d'ajuster au mieux les paramètres de sensibilité des fonctions d'appartenance ainsi définies, nous devons faire la recherche du coefficient *pourcent* quasi-optimal désigné *pourcent**.

III.4.1.1. Codage du paramètre de sensibilité

Le choix de l'intervalle dans lequel varie le paramètre *pourcent* sera [0,01 ; 2.00]. Les bornes inférieures et supérieures de cet intervalle correspondent respectivement à 1% et à 200% de la taille maximum des sous-espaces flous t_k et t'_k pour chacune des variables. Pour une valeur de 1%, on se rapproche de la définition d'appartenance au sens mathématique usuel. Pour une valeur de 200%, la décroissance d'une fonction d'appartenance empiète sur les noyaux des fonctions d'appartenance adjacentes et la partition de l'espace flou en sous-espaces s'estompe (Figure III-10 et Figure III-11). Dans ces deux cas extrêmes, la précision de la sortie du Contrôleur en est affectée. Le codage de *pourcent* est un codage binaire sur un octet (Figure III-9). L'intervalle [0,01 ; 2.00] sera discrétisé en 8 bit (2^8-1) valeurs de la façon suivante (éq. III-9) :

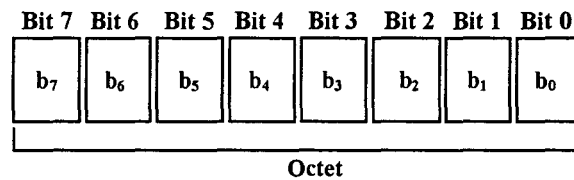


Figure III-9 : Codage de *pourcent* sur un octet

$$\forall i \in \{0, \dots, 7\}, b_i \in \{0,1\}$$

(éq. III-9)

passage de la valeur binaire à la valeur décimale de *pourcent*

$$\text{pourcent} = 0.01 + (b_7 b_6 b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 b_0)_{10} \times \frac{(2.00 - 0.01)}{2^8 - 1}$$

$$(b_7 b_6 b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 b_0)_{10} = \sum_{i=0}^7 b_i \cdot 2^i$$

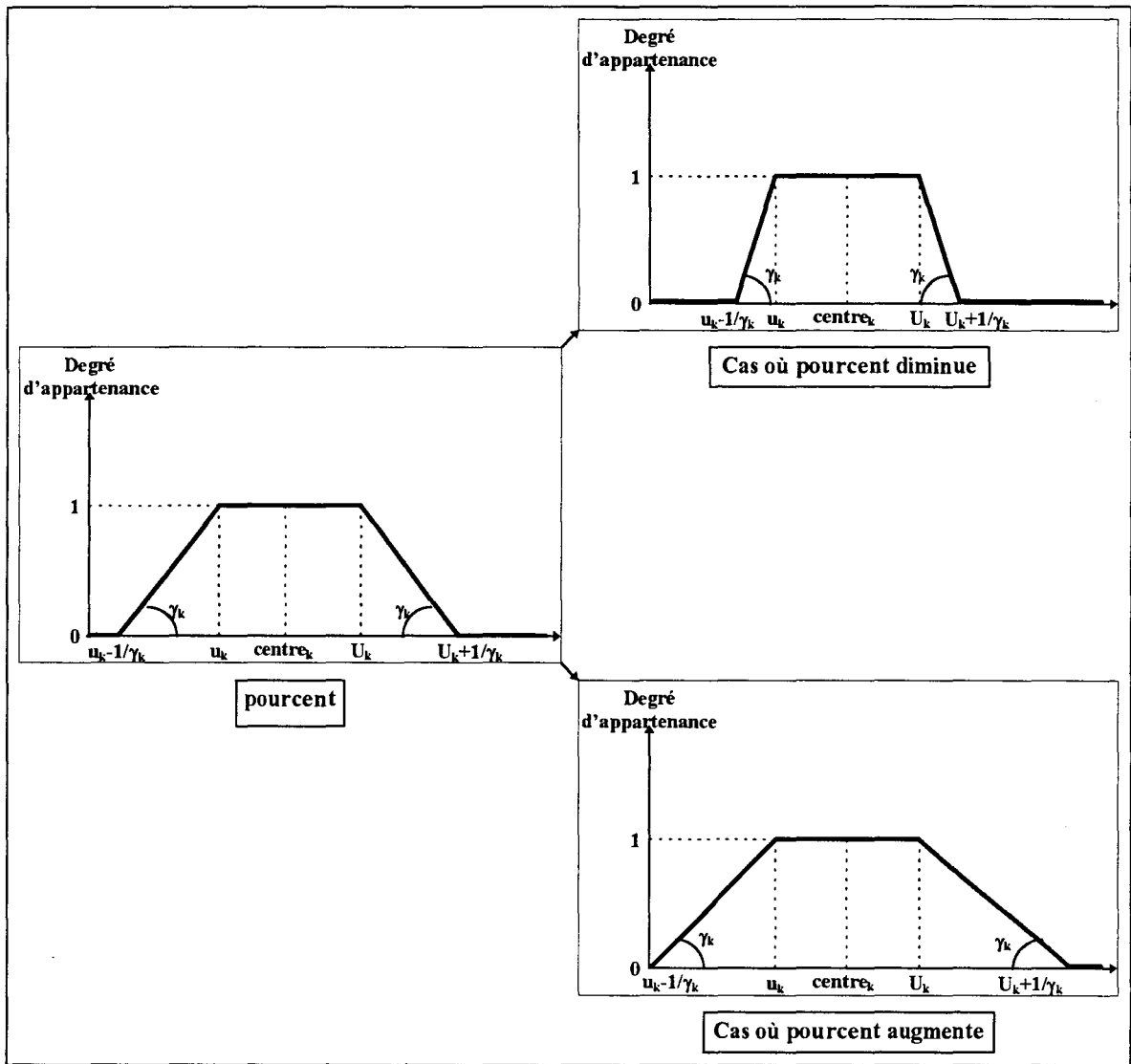


Figure III-10 : Phénotype d'une opération de reproduction sur une fonction d'appartenance trapézoïdale symétrique

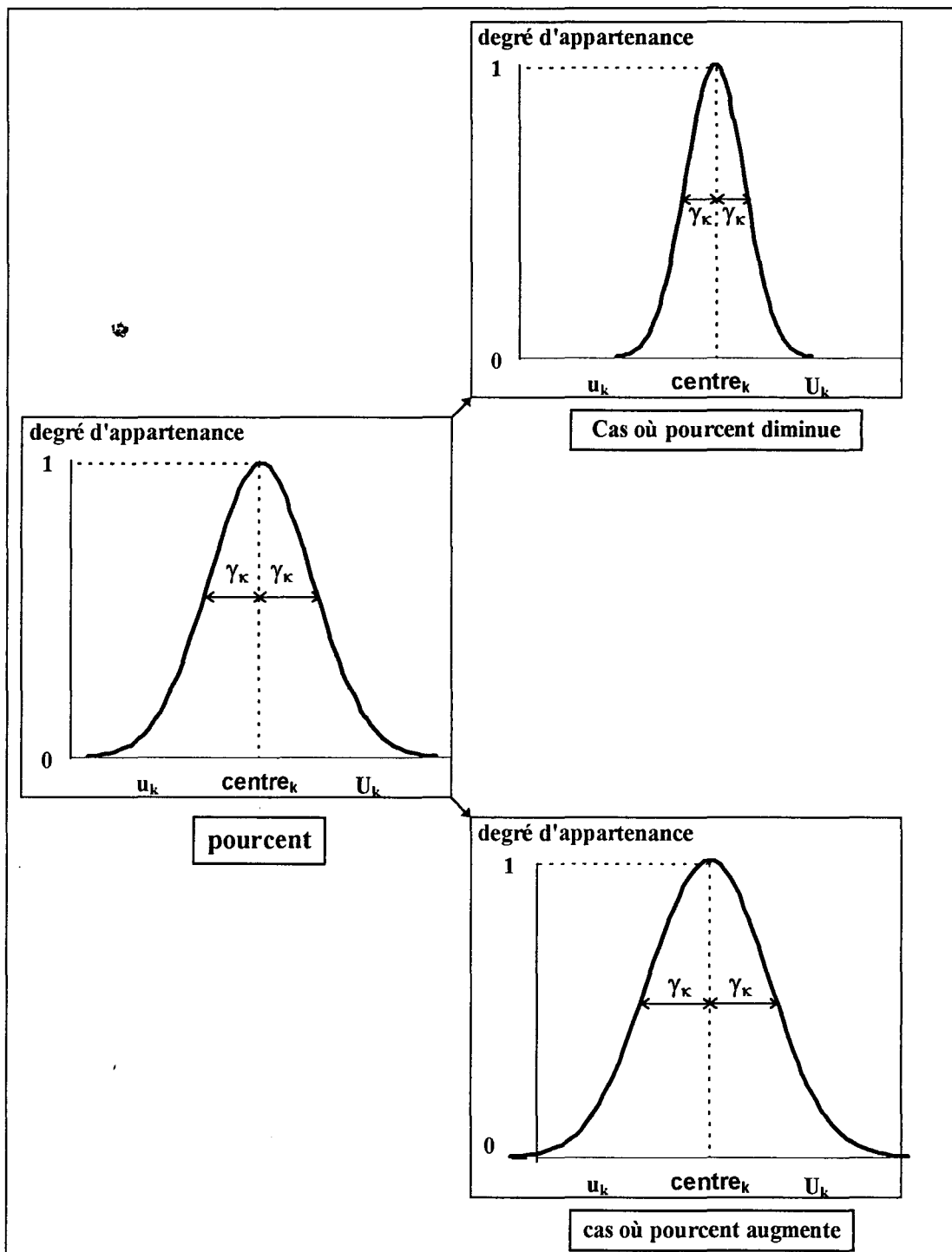


Figure III-11 : Phénotype d'une opération de reproduction sur une fonction d'appartenance gaussienne

Suivant la même procédure d'optimisation, les fonctions trapézoïdales symétriques des coefficients μ_i et γ_i définies à l'étape de pondération seront ajustées (éq. II-4) et (éq. II-6). Le codage retenu sera sur deux octets, soit un mot de seize bit. Le premier octet codera pour la valeur de *pourcent* et le second pour la valeur *pourcent'* comme cela est défini en (éq. III-9).

L'optimisation des modèles décomposés s'effectue suivant le même principe que pour le modèle initial.

III.4.1.2.Fonction d'évaluation

La fonction d'évaluation F à minimiser, retenue pour l'optimisation des paramètres de sensibilité des fonctions d'appartenance, correspond à l'erreur (en distance d_1) commise entre la sortie finale De_2 du Contrôleur (modèle initial ou décomposé) muni de ses fonctions d'appartenance et la sortie désirée D à partir des N vecteurs d'entrée de la base d'apprentissage Ω .

$$n \in \{1, \dots, N\}, \Omega = \{X_n\}, X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{6n} \end{pmatrix} \quad (\text{éq. III-10})$$

$$F = \sum_{n=1}^N |De_2(n) - D(n)|$$

avec $De_2(n)$ et $D(n)$ dimensions fractales estimées et théorique du vecteur X_n .

Pour les fonctions trapézoïdales symétriques des coefficients μ_i et γ_i , la fonction d'évaluation à minimiser correspond à la moyenne des erreurs commises en sortie de l'étape de pondération pour des valeurs de dimensions fractales théoriques de la base d'apprentissage variant dans l'intervalle $[1, 2]$ et pour un grand nombre de valeurs de l'entrée Q (éq. II-15) soit :

$$n \in \{1, \dots, N\}, \Omega = \{X_n\}, X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{6n} \end{pmatrix} \quad (\text{éq. III-11})$$

$$F = \sum_{n=1}^N |De_1(n) - D(n)|$$

III.4.2.Choix de la forme des fonctions d'appartenance

Qu'il s'agisse du modèle initial (n entrées) ou du modèle décomposé (deux ou trois entrées), chacun d'entre eux sera muni de ses propres formes de fonctions d'appartenance (trapézoïdales symétriques ou gaussiennes) avec pour l'ensemble de ses fonctions une sensibilité quasi-optimale. La décision de choisir l'une plutôt que l'autre forme de fonctions d'appartenance est incertaine. En fait l'optimisation des paramètres internes et le choix de la forme des fonctions d'appartenance sont deux opérations indissociables qui doivent être réalisées conjointement (Figure III-12).

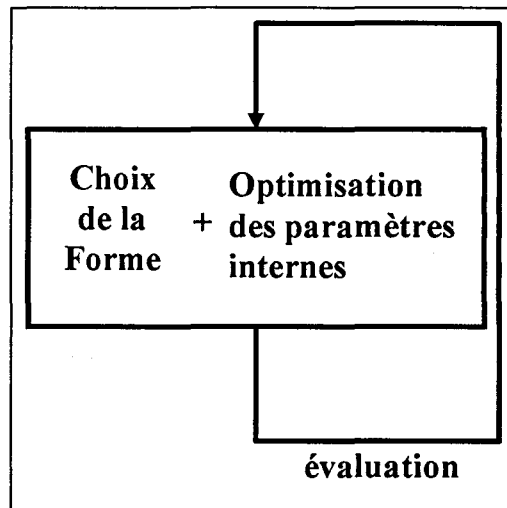


Figure III-12 : Optimisations simultanées de la forme et des paramètres de sensibilité des fonctions d'appartenance

Définissons le système que nous désirons ajuster (Figure III-13). Ce dernier est muni d'un Contrôleur (pour le modèle décomposé, l'opération sera répétée à l'identique pour tous les Contrôleurs) constitué de sa base de règles floues fixe et de ses fonctions d'appartenance dont la sensibilité est à ajuster. Les entrées du système sont les formes de ses fonctions d'appartenance (trapézoïdales symétriques ou gaussiennes) munies de leur paramètre de sensibilité propre. La sortie du système est la somme des erreurs commises en valeur absolue à partir de la base d'apprentissage Ω (éq. III-10).

On peut considérer que le système défini ci-dessus est plongé dans un environnement inconnu. Mais par l'intermédiaire de la base d'apprentissage Ω , nous disposons d'informations pour extraire ses propriétés. De plus, il satisfait les hypothèses suivantes :

- Il est commandable : les états du système peuvent être ajustés par une action sur son entrée (choix de la forme des fonctions d'appartenance),
- il est observable : la sortie F (fonction d'évaluation du choix) du système est sensible aux variations de l'entrée U (forme trapézoïdale ou gaussienne de la fonction d'appartenance),
- sa sortie F est invariante si son entrée U reste inchangée.

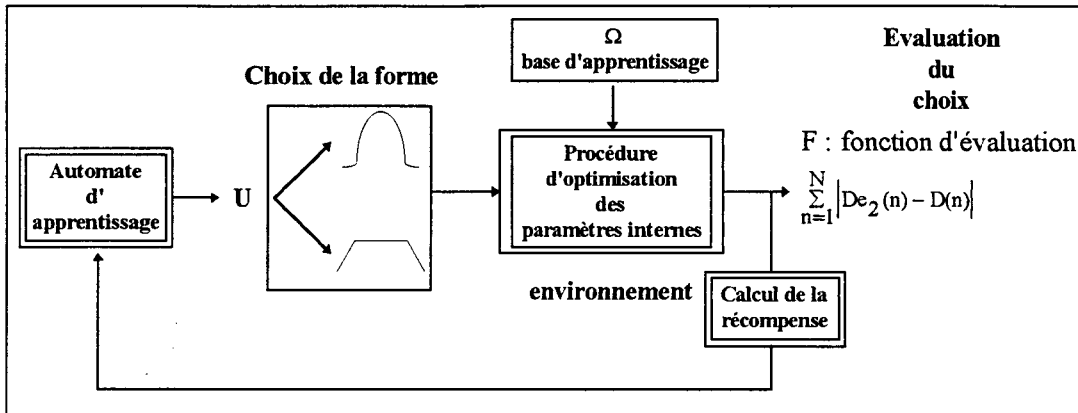


Figure III-13 : Contrôle du système pour l'ajustement des fonctions d'appartenance en boucle fermée

Notre but est de minimiser la sortie F de l'environnement (minimiser l'erreur entre la sortie désirée qui correspond à la dimension fractale et la sortie De_2 de la dimension estimée). Afin de déterminer quel est le meilleur choix pour chaque C.L.F entre des fonctions d'appartenance trapézoïdales symétriques ou gaussiennes, nous mettons en place un automate d'apprentissage en boucle fermée avec le système. Initialement étudiés par TSETLIN [TSE-61] puis développés par NARENDRA [NAR-74][NAR-89], les automates d'apprentissage sont des outils de prise de décision adaptatifs. Ils opèrent dans un environnement inconnu et aléatoire. Ils ont été utilisés comme des modèles de système d'apprentissage. Dans notre problème, on utilise l'automate d'apprentissage couplé à deux algorithmes génétiques pour choisir conjointement la forme et les paramètres internes des fonctions d'appartenance.

Un automate d'apprentissage est défini par (A, Q, R, T) où :

$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ est l'ensemble des actions opérées par l'automate. L'action choisie à l'instant k par l'automate est notée $\alpha(k)$

$$\forall k, \alpha(k) \in A$$

R désigne le domaine de réponse de l'environnement. Ici $R = [0, 1]$.

$\beta(k)$ est la récompense de l'automate à l'instant k qui permet d'évaluer la performance de l'action courante.

$$\forall k, \beta(k) \in R$$

Dans notre stratégie de contrôle, l'objectif est d'amener la sortie F vers un réel minimum positif. $\beta(k)$ sera une fonction de la sortie courante de notre système $F(k)$ et la sortie précédente $F(k-1)$.

$D = \{d_1, d_2, \dots, d_r\}$ sera l'ensemble des probabilités de récompense : $d_i(k) = E[\beta(k) | \alpha(k) = \alpha_i]$.

Q représente l'état de l'automate. Il est défini par $Q(k) = [P(k), \hat{D}(k)]$ avec $P(k)$ le vecteur de probabilité associé aux actions α_i à l'instant k tout comme $\hat{D}(k)$ est le vecteur estimé des probabilités de récompense.

$$P(k) = [p_1(k), \dots, p_r(k)]^T \text{ et } \hat{D}(k) = [\hat{d}_1(k), \dots, \hat{d}_r(k)]^T.$$

$$\forall k, 0 \leq p_i \leq 1, \sum_{i=1}^r p_i(k) = 1$$

T est l'algorithme utilisé pour la mise à jour du nouvel état de l'automate.

Pendant l'exécution de l'algorithme, l'automate choisit une action $\alpha(k)$ dans l'ensemble des actions A à chaque instant k. Le choix de l'action est fait en fonction du vecteur de probabilité $P(k)$. L'action devient une entrée pour l'environnement, qui lui retourne une réponse aléatoire $\beta(k)$. Alors l'état $Q(k)$ de l'automate bascule à l'état $Q(k+1)$

$$Q(k+1) = T(Q(k), \alpha(k), \beta(k))$$

La procédure est répétée jusqu'à ce que l'action optimale soit déterminée. Dans ce cas, nous obtenons :

$$d_m = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \{d_i\}$$

et nous désirons que la probabilité associée à l'action optimale tende vers 1 lorsque k tend vers l'infini. En pratique, nous stoppons la procédure lorsque la récompense $\beta(k)$ est supérieure à une valeur seuil s fixée a priori ($s \in \mathbb{R}$).

$$\beta(k) > s$$

Dans notre application, il existe deux actions ($r = 2$) à l'automate d'apprentissage, soient α_1 = 'fonctions d'appartenance de forme trapézoïdale symétrique' et α_2 = 'fonctions d'appartenance de forme gaussienne'. Ensuite chaque action est associée à un algorithme génétique permettant d'optimiser les paramètres internes correspondant à cette action. A chaque étape k, l'automate sélectionne une action $\alpha(k)$. Son application au système permet de faire évoluer cinq générations de l'algorithme génétique correspondant qui nous retourne la valeur de la fonction d'évaluation $F(k)$, considérée comme la réponse du système à l'action $\alpha(k)$. La récompense $\beta(k)$ est choisie de telle façon qu'elle varie dans l'intervalle $[0, 1]$, qu'une mauvaise action ($F(k) > F(k-1)$) fasse décroître la récompense vers 0 d'autant plus rapidement que la différence est grande. A l'inverse, nous souhaitons qu'une bonne action soit récompensée par une valeur de $\beta(k)$ proche de 1. Selon ce principe, la fonction $\beta(k)$ est définie par :

$$\beta(k) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{C(k)}\right) + \frac{1}{2}$$

où $C(k) = S(k) + \alpha O(k)$

avec α une constante définie positive par l'opérateur.

Le critère C est une combinaison linéaire de stabilité $S(k)$ (le meilleur chromosome de la population ne varie plus ou très peu) et d'optimisation $O(k)$ (le choix d'une forme de fonctions d'appartenance, dont les paramètres internes sont quasi-optimaux, confère l'erreur la plus faible en sortie du C.L.F). Ces deux critères sont fonction des réponses $F(k)$ et $F(k-1)$ du système.

$$S(k) = |F(k) - F(k-1)| \text{ et } O = F(k).$$

Afin d'assurer une convergence de la réponse du système, une stratégie élitiste est retenue pour l'algorithme génétique. Parmi toute la population des chromosomes codant pour une valeur du paramètre *pourcent*, seul le meilleur est conservé. Le choix d'une action réitère la procédure d'algorithme génétique pour poursuivre l'optimisation des paramètres internes des fonctions d'appartenance (Figure III-14).

La mise à jour des probabilités $P(k)$ et $\hat{D}(k)$ s'effectue suivant l'algorithme de poursuite des automates d'apprentissage qui a été développé par OOMMEN et LANCTOT [OOM-90]. Cet algorithme possède l'avantage d'améliorer la vitesse de convergence de l'automate et s'écrit de la façon suivante :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, X_i(0) = 0, n_i(0) = 0, d_i(0) = 1/2$$

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, X_i(k) = X_i(k-1) + \beta(k-1)$$

$$n_i(k) = n_i(k-1) + 1$$

$$\forall j \in \{1, \dots, r\}, j \neq i, X_j(k) = X_j(k-1), n_j(k) = n_j(k-1)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \hat{d}_i(k) = X_i(k)/n_i(k) \text{ (estimation des probabilités de récompense)}$$

$$P(k+1) = P(k) + \mu(e_{M(k)} - P(k)) \text{ (probabilités d'action)}$$

avec e_j est un vecteur de dimension r , dont la j -ième composante est égale à un et dont toutes les autres sont nulles. $M(k)$ correspond à l'index de l'estimation de la récompense maximale, soit :

$$\hat{d}_{M(k)} = \text{Max} \left\{ \hat{d}_j(k) / j = 1, 2, \dots, r \right\}$$

μ est un paramètre interne à l'automate.

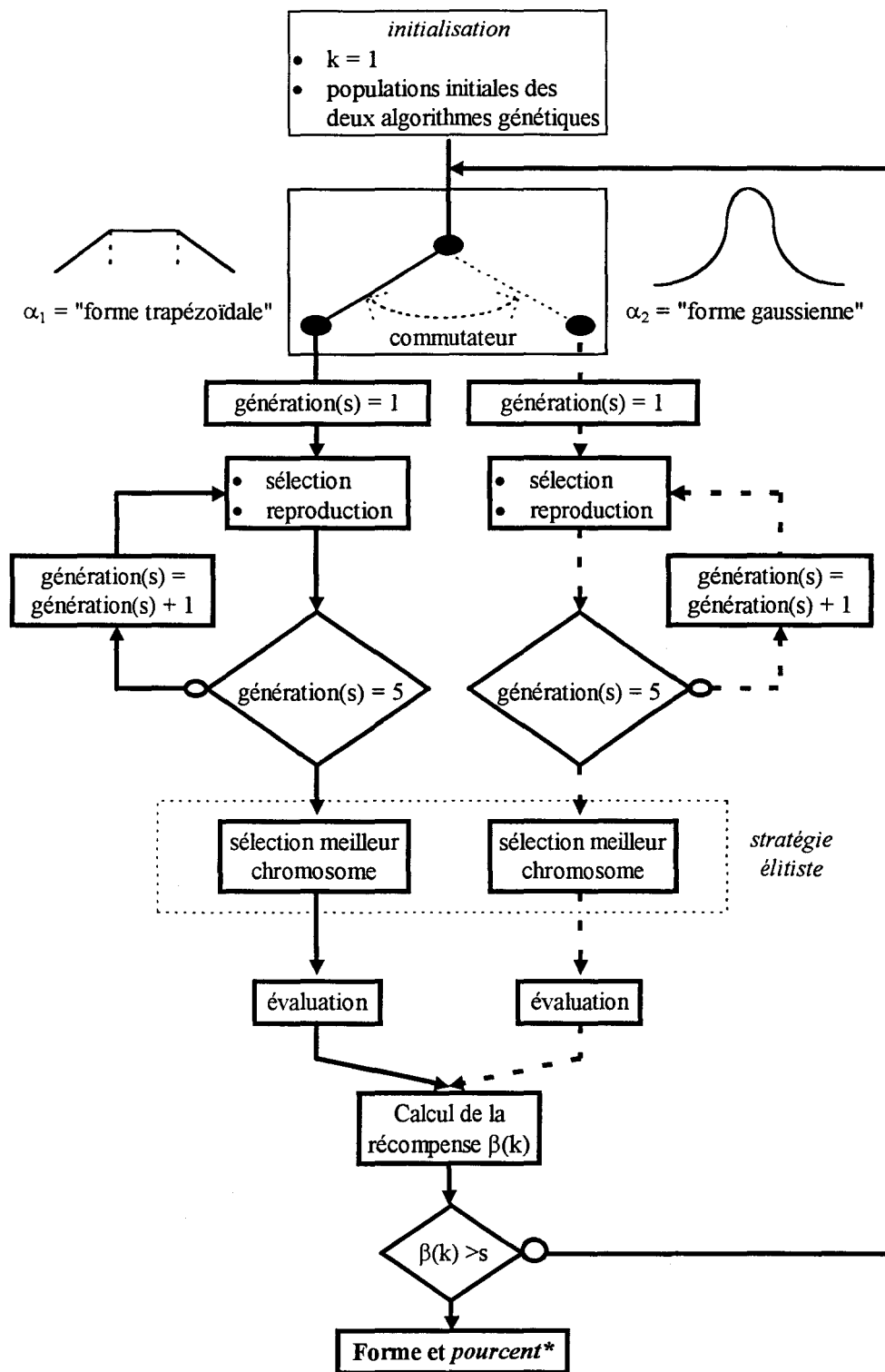


Figure III-14 : Schéma de l'automate d'apprentissage pour l'optimisation des fonctions d'appartenance

L'application de l'algorithme de poursuite permet de sélectionner rapidement une meilleure action (forme de fonction d'appartenance) et ses paramètres internes optimaux en exécutant

alternativement deux algorithmes génétiques plongés dans deux univers différents de paramètres internes.

La mise en place de la décomposition du modèle flou initial en structure hiérarchique permet de réduire la complexité des relations entre les entrées impliquées dans les caractéristiques des courbes fractales en amont du modèle et la sortie en aval correspondant à l'estimation de la dimension fractale. Couplée à un découpage quasi-optimal de l'espace des entrées en sous-espaces flous par l'intermédiaire de l'automate d'apprentissage, le modèle proposé pour l'estimation de la dimension fractale présente l'avantage d'allier

- lisibilité et rapidité : réduction de la complexité (réduction du nombre de règles),
- précision : optimisation de la perte de précision de la structure décomposée et de la partition de l'espace des entrées,
- flexibilité : ajout de nouvelles formes de fonctions d'appartenance en entrée de l'automate d'apprentissage.

CHAPITRE IV

SIMULATION

IV. SIMULATION

Cette partie de l'étude est consacrée à la présentation des résultats de la simulation. Les courbes, sur lesquelles est appliquée notre méthode d'estimation de la dimension fractale, sont celles de WEIERSTRASS-MANDELBROT et de TAKAGI respectivement désignées par WM (éq. I-19) et T (éq. I-21). Ces deux courbes ont été retenues car elles offrent l'avantage d'être des objets de dimension fractale connue théoriquement et nous permettent par conséquent de calculer l'erreur commise à chacune des étapes de l'estimation. De plus, elles sont indépendantes l'une de l'autre. La plupart des méthodes décrites dans le premier chapitre ont été testées sur la courbe WM. Nous présenterons d'une part les résultats des dimensions fractales estimées par notre méthode sur la courbe WM non modifiée, c'est à dire sans qu'elle ait subi de correction de tendance (courbe croissante). Par la suite, nous élaborerons la base d'apprentissage à l'aide de cette même courbe afin d'estimer la dimension fractale de la courbe T non modifiée.

Au cours des différentes étapes de l'estimation de la dimension fractale, nous avons fait appel à des algorithmes génétiques pour la recherche d'optima.

- L'étape de pondération utilise l'algorithme génétique pour faire la recherche des paramètres internes quasi-optimaux des fonctions trapézoïdales symétriques définissant les coefficients μ_i et γ_i .
- L'étape d'approximation fait plusieurs fois appel à des algorithmes génétiques afin :
 1. de minimiser la perte d'information dans la recherche de structures décomposées pour le modèle flou à deux et trois entrées,
 2. d'optimiser à la fois la forme et les paramètres internes des fonctions d'appartenance.

Les probabilités de recombinaison (p_c) et de mutation (p_m) des algorithmes génétiques utilisées dans les différentes procédures sont données dans le Tableau IV-1. La probabilité de mutation est ajustée en fonction du nombre de gènes de chaque chromosome et du nombre total de chromosomes. Ce dernier est ajusté en fonction du nombre de gènes. Pour la procédure d'optimisation des fonctions d'appartenance, dans la mesure où une stratégie élitiste a été retenue, le nombre de chromosomes, comme le nombre d'itérations, est réduit. L'automate d'apprentissage réitère la poursuite de l'un des deux algorithmes génétiques à chaque étape du choix d'une action.

PROCEDURE	p_c	p_m	Nombre de chromosomes	Taille des chromosomes (gènes)	Nb itérations
Etape de pondération	0,2	10^{-3}	128	16	20
Décomposition du modèle flou (deux et trois entrées)	0,2	10^{-2}	64	8	10
Optimisation des fonctions d'appartenance	0,2	10^{-2}	10	8	5

Tableau IV-1 : Valeurs des paramètres utilisés dans les algorithmes génétiques

IV.1. Résultats de l'étape de pondération

La base d'apprentissage est construite à partir de la courbe WM avec $b = 2,10$. Le domaine de définition de WM correspond à l'intervalle $D_f = [0,6 ; 0,61]$.

IV.1.1. Optimisation des fonctions trapézoïdales des facteurs de pondération μ_i et γ_i

Les paramètres *pourcent* et *pourcent'* règlent les paramètres internes des fonctions trapézoïdales symétriques des coefficients μ_i et γ_i ($i \in \{0, 1, \dots, 5\}$) mises en place à l'étape de pondération. La Figure IV-1 met en évidence la variation de l'erreur moyenne $\langle De_1 - D \rangle$ commise entre la dimension fractale estimée De_1 , en sortie de l'étape de pondération, et la dimension fractale D . Elle montre que l'erreur augmente si les pentes du trapèze diminuent, c'est à dire si des dimensions fractales estimées par la méthode de dénombrement des boîtes prises en considération sont trop éloignées des intervalles de confiance $[\bar{D}(n) - \Delta D(n), \bar{D}(n) + \Delta D(n)]$ et $[\bar{D} - \Delta D, \bar{D} + \Delta D]$. En effet, le poids accordé aux valeurs de dimensions fractales estimées par la méthode de dénombrement des boîtes doit diminuer à mesure que l'on s'éloigne de l'intervalle délimité par la valeur de la moyenne des estimations et leur écart par rapport à la moyenne.

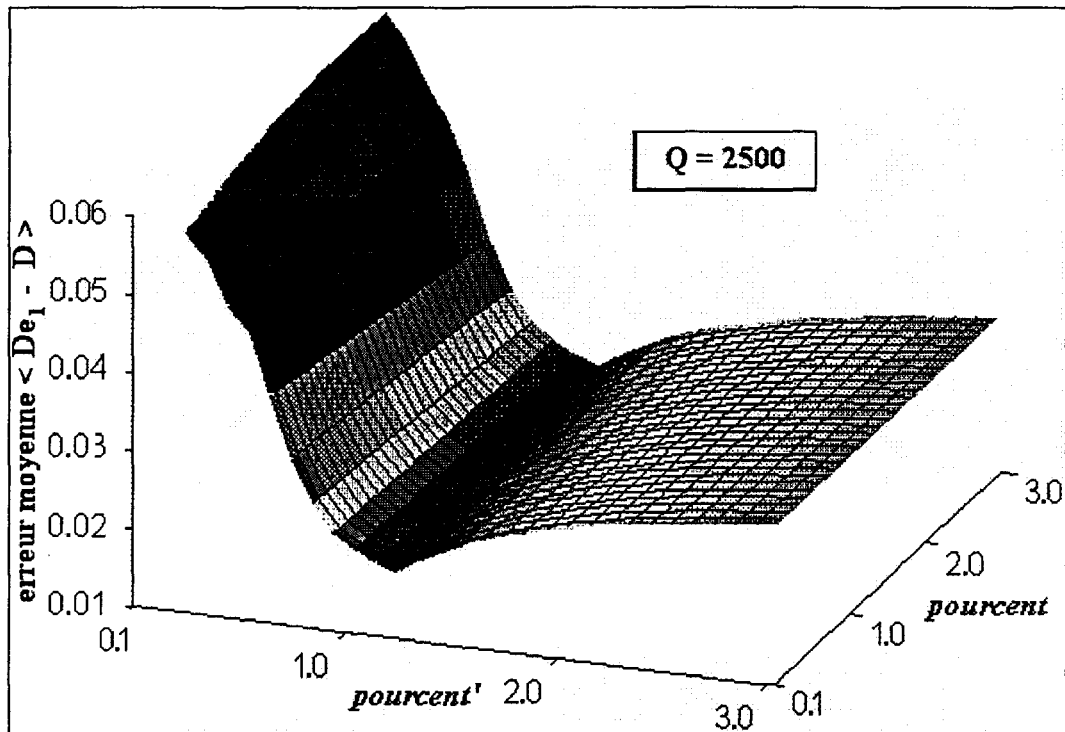


Figure IV-1 : Variation de l'erreur moyenne de la courbe WM en fonction des paramètres internes de la fonction trapézoïdale en sortie de l'étape de pondération

La procédure d'optimisation des paramètres *pourcent* et *pourcent'* par un algorithme génétique, mise en place à la section, nous renvoie les valeurs quasi-optimales du Tableau IV-2.

Base d'apprentissage	<i>pourcent</i>	<i>pourcent'</i>
WM	0,15	1,20

Tableau IV-2 : Valeurs des coefficients *pourcent* et *pourcent'* quasi-optimaux

IV.1.2.Sortie de l'étape de pondération (De_1)

Les paramètres internes des fonctions trapézoïdales symétriques étant quasi-optimisées, la Figure IV-2 et la Figure IV-3 nous présentent l'erreur commise entre la sortie de l'étape de pondération De_1 et la dimension fractale D pour différentes valeurs d'échantillonnage Q . Nous remarquons que de faibles valeurs de Q conduisent à une plus grande erreur systématique (cf. Figure IV-2). Au-delà d'une valeur d'échantillonnage (ici $Q = 2000$), l'erreur systématique reste identique et dépend pour l'essentiel de la valeur de la dimension fractale D (cf. Figure IV-3). Nous pouvons remarquer par ailleurs que le minimum de l'erreur correspond à des dimensions fractales de la courbe comprises dans l'intervalle $[1,4 ; 1,6]$.

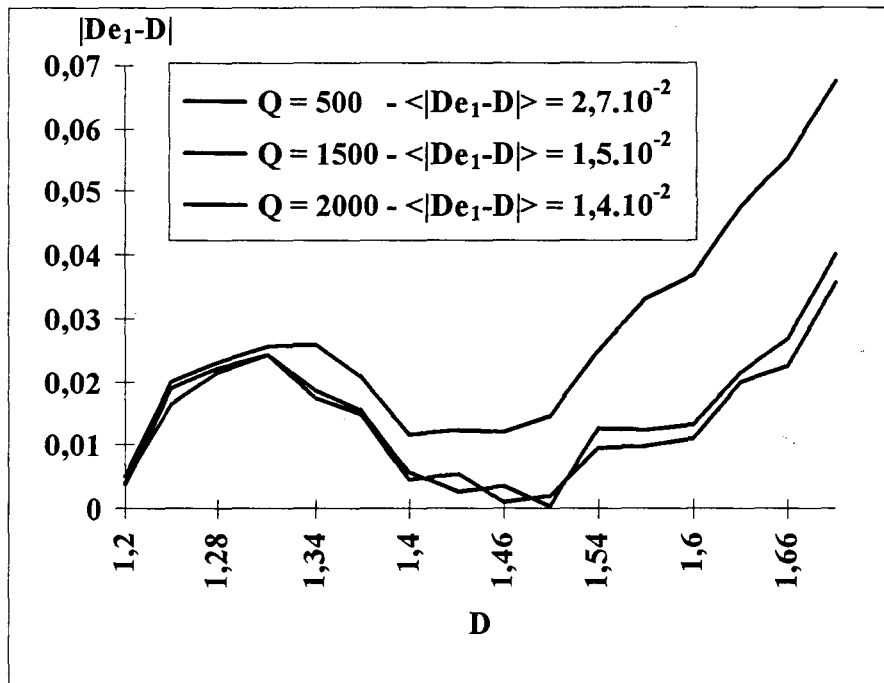


Figure IV-2 : Erreur en sortie de l'étape de pondération en fonction de Q

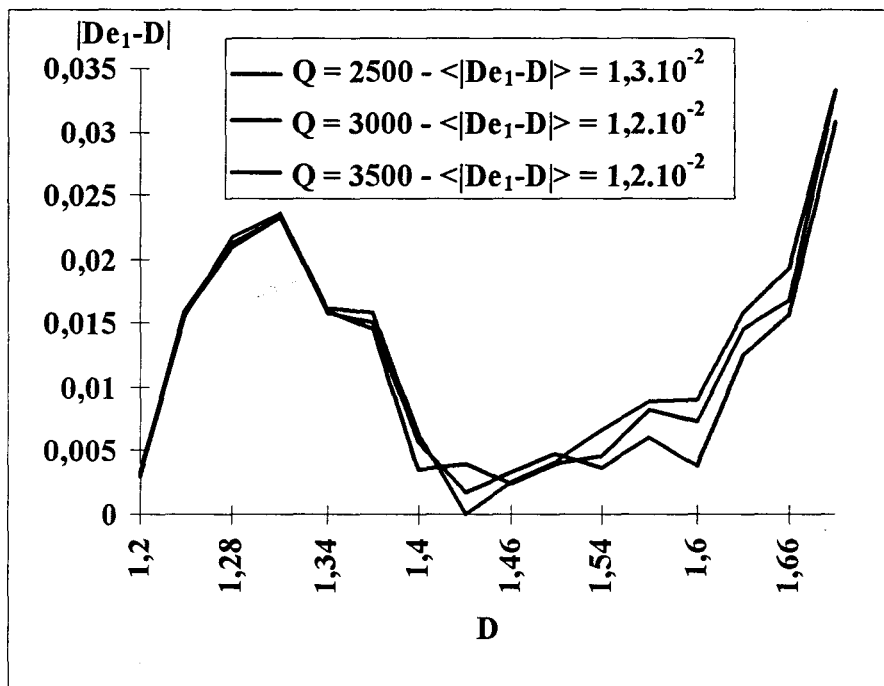


Figure IV-3 : Erreur en sortie de l'étape de pondération en fonction de Q

La valeur estimée de la dimension fractale en sortie de l'étape de pondération est fortement améliorée par rapport à la dimension estimée par la méthode de dénombrement des boîtes. Toutefois, quelle que soit la valeur d'échantillonnage Q retenue, il subsiste une forte variation de l'erreur en fonction de la dimension fractale D et c'est la raison pour laquelle nous avons

proposé de réduire ces erreurs systématiques par l'introduction d'un Contrôleur en Logique Floue.

IV.2. Validation de la décomposition du modèle flou en structure hiérarchique

Afin de valider la performance de la méthode proposée pour la construction de la structure hiérarchique du modèle flou, nous avons appliqué notre méthode de décomposition au problème d'approximation d'une fonction à trois entrées et une sortie. Nous considérons une fonction non linéaire (éq. IV-1), dans laquelle le premier terme a plus d'importance que le second au niveau des valeurs de la sortie. La fonction de test est définie par les trois variables d'entrée x_1 , x_2 et x_3 variant dans l'intervalle $[0 ; 1]$. La sortie y est comprise dans l'intervalle $[0 ; 0,5]$. Les huit sous-intervalles C_i ($i \in \{0, \dots, 7\}$) sont choisis de telle façon qu'il procèdent à un découpage homogène de l'espace de sortie (Tableau IV-3). La base d'apprentissage Ω est construite avec 1000 vecteurs d'entrée X_n ($n \in \{0, 2, \dots, 999\}$). Les entrées x_1 et x_2 jouent un rôle identique.

$$y = \frac{1}{10} \cdot (4 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_3) \quad (\text{éq. IV-1})$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in [0 ; 1]^3$$

ENTREE tri-dimensionnelle $X \in [0 ; 1]^3$	SORTIE mono-dimensionnelle $y_n \in [0 ; 0,5]$
$X_n \in \Omega, n \in \{0, 1, \dots, 999\},$ $X_n = 0,1 \times (k_n^1 k_n^2 k_n^3)^T$ avec $\begin{cases} k_n^1 = n \text{ div } 100 \\ k_n^2 = (n \text{ mod } 100) \text{ div } 10 \\ k_n^3 = n \text{ mod } 10 \end{cases}$	8 classes C_0 à C_7 $y_n \in C_0, y \in [0 ; 0,0625]$ $y_n \in C_1, y \in]0,0625 ; 0,125]$ $y_n \in C_2, y \in]0,125 ; 0,1875]$ $y_n \in C_3, y \in]0,1875 ; 0,25]$ $y_n \in C_4, y \in]0,25 ; 0,3125]$ $y_n \in C_5, y \in]0,3125 ; 0,375]$ $y_n \in C_6, y \in]0,375 ; 0,4375]$ $y_n \in C_7, y \in]0,4375 ; 0,5]$

Tableau IV-3 : Entrées/sortie du C.L.F pour la fonction test définie en (éq. IV-1)

L'interface de defuzzification (éq. IV-2) est choisie en tenant compte de la distribution uniforme des classes de sortie $C_i =]C_{i\min}, C_{i\max}]$ dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

$$\hat{y}_n = \frac{\sum_{i=0}^7 d_i(X_n) \cdot m_i \cdot \sigma_i}{\sum_{i=0}^7 d_i(X_n) \cdot \sigma_i} \quad (\text{éq. IV-2})$$

$$\forall i \in \{0, \dots, 7\},$$

$$m_i = \frac{1}{2} \cdot (C_{\text{imin}} + C_{\text{imax}}) \text{ et } \sigma_i = \frac{1}{2} \cdot (C_{\text{imax}} - C_{\text{imin}})$$

Le détail de la décomposition du modèle simple en modèle décomposé à deux et trois entrées est exposé à l'ANNEXE A. Les résultats présentés dans le Tableau IV-4 sont évalués en imposant la forme des fonctions d'appartenance et leur paramètres internes. L'erreur moyenne correspond au rapport de la somme des valeurs absolues des différences entre la valeur estimée par le modèle et la valeur réelle sur le nombre total d'échantillons (éq. IV-3).

$$\langle \text{erreur} \rangle = \frac{1}{1000} \times \sum_{n=0}^{n=999} |y_n - \hat{y}_n| \quad (\text{éq. IV-3})$$

Toutes les fonctions d'appartenance, pour le modèle simple comme pour sa décomposition à deux (Figure IV-4) ou trois entrées (Figure IV-5), sont de forme gaussienne avec une valeur fixe du paramètres *pourcent* ($\text{pourcent} = \frac{1}{7}$). Nous pouvons noter que le nombre de fonctions d'appartenance est sensiblement réduit pour une perte en moyenne de précision acceptable. Une part importante d'hyper-volumes caractérisant de petites régions floues de l'espace des entrées disparaît dans les deux structure du modèle décomposé (à deux et trois entrées).

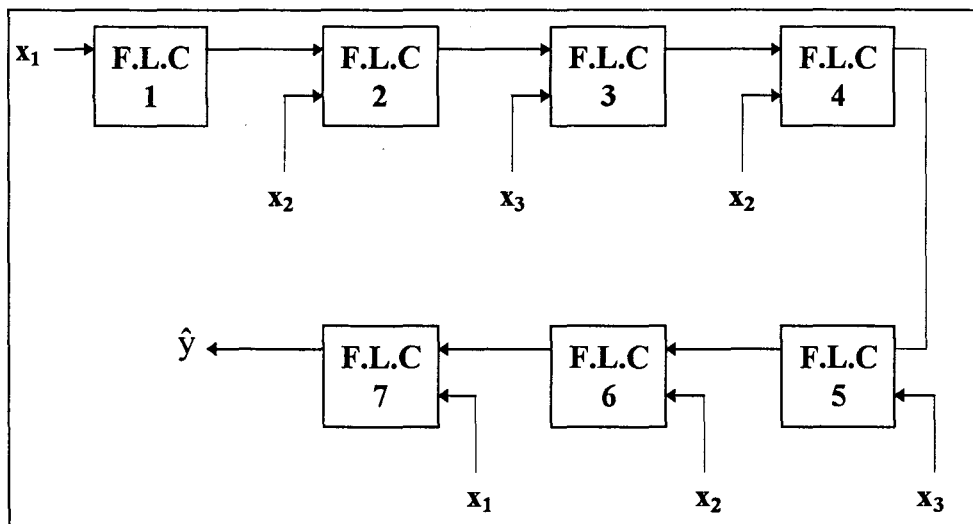


Figure IV-4 : Modèle flou décomposé à deux entrées obtenu pour (éq. IV-1)

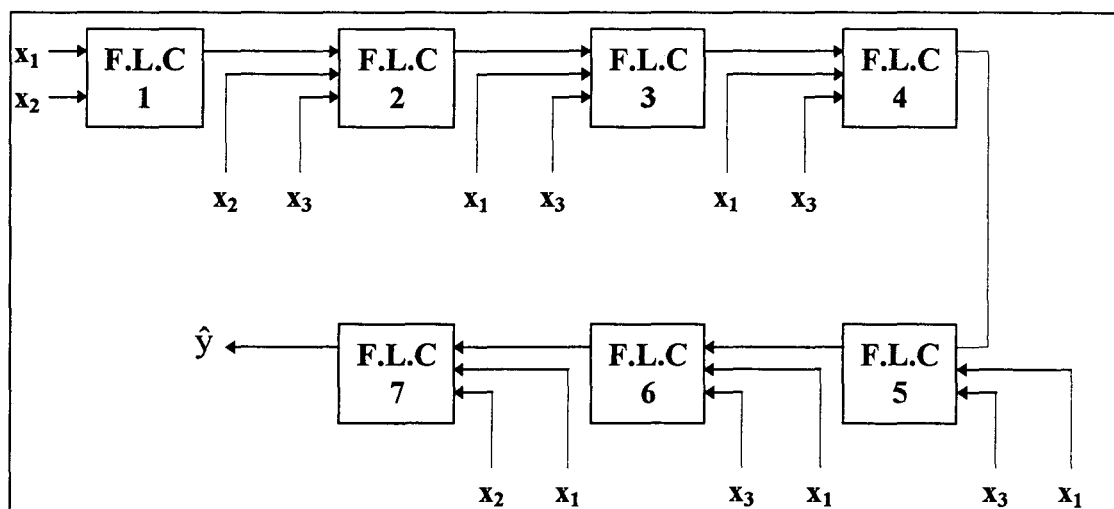


Figure IV-5 : Modèle flou décomposé à trois entrées obtenu pour (éq. IV-1)

	Modèle simple	Modèle décomposé à deux entrées	Modèle décomposé à trois entrées
< erreur >	$3,32 \cdot 10^{-2}$	$5,74 \cdot 10^{-2}$	$4,85 \cdot 10^{-2}$
Nombre de règles	657	193	529

Tableau IV-4 : Comparaison des modèles flous simple/décomposés pour la fonction de test

IV.3. Résultats de l'étape d'approximation

IV.3.1. Résultats du modèle flou simple

La construction de la base d'apprentissage est telle qu'elle est définie en (éq. II-15) avec la courbe de WEIERSTRASS-MANDELBROT (WM - $b = 2,10$). Le Tableau IV-5 nous renseigne sur la pertinence des entrées. Afin d'évaluer le rôle d'une entrée dans le modèle flou, nous déterminons le nombre de fonctions d'appartenance générées par la procédure d'extraction des règles en retirant cette entrée. Il suffit ensuite de le comparer au nombre de fonctions d'appartenance générées avec la totalité des entrées (3791 - cf ANNEXE B). L'entrée De_1 est indispensable à la génération des règles et elle n'a pas à être retranchée. On remarque immédiatement le rôle important de l'entrée RD, sans laquelle le nombre d'intersections (I) et de fonctions d'appartenance diminue fortement. L'entrée DENS joue un rôle moins important. C'est une entrée dont la valeur suit approximativement l'évolution de De_1 . Le rôle des entrées

SW, Q et R est moins prépondérant dans la mesure où elles sont la conséquence du choix de l'opérateur ou bien de la norme d'appareils de mesure.

Dans la procédure d'optimisation des fonctions d'appartenance, la valeur *seuil* retenue pour l'automate d'apprentissage est fixée à la valeur 0,9. Le coefficient α de l'éq., choisit pour la fonction de récompense, est fixé à la valeur 100. Nous accordons un poids plus important au critère d'optimisation des paramètres internes plutôt qu'au critère de stabilité de la population. La Figure IV-6 nous renseigne sur l'évolution de la fonction de récompense à chaque instant k (nombre d'itérations) en fonction du choix de la forme des fonctions d'appartenance. Une forme gaussienne des fonctions d'appartenance est donc retenue avec un paramètre de réglage de la sensibilité des paramètres internes *pourcent* égal à 0,0295. Dès lors, la fonction d'évaluation est égale à 0,024. La Figure IV-7 montre la valeur prise par la fonction d'évaluation pour différentes valeurs du paramètre interne *pourcent* en fonction de la forme des fonctions d'appartenance. Quel que soit le choix de la forme, nous notons que lorsque la largeur des fonctions d'appartenance est trop faible (notion d'appartenance au sens usuel du terme mathématique) ou trop grande (recouvrement des noyaux), l'erreur augmente. L'évolution des deux formes de fonction tend à se rapprocher. Toutefois, la forme gaussienne présente un profil plus régulier et, dans la mesure où elle prend en compte tous les éléments des sous-espaces flous d'entrée (elle ne s'annule jamais), elle tend à conférer une erreur minimale.

La Figure IV-8 correspond à l'évolution de la valeur absolue de l'erreur en sortie de l'étape de pondération (De_1) et de l'étape d'approximation (De_2) en fonction de la valeur de la dimension fractale D . Nous avons ajouté sur la figure l'estimation de la dimension fractale obtenue par la méthode de dénombrement des boîtes en nous inspirant de la méthode décrite par LIEBOVITCH et TOTH. La suite $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ choisie est celle décrite à l'(eq. I-17). Afin d'évaluer la performance de notre méthode, nous avons fait le choix d'un faible échantillonnage Q ($Q = 500$). Dans ces conditions, la suite définie pour la méthode de dénombrement des boîtes devient (eq. IV-4) :

$$Q = 2^K \Rightarrow K = E\left(\frac{\ln Q}{\ln 2}\right) \quad (\text{eq. IV-4})$$

ici $Q = 500$, donc $K = 9$

E désigne la partie entière

Le terme général ε_k de la suite devient

$$0 \leq k \leq K, \varepsilon_k = 2^{-k}$$

Comme le proposent HUANG *et al.*, nous ne retenons que les valeurs de la suite comprises dans l'intervalle $[2/500 ; 1/2]$. La sortie De_1 de l'étape de pondération améliore notablement l'estimation de la dimension fractale qui peut elle-même être améliorée par la correction apportée à l'étape d'approximation (De_2) sur le domaine de variation de la dimension fractale D .

Entrée éliminée	Nombre de niveaux d'intersection (l)	Nombre total d'hypervolumes (Activation et Inhibition)
DENS	206	3454
RD	28	838
SW	206	3672
Q	206	3651
R	206	3551

Tableau IV-5 : Pertinence des entrées de l'étape d'approximation

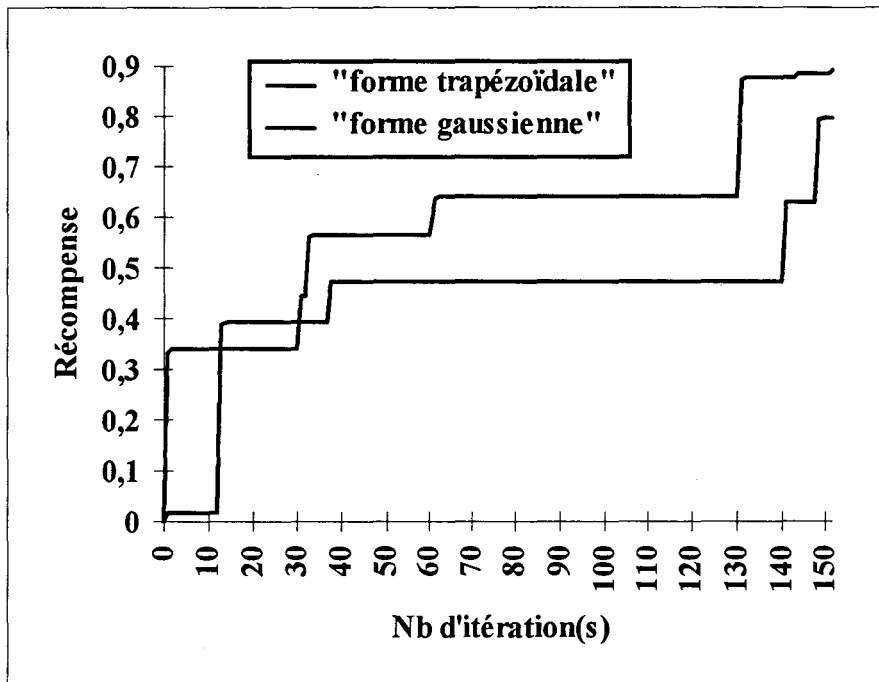


Figure IV-6 : Evolution de la récompense $\beta(k)$ dans le cas du modèle flou simple
(*seuil* = 0,9 - *a* = 110)

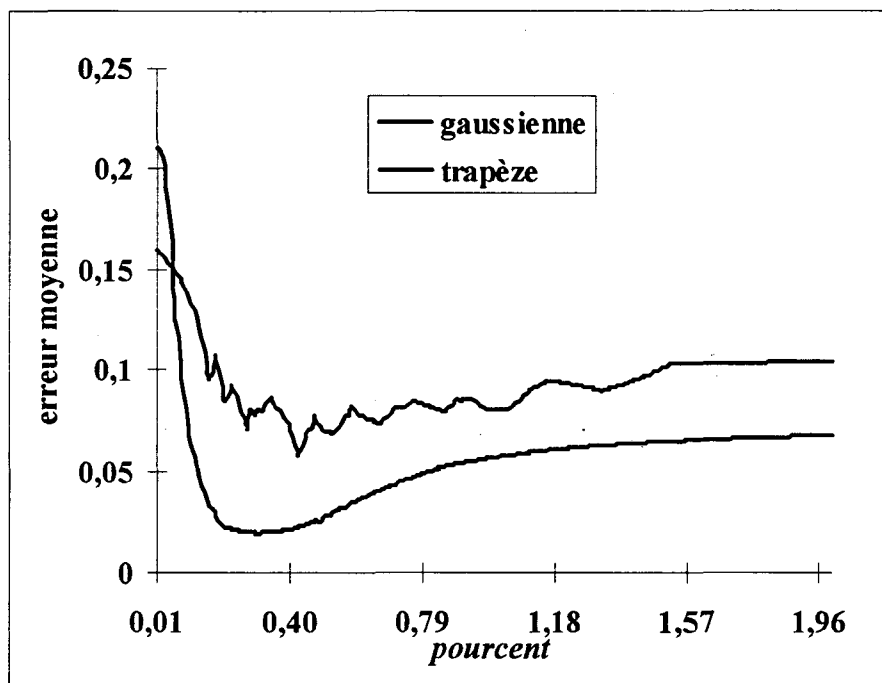


Figure IV-7 : Evolution de la fonction d'évaluation en fonction du paramètre interne des fonctions d'appartenance

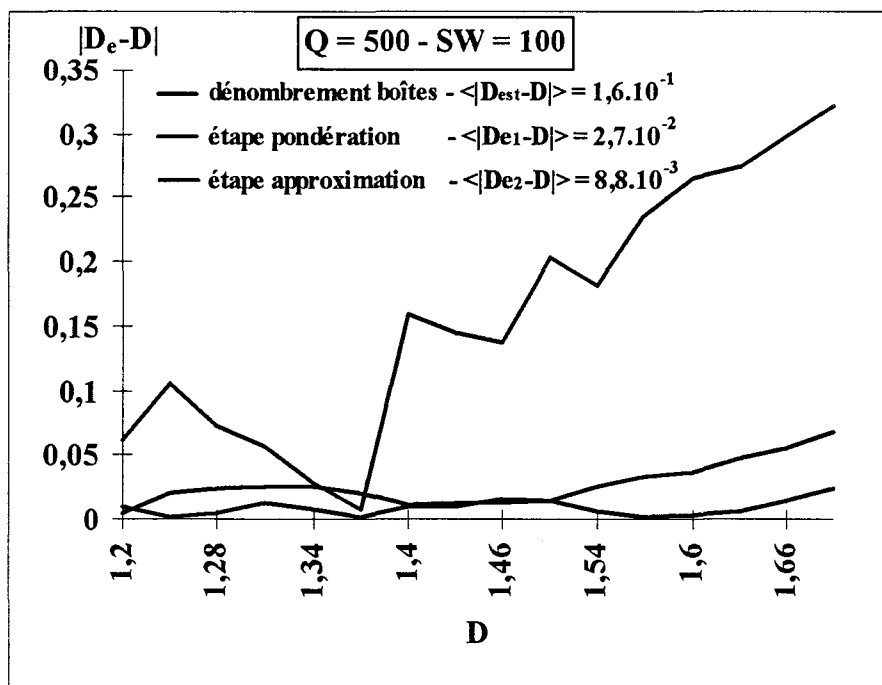


Figure IV-8 : Comparaison des résultats pour la fonction WM

Remarque :

$\langle |D_e - D| \rangle$ désigne l'erreur moyenne commise entre D_e (dimension estimée) et différentes valeurs de D (dimension fractale), soit

$$\langle |D_e - D| \rangle = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} |D_e(i) - D(i)| \text{ où } N_b \text{ est le nombre de valeurs de } D.$$

IV.3.2. Comparaison des modèles flous décomposés

Le détail des constructions de la décomposition du modèle flou à deux et trois entrées est présenté à l'ANNEXE B. La Figure IV-9 représente la structure décomposée du modèle à deux entrées et la Figure IV-10 celle de la structure décomposée obtenue pour trois entrées. La Figure IV-11 nous montre que le modèle simple confère une erreur moyenne minimale. Une perte d'information apparaît pour les structures décomposées, plus faible pour la structure à trois entrées que pour celle à deux entrées.

La variation de la valeur absolue de l'erreur entre la valeur estimée de la dimension fractale pour la courbe T et la dimension fractale D est représentée à la Figure IV-12. Pour cette estimation, la base d'apprentissage est construite avec la courbe WM. L'erreur a tendance à augmenter pour des estimations de dimensions fractales qui s'approchent de 1 (le profil de la courbe devient régulier) ou au contraire qui s'approchent de la valeur 2 (le profil de la courbe devient très irrégulier). Ceci met en évidence que d'autres entrées doivent être introduites afin de mieux réduire l'erreur commise pour des dimensions fractales proches des bornes de l'intervalle [1, 2]. L'ajout de nouvelles entrées dans le modèle, plus à même de contrôler ces erreurs aux bornes, est facilité par la mise en place des structures décomposées. D'autre part, la base d'apprentissage peut être enrichie par l'apport de nouvelles courbes théoriques de dimensions fractales connues.

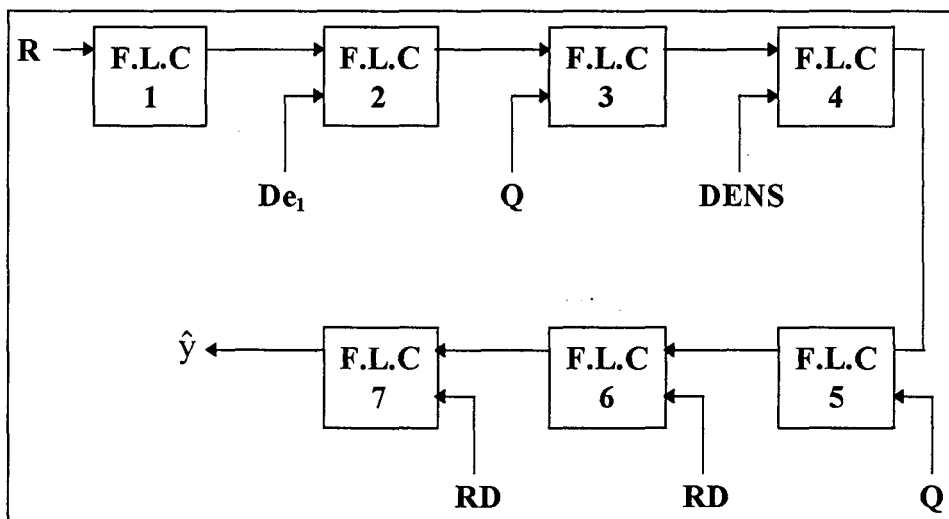


Figure IV-9 : Décomposition hiérarchique à deux entrées obtenue avec WM

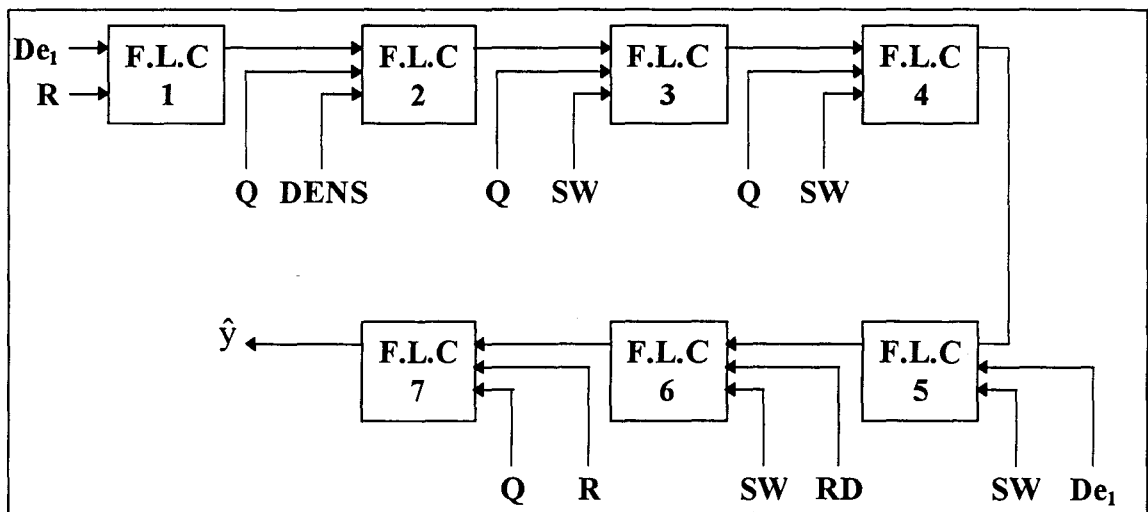


Figure IV-10 : Décomposition hiérarchique à trois entrées obtenue avec WM

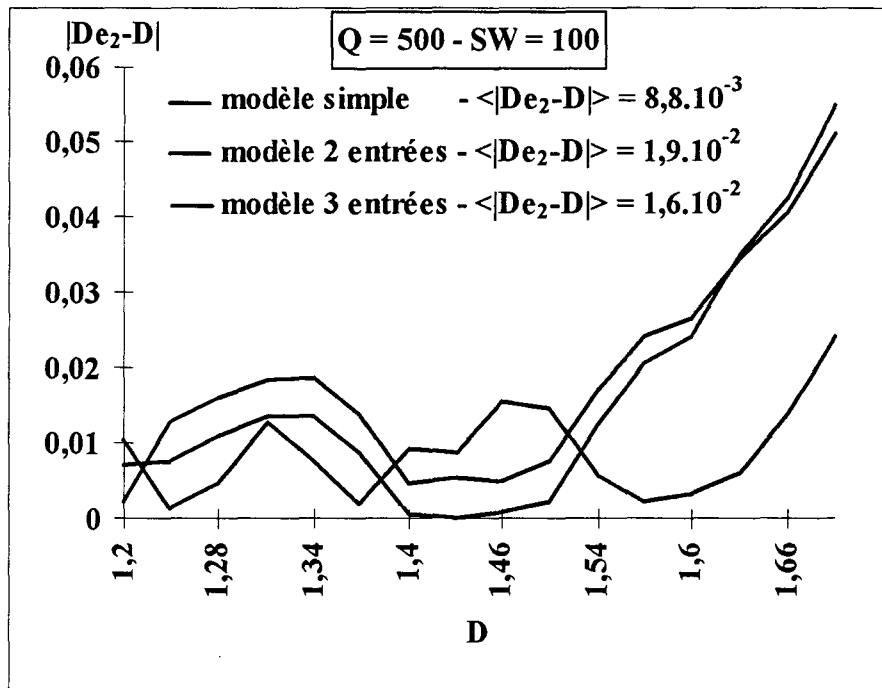


Figure IV-11 : Comparaison des sorties modèle simple/structures décomposées pour WM

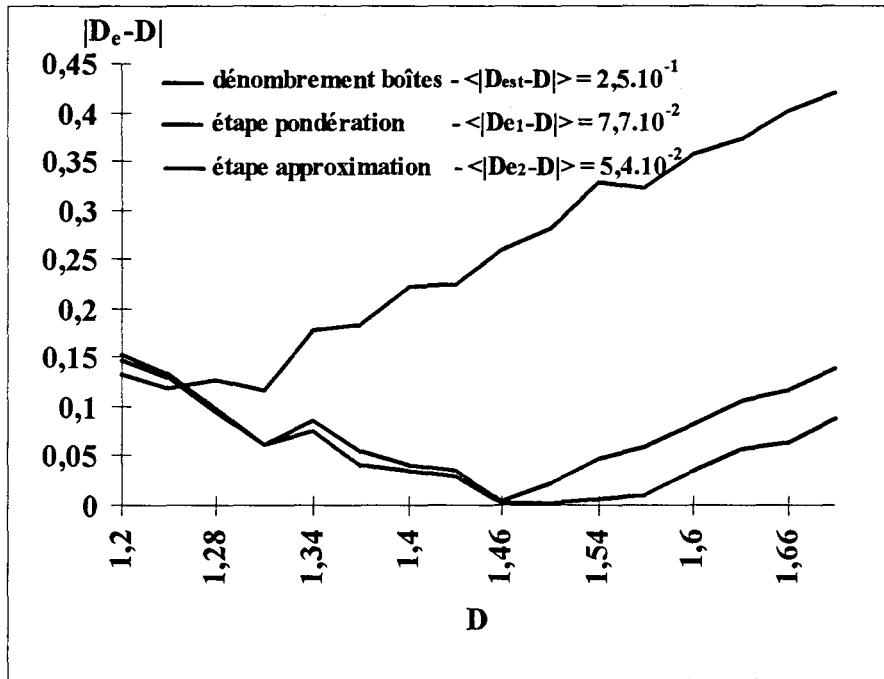


Figure IV-12 : Comparaisons de dimensions fractales estimées pour T non modifiée

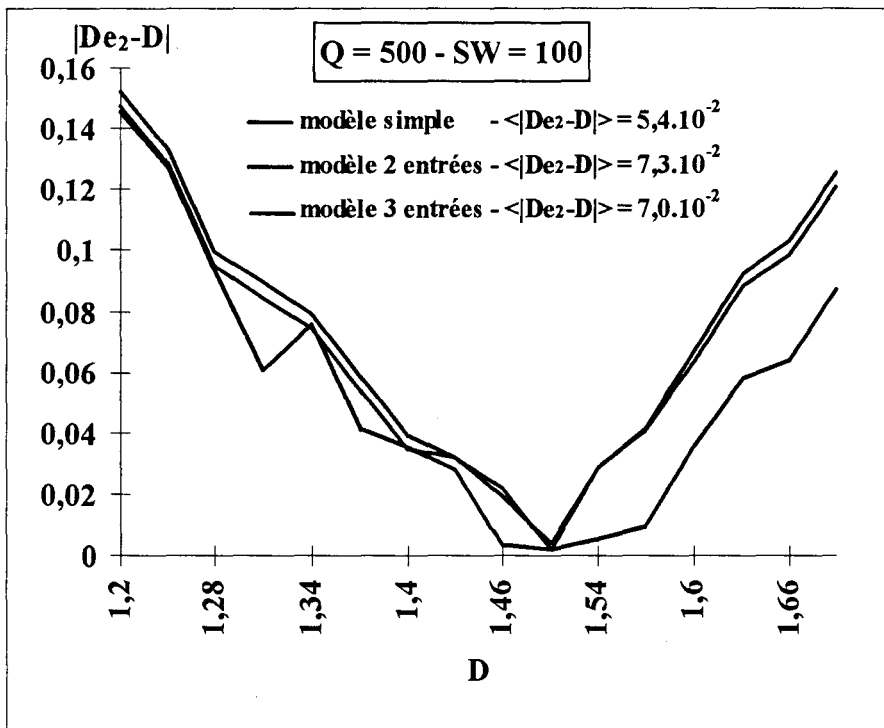


Figure IV-13 : Comparaison des sorties modèle simple/structures décomposées pour T non modifiée

IV.3.3. Analyse des résultats

La méthode proposée d'estimation de dimension fractale a été testée sur deux fonctions de test (WM et T) pour lesquelles la dimension fractale est connue. Les résultats de simulation ont été exposés à la Figure IV-8 pour la fonction WM et à la Figure IV-12 pour la fonction T. En comparant avec les résultats obtenus par la méthode de dénombrement des boîtes, on constate que la méthode proposée apporte une plus grande précision dans l'estimation de la dimension fractale. Pour la fonction WM, l'erreur commise pour la dimension fractale estimée diminue fortement sur tout l'intervalle de D, soit [1, 2]. Pour la fonction T, l'erreur diminue sur l'intervalle [1,3 ; 2] mais croît à nouveau sur l'intervalle [1 ; 1,3]. Ceci est dû au fait que les variables DENS, RD et R ne parviennent plus à être significatives pour cette fonction lorsque la valeur de D est proche de 1. Selon notre expérience, la fonction T représente le cas le plus défavorable et la précision dans l'estimation de la dimension fractale peut être nettement améliorée pour la plupart des courbes quasi-régulières.

De nouvelles variables mesurables, sensibles à l'évolution de D, devront être introduites à l'entrée du modèle proposé afin d'améliorer la précision dans l'estimation de la dimension fractale. L'intégration de nouveaux échantillons dans la base d'apprentissage pourra également améliorer la qualité de l'estimation.

Les résultats du modèle initial et des modèles décomposés sont comparés dans la Figure IV-11 (pour la courbe WM) et dans la Figure IV-13 (pour la fonction T). On constate que la précision de l'estimation de dimension fractale n'est pas affectée dans les modèles décomposés (du même ordre que pour le modèle simple). Avec ces structures décomposées, la complexité est largement réduite (ANNEXE B) et les résultats en sortie sont toujours satisfaisant.

Des travaux récents [BIG-96], proposant une nouvelle méthode d'estimation de la dimension fractale, présentent des résultats comparables à ceux obtenus par notre approche. L'erreur commise est appréciée à partir de la courbe de WEIERSTRASS-MANDELROT et montre une évolution, en fonction de la dimension fractale, qui croît pour les faibles valeurs de la dimension (D proche de 1), diminue au voisinage de 1,5 et augmente à nouveau plus faiblement pour des valeurs supérieures à 1,5.

CHAPITRE V

APPLICATION

V. APPLICATION

V.1. La fibre de laine

On se propose d'appliquer l'estimateur de la dimension fractale défini précédemment à l'étude des fibres naturelles protéiques de laine Australienne du Cap Zélande lavée et battue d'un diamètre moyen de $20,20\mu\text{m}$. En métrologie textile, et particulièrement au microscope, c'est avant tout l'aspect des surfaces des fibres qui peut présenter un centre d'intérêt pour la géométrie fractale. Ce qui est recherché en priorité, c'est un moyen de quantifier l'irrégularité des rides à la surface des fibres de laine. La géométrie fractale offre un nouvel outil : la dimension fractale. Notons que l'effet de résolution au microscope (choix de grossissements différents du microscope) pour des mesures sur des objets peuvent conduire à des écarts. La genèse de la structure d'une fibre de laine est le fruit de multiples phénomènes aléatoires. L'existence d'une dimension non entière unique dans laquelle peut être appréhender l'objet doit être remplacée par une dérive continue de la dimension fractale, avec une tendance fractale idéale asymptotique. Nous montrerons qu'une interprétation fractale, purement descriptive, apporte de nouvelles informations.

La fibre de laine du mouton est une fibre longue, frisée (Figure V-1), qui peut être assimilée à un cylindre. Comme le montre la vue longitudinale de la Figure V-3, elle offre la particularité de présenter des écailles distantes entre elles d'environ $10\mu\text{m}$. Les différentes fibres de laine cylindriques peuvent être caractérisées par leur diamètre en microns. Une première approche de la mise en adéquation de la dimension fractale, évaluée par la méthode de dénombrement des boîtes, de la frisure de différentes fibres naturelles et synthétiques avec les propriétés de résilience, d'élasticité et du toucher a été abordée [MUR-95]. Toutefois la conclusion de l'article amène à penser que d'autres paramètres doivent être extraits de l'analyse des fibres afin de pouvoir mieux caractériser les propriétés précédentes.

L'opération de filature consiste à obtenir, en partant de fibres discontinues en vrac, un fil continu, de grande cohésion présentant un rapport diamètre sur longueur le plus faible possible. Les qualités recherchés dans les fils issus de la mise en œuvre des fibres de laine sont principalement sa régularité en masse linéique, sa finesse et sa résistance dynamométrique. La cohésion du fil est

conférée en partie par la torsion (Figure V-2), mais elle est toutefois tributaire de l'état de surface des fibres. La laine, de par ses écailles, présente l'avantage d'offrir un fort coefficient de frottement inter-fibres et elle est par conséquent parfaitement adaptée à l'obtention de fils fins (nombre de fibres en section faible).

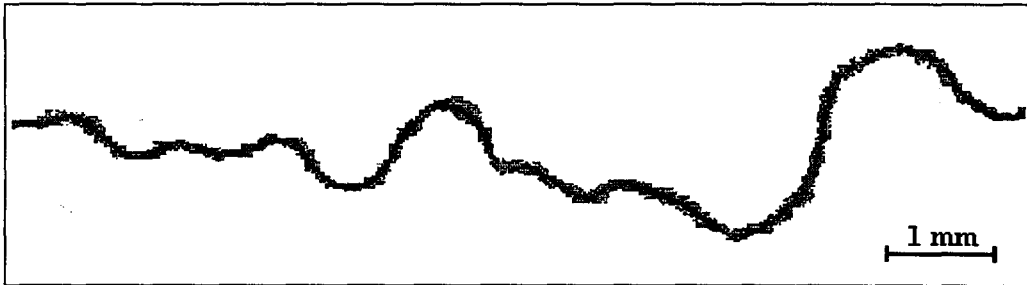


Figure V-1 : Vue longitudinale - microscope optique objectif $\times 0,65$

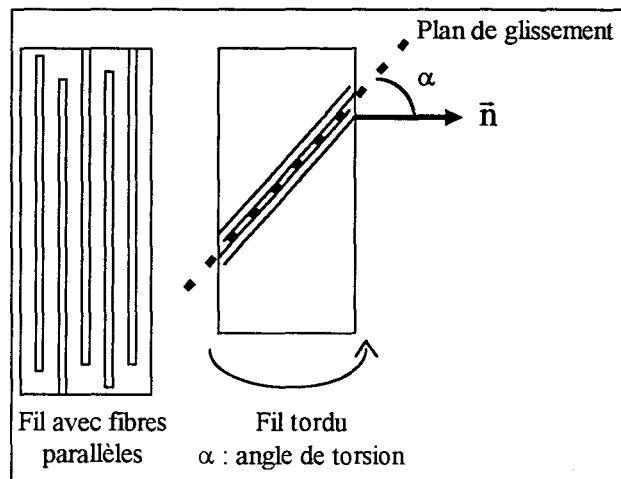


Figure V-2 : Influence de la torsion sur la force de frottement

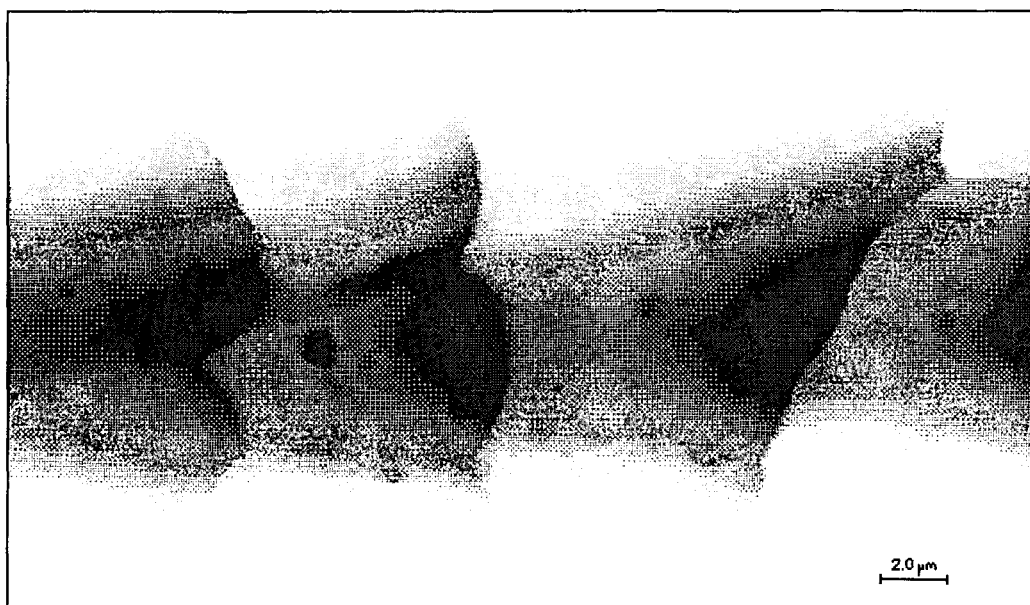


Figure V-3 : Vue longitudinale - microscope optique objectif $\times 40$

V.2. Technique expérimentale

V.2.1. Etude de la topographie

De très nombreuses études sur l'analyse des surfaces ont été menées au cours de ces dernières années. En particulier dans le domaine des images à l'échelle micrométriques. L'analyse fine de l'état des surfaces a été rendue possible par le développement de nouvelles techniques d'imagerie.

Le Microscope à Force Atomique (désigné par A.F.M. pour Atomic Force Microscopy) a été développé récemment par BINNIG & co en 1986 [BIN-86] à partir du microscope à effet tunnel (Scanning Tunneling Microscopy). Dans ces deux techniques, la démarche est similaire. Une pointe, métallique dans le cas du STM, est approchée de la surface de l'échantillon à étudier. Une fois l'interaction établie (courant tunnel pour le STM et force interatomique pour l'A.F.M.), la pointe balaie la surface. L'A.F.M. autorise l'observation de la morphologie de surface des matériaux isolants à l'échelle du micromètre comme à l'échelle atomique alors que le STM requiert des échantillons conducteurs ou enduits d'une pellicule conductrice.

L'A.F.M. propose deux modules afin de caractériser l'état de surface d'un échantillon. Le premier module permet d'apprécier la *rugosité* de la surface délimitée par le rectangle de dimension $L_x \times L_y$ par le calcul suivant :

$$rugosité = \frac{1}{L_x \cdot L_y} \iint_{L_x L_y} |f(x, y)| \cdot dx \cdot dy \quad (\text{éq. V-1})$$

L_x et L_y représentant la taille suivant les deux axes de l'image,

$f(x, y)$ la distance entre le plan moyen de l'image et l'altitude z du point (x, y) .

Le second module permet d'estimer la dimension fractale par la méthode de dénombrement des boîtes. Ces deux modules sont fréquemment utilisés pour suivre l'évolution de l'état de surface dans le cas de l'oxydation d'un échantillon de silicone poreux par de l'acide nitrique [YOU-96] au cours du temps. D'autres encore s'intéressent à l'étude de la précision de différents algorithmes existants pour l'estimation de la dimension fractale [ALM-96] d'images.

V.2.2. Principe de l'A.F.M. [POR-91][PAS-94]

Lorsque un microlevier est approché au voisinage d'une surface, une force d'interactions va le faire se courber. La déflexion est proportionnelle à la force d'interaction de Van der Waals. Il s'agit de conserver cette déflexion à une valeur constante et de faire se déplacer la surface de l'échantillon sous le microlevier pour réaliser des images A.F.M. à force constante. La condition de force constante est réalisée par un système d'asservissement qui mesure la déflexion du microlevier et la maintient à la valeur prééglée en montant ou descendant la surface en regard quand celle-ci présente respectivement un creux ou une bosse.

Afin de détecter la déflexion du microlevier, on utilise la détection optique. Cette méthode consiste, avec un miroir, à diriger un rayon laser en direction du dos de la pointe où il se réfléchit pour aller frapper un détecteur à deux photodiodes A et B (Figure V-4). Dès que la pointe rencontre une variation suivant l'axe \bar{z} , le faisceau laser n'est plus réfléchi entre les deux photodiodes. Un système d'asservissement qui commande un micro-moteur permet de monter ou descendre le porte échantillon (piézo-électrique) afin que le rayon se réfléchisse à nouveau entre A et B. La différence entre les courants I_A et I_B est à l'origine du signal d'erreur pour l'asservissement. Ce sont ces mouvements ascendant et descendant qui permettent de reconstituer l'image topographique de l'échantillon. Le déplacement suivant les deux axes \bar{x} et \bar{y} est assuré par le piézo-électrique.

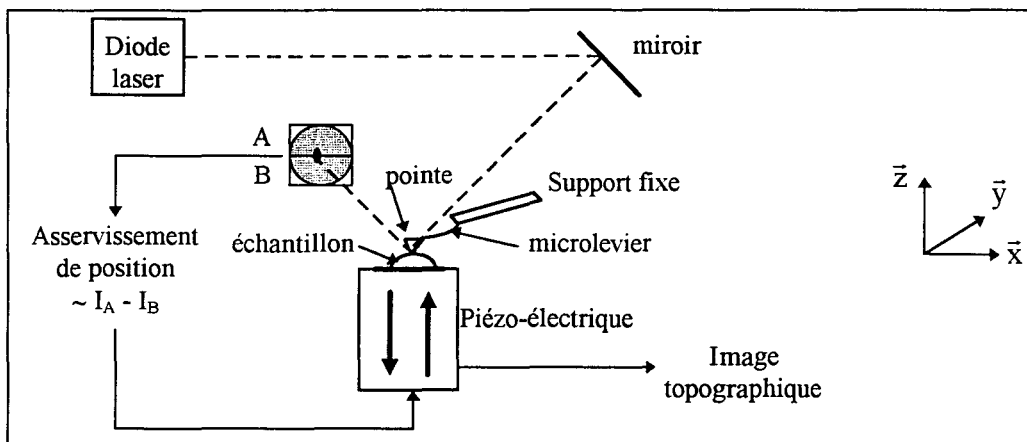


Figure V-4 : Contrôle de déflexion du microlevier par la méthode du levier optique

V.3. Estimation de la dimension fractale de la fibre de laine

V.3.1. Mode opératoire

Pour obtenir des images de fibres de laine de l'ordre du micromètre, nous nous sommes servis dans les conditions atmosphériques d'un Nanoscope III de chez Digital Instrument®. Les analyses sont réalisées en mode contact avec une tête permettant d'effectuer des images $130 \times 130 \mu\text{m}^2$. Le déplacement maximal du piézo-électrique est de $5,19 \mu\text{m}$. La force appliquée varie de 1 à $5 \cdot 10^{-8} \text{ N}$. La pointe en Si_3N_4 utilisée possède une constante de raideur de $0,06 \text{ N.m}^{-1}$.

La fibre de laine étudiée est placée sur le piézo-électrique. Elle y est fixée par l'intermédiaire d'un ruban adhésif "double face". Avant d'engager la pointe, on laisse la fibre suffisamment longtemps dans le microscope afin qu'elle se relaxe et recouvre le conditionnement du laboratoire. Une fois l'image topographique enregistrée, nous pouvons effectuer les différents traitements.

Pour les images obtenues par microscopie optique en lumière transmise, le liquide d'immersion utilisé est l'huile de cèdre. Ce liquide, sans affinité chimique avec la laine, a la propriété de ne pas modifier sa morphologie par gonflement. L'image du microscope optique est numérisée avec une caméra à matrice carrée de 512×512 éléments image (PIXEL : PICTURE ELEMENT) en 2^8 niveaux de gris.

V.3.2. Résultats

V.3.2.1. Extraction des données

Au regard de l'échelle à laquelle est observée la fibre (au maximum $30 \times 30 \mu\text{m}^2$), on peut considérer dans une première approximation que l'image présente un rayon de courbure infini (fibre perpendiculaire à l'axe \vec{y}). Seule l'étude suivant le sens de la longueur de la fibre (axe \vec{x}), au regard de la croissance du poil et des écailles, présente un intérêt. L'estimation de la dimension fractale se réduit par conséquent au cas monodimensionnel, c'est à dire à une dimension comprise dans l'intervalle $[1, 2]$. De l'image bidimensionnelle (Figure V-6) obtenue par l'A.F.M., on extrait pour une valeur constante sur l'axe \vec{y} , la courbe donnant la valeur de l'amplitude suivant l'axe \vec{z} en fonction de \vec{x} . L'amplitude sur l'image est donnée par l'échelle du niveau de couleur (2^8 couleurs).

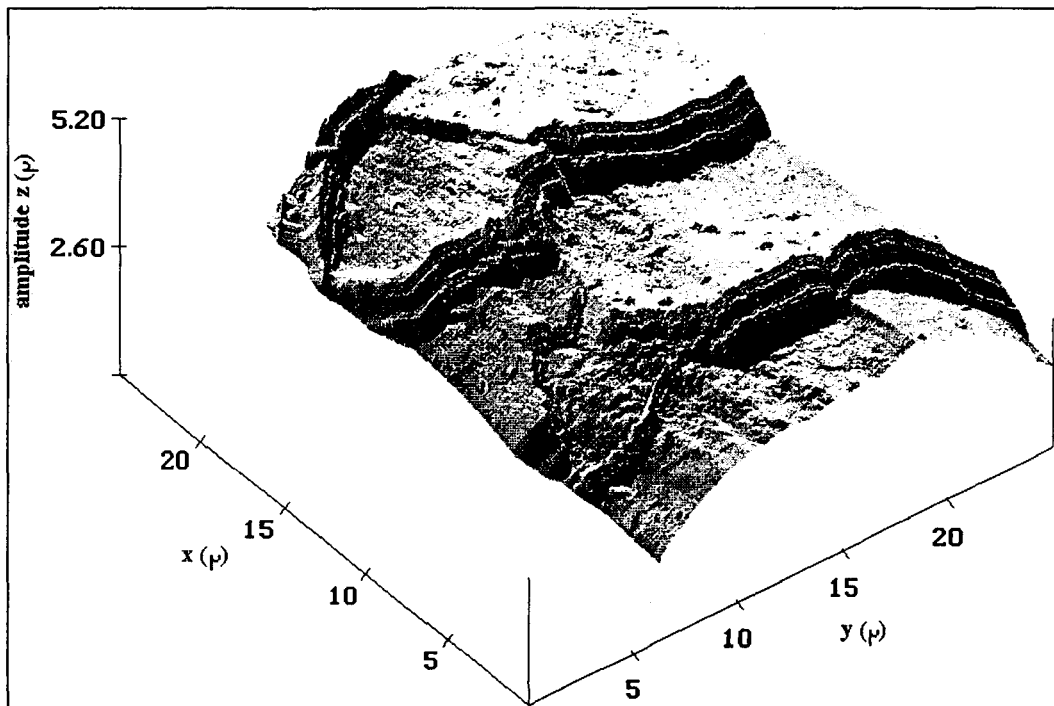


Figure V-5 : Représentation d'une fibre de laine en trois dimensions (2^8 couleurs)

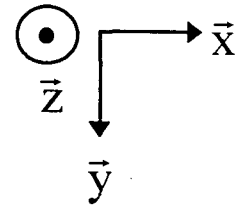
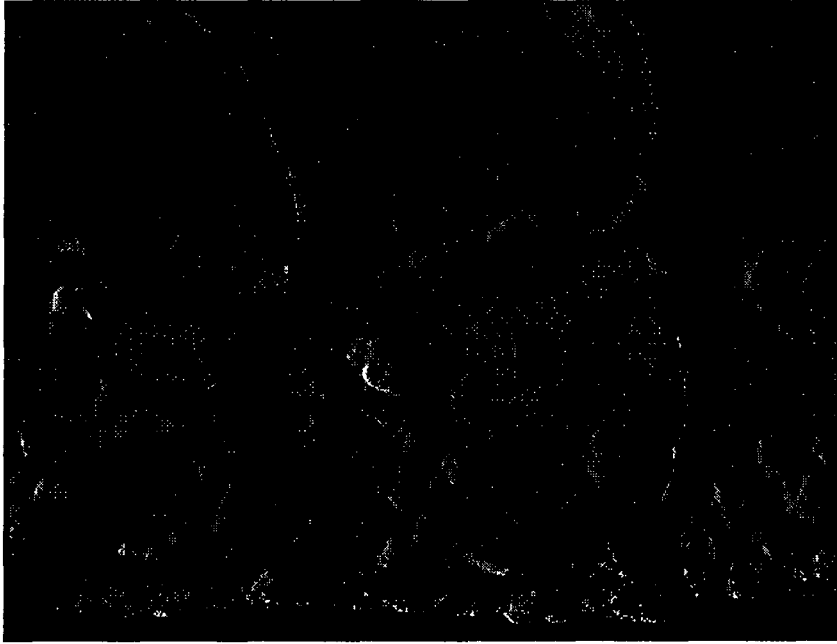


Figure V-6 : Vue longitudinale A.F.M.

$$15 \times 15 \mu\text{m}^2 - (x, y) \in \{0, \dots, 511\}^2$$

L'image restituée par l'A.F.M. est discrétisée en 512×512 pixel. La Figure V-6 montre une projection sur le plan $(\bar{x} - \bar{y})$ de la Figure V-5 (fausses couleurs). L'origine des axes \bar{x} et \bar{y} est prise au coin supérieur gauche de l'image. Pour une valeur de y fixée, nous obtenons le profil de la Figure V-7 pour l'image issue de l'A.F.M et le profil de la Figure V-8 pour l'image issue du microscope optique.

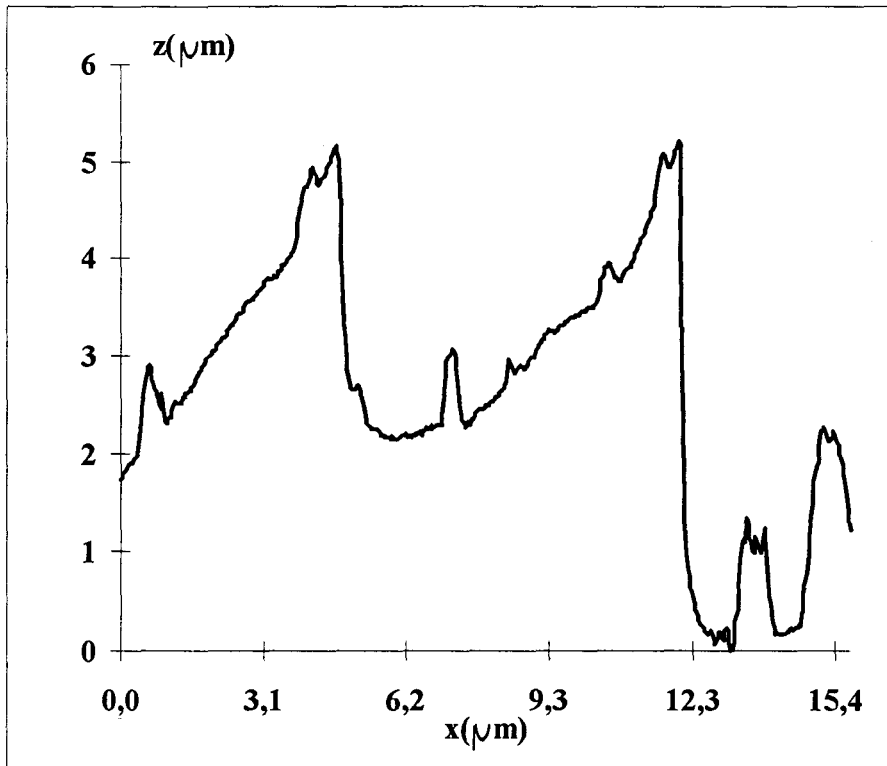


Figure V-7 : Profil de l'amplitude z de la Figure V-6 pour $y = 200$

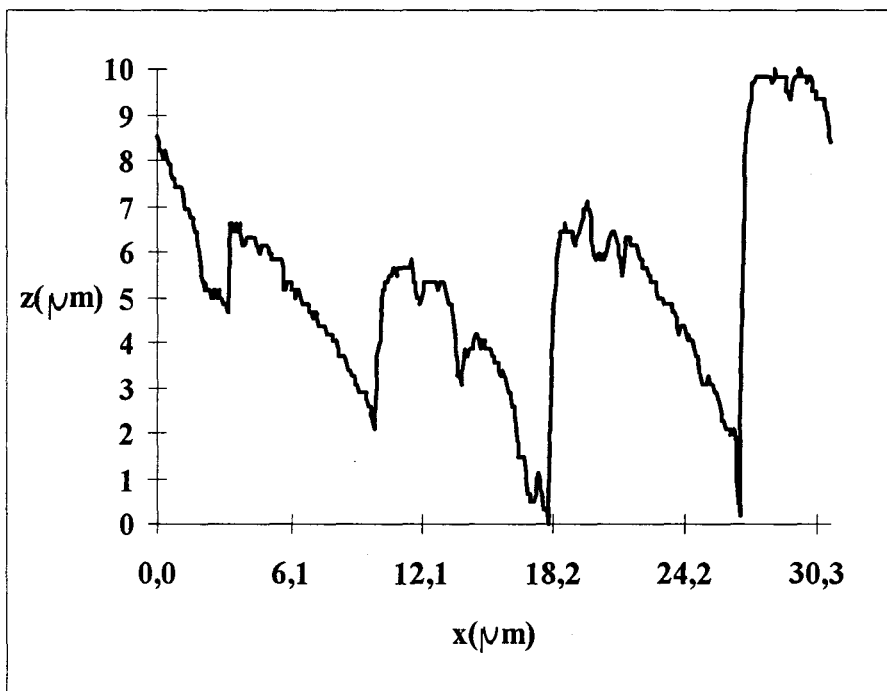


Figure V-8 : Profil de l'amplitude z de la Figure V-3 pour $y = 100$

L'équation (éq. V-1) du calcul de la *rugosité* doit être modifiée pour appréhender cette mesure non plus sur une surface (image) mais suivant un l'axe \bar{x} . La nouvelle définition de la *rugosité* devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rugosité} = \frac{1}{Lx} \int_{Lx} |f(x,y)| \cdot dx \\ \text{avec } y \text{ constant} \end{array} \right. \quad (\text{éq. V-2})$$

En mono-dimensionnel, le plan moyen de l'équation (éq. V-2) devient la droite moyenne de pente p et d'ordonnée à l'origine o

$$z = p x + o$$

obtenue par régression linéaire entre l'amplitude z_i et l'abscisse x_i de l'image pour une valeur de y fixée avec $i \in \{0, 1, \dots, 511\}$. Les coefficients p et o sont obtenus en minimisant l'erreur ε^2 (éq. V-3) :

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=0}^{511} (z_i - (p \cdot x_i + o))^2 \quad (\text{éq. V-3})$$

$$(p, o) / \left(\frac{\delta \varepsilon}{\delta p} \right)_y = 0 \text{ et } \left(\frac{\delta \varepsilon}{\delta o} \right)_y = 0$$

$$p = \frac{511 \cdot \sum_{i=0}^{511} x_i z_i - \sum_{i=0}^{511} x_i \cdot \sum_{i=0}^{511} z_i}{511 \cdot \sum_{i=0}^{511} x_i^2 - \sum_{i=0}^{511} x_i \cdot \sum_{i=0}^{511} x_i}$$

$$o = \frac{\sum_{i=0}^{511} z_i - p \cdot \sum_{i=0}^{511} x_i}{511}$$

Le Tableau V-1 correspond aux mesures opérées sur le profil des courbes obtenues à partir des images. Les résultats sont présentés pour deux grossissement (Figure V-3 et Figure V-6) différents. L'estimation de la dimension fractale est présentée d'une part avec la méthode de dénombrement des boîtes (D_{est}), d'autre part avec notre méthode d'estimation (De_2).

Profil obtenu pour	De ₁	DENS	RD	SW	Q	R
obj. ×40	1,105	0,397	0,275	100	512	10
A.F.M.	1,135	0,453	0,702	10	512	5,19

Tableau V-1 : Valeurs des composantes en entrée pour la fibre de laine

Profil obtenu pour	D _{est}	De ₂	<i>rugosité</i>
obj. ×40	1,06	1,15	1,84
A.F.M.	1,06	1,14	1,25

Tableau V-2 : Comparaison entre dimensions fractales estimées et *rugosité* de la laine

V.3.3. Analyse des résultats

Pour une même fibre de laine observée à deux échelles de résolution différentes, la valeur de la dimension fractale reste pratiquement identique, alors que la *rugosité* tend à diminuer. L'étude de la dimension fractale de la fibre apparaît nettement comme un paramètre pertinent pour caractériser l'irrégularité de la fibre. La méthode de dénombrement des boîtes retourne une valeur très proche de la dimension d'un profil parfaitement régulier ($D_{est} = 1,06$). La méthode proposée apporte une estimation plus élevée de la dimension fractale ($De_2 = 1,15$) qui, de toute évidence, concorde mieux avec les profils observés (Figure V-7 et Figure V-8).

Au regard des méthodes existantes, la méthode proposée nous permet une estimation de la dimension fractale plus proche de nos observations des objets naturels. Même si la dimension fractale n'est pas l'unique paramètre à considérer, son étude peut contribuer à la caractérisation non seulement des fibres de laine, mais encore de matériaux textiles et, dans une plus large mesure, s'étendre à la classification des matériaux [BOUL-95] par l'analyse des textures à caractère fractal.

CONCLUSION GENERALE

L'objectif de notre étude était de développer une nouvelle méthode capable d'estimer avec une grande précision la dimension fractale de courbes. Basé sur la méthode de dénombrement des boîtes, l'estimateur proposé nous a permis d'accroître la précision du calcul sur tout le domaine de variation de la dimension qui s'étend de un à deux.

Afin d'approcher au mieux la dimension fractale, des variables fortement liées à son évolution et sans relation simple avec elle ont été introduites. Si bien que l'estimation de la dimension fractale a été muée en un problème d'approximation de fonctions complexes, problème résolu par l'utilisation de techniques floues. La mise en place de relations entre les variables d'entrée et la dimension fractale, par l'intermédiaire d'implications floues, autorise non seulement une interprétation aisée, susceptible de corroborer nos connaissances a priori sur les courbes fractales, mais aussi un calcul rapide. Cependant, la complexité du problème de l'approximation de ces fonctions croît exponentiellement en fonction du nombre des entrées et c'est la raison pour laquelle la mise en œuvre d'une structure simplifiée s'est imposée. La décomposition du modèle initial devait suivre un algorithme facile à mettre en œuvre et avait pour objectif de conserver une précision du même ordre, tout en diminuant très sensiblement le nombre de relations afin de continuer à garantir la lisibilité et la rapidité du calcul.

Les modèles décomposés simples et quasi-optimaux, nous accordent la possibilité d'introduire de nouvelles entrées caractéristiques des courbes fractales et de nouveaux échantillons dans la base d'apprentissage afin d'accroître encore la précision sans pour autant augmenter la complexité de l'algorithme.

Les perspectives apparentées à cette étude sont de deux ordres. Le premier est d'extrapoler l'estimation de la dimension fractale à une dimension supérieure (dans \mathfrak{R}^3) afin de nous permettre de caractériser des surfaces complexes et de concourir aux nombreuses applications requises dans le domaine de l'analyse d'image comme la segmentation, la compression de données ou encore la caractérisation des textures. Ceci peut être réalisé en adaptant les variables déjà définies dans le

plan, comme la densité ou bien le degré de rugosité, dans l'espace à trois dimensions. Le second point se rattache directement à la décomposition du modèle initial. Il s'agit de définir le nombre d'entrées requises au niveau de chaque Contrôleur en Logique Floue afin d'approcher les calculs avec une précision choisie au départ. La précision maximale est atteinte pour le modèle initial qui prend en compte toutes les interconnexions entre les entrées. La perte de précision est directement reliée au nombre d'entrées introduites dans les modèles décomposés au regard des interconnexions qui disparaissent. Un compromis entre la complexité de la structure décomposée et la perte en précision doit être défini.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [ABE-95] S. ABE et M-S. LAN, *Fuzzy Rules Extraction Directly from Numerical Data for Function Approximation*
IEEE Trans. On Syst., Man, and Cybernetics, Vol. 25 No 1, p. 119-129 - (1995)
- [ALM-96] N. ALMQVIST, *Fractal Analysis of Probe Microscopy Images*
Surface Science 355, p. 221-228 - (1996)
- [ANG-93] E. ANGUIANO, M. PANCORBO, F. VAZQUEZ and M. AGUILAR, *Fractal Characterization by Frequency Analysis : I. Surfaces*
J. Microscopy 172, p. 223-232 - (1993)
- [BAR-88] M.T. BARNSLEY, *Fractals Everywhere*
Academic Press, New-York - (1988)
- [BAS-94] J.B. BASSINGTHWAIGHTE and G.M. RAYMOND, *Evaluating Rescaled Range Analysis for Time Series*
Annals of Biomedical Engineering, Vol. 22, p. 432-444 - (1994)
- [BER-80] M.V. BERRY and Z.V. LEWIS
Proc. R. Soc. London, Serv. A 370, p. 459-462 - (1980)
- [BIN-86] G. BINNIG, C. F. QUATE and Ch. GERBER, *Scanning Tunneling Microscopy*
Phys. Rev. Lett. , 56, p. 930-945 - (1986)
- [BIG-96] M. BIGERELLE et A. IOST, *Calcul de la dimension fractale d'un profil par la méthode des autocorrélations moyennées normées (AMN)*
C. R. Acad. Sci. Paris, tome 323, Série IIb, p. 669-675 - (1996)
- [BLA-93] S. BLACHER, F. BROUERS et R. VAN DYCK, *On the use of fractal concepts in image analysis*
Physica A 197, North-Holland, p. 516-527 - (1993)
- [BOUL-95] H. BOULECANE, *Topographie d'Images en Niveaux de Gris - Contribution au contrôle qualité de matériaux composites*
Thèse soutenue à l'I.N.S.A-LYON en mars 1996
- [BOU-95] B. BOUCHON-MEUNIER, *La logique floue et ses applications*
Addison-Wesley France - (1995)

- [CAS-95] J.L. CASTRO, *Fuzzy Logic Controllers Are Universal Approximators*
 IEEE Trans. On Syst., Man, and Cybernetics, Vol. 25 No 4, p. 629-634 - (1995)
- [CAR-96] B. CARSE, T.C. FOGARTY et A. MUNRO, *Evolving fuzzy rule based controllers using genetic algorithms*
 Fuzzy Sets and Systems 80, p. 273-293 - (1996)
- [CHA-95] B.B. CHAUDHURI et N. SARKAR, *Texture Segmentation Using Fractal Dimension*
 IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. Vol. 17, N° 1, p. 72-77 - (1995)
- [CHE-91] G. CHERBIT, *Fractals : dimensions non entières et applications*
 MASSON, second tirage - (1991)
- [DUB-80] D. DUBOIS et H. PRADE, *Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications*
 ACADEMIC PRESS, INC. - (1980)
- [DUB-89a] B. DUBUC, J. F. QUINIOU, C. ROQUES-CARMES, C. TRICOT and S. W. ZUCKER, *Evaluating the Fractal Dimension of Profiles*
 Physical Review A, Vol. 39, Nb 3 p. 1500-1512 - (Fevrier 1989)
- [DUB-89b] B. DUBUC, *On TAKAGI Fractal Surfaces*
 Canad. Math. Bull., Vol. 32 (3), p. 377-384 - (1989)
- [FAL-90] K.J. FALCONER, *Fractal geometry : Mathematical foundations and applications*
 John Wiley, New York - (1990)
- [FUK-95] T. FUKUDA, Y. HASEGAWA et K. SHIMOJIMA, *Structure Organisation of Hierarchical Fuzzy Model using by Genetic Algorithm*
 Proceedings of the Conference IEEE/IFES'95-YOKOHAMA, p. 295-300 - (1995)
- [GAL-94] J.C. GALLANT, I.D. MOORE, M.F. HUTCHINSON et P. GESSLER, *Estimating Fractal Dimension of Profiles : A Comparison of Methods*
 Mathematical Geology, Vol. 26, N° 4, p. 455-479 - (1994)
- [GOU-92] J-F. GOUYET, *Physique et Structures Fractales*
 MASSON, 1992
- [HAU-19] F. HAUSDORFF, *Dimension und äusseres Mass*
 Mathematische Annalen, 79, p. 157-179 - (1919)
- [HUA-94] Q. HUANG, J.R. LORCH and R.C. DUBES, *Can the Fractal Dimension of Images be measured?*

- Pattern Recognition, Vol. 27, nb 3, p. 339-349 - (1994)
- [HUR-92] H.E. HURST, *Long Term storage capacity of reservoirs*
Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs, Vol. 116, p. 65-71 - (1992)
- [IND-90] D. INDJIC, *Fuzzy Interpretation of the Mandelbrot Set Drawing*
Fuzzy Sets and Systems, N° 37, p. 117-122 - (1990)
- [KAN-93] S. KANMANI, C. BABU and B. RAJ, *On the computation of the Minkowski dimension using morphological operations*
Journal of Microscopy, Vol. 170, p. 81-85 - (avril 1993)
- [KEL-87] J.M. KELLER, R.M. CROWNOVER et R.Y. CHEN, *Characteristics of Natural Scenes Related to the Fractal Dimension*
IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. Vol. PAMI-9, N° 5, p. 621-627 - (1987)
- [KUB-88] P. KUBE et A. PENTLAND, *On the Imaging of Fractal Surfaces*
IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. Vol. 10, N° 5, p. 704-707 - (1988)
- [KUM-94] T. KUMAR, P. ZHOU et D.A. GLASER, *Comparison of human performance with algorithms for estimating fractal dimension of fractional brownian statistics*
J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 10, N° 6, p. 1136-1146 - (1994)
- [LEV-89] J. LEVY-VEHEL, *Using Fractal and Morphological Criteria for Automatic Classification of Lung Diseases*
Vis. Com. Imag. Proc. IV SPIE, Vol. 1199, p. 903-912 - (1989)
- [LIE-89] L.S. LIEBOVITCH et TOTH, *A fast algorithm to determine fractal dimensions by box counting*
Phys. Lett. A 141, p. 386-390 - (1989)
- [LIN-96] D.A. LINKENS, J.S. SHIEH et J.E. PEACOCK, *Hierarchical fuzzy modelling for monitoring depth of anaesthesia*
Fuzzy Sets and Systems 79, p. 43-57 - (1996)
- [MAM-75] E.H. MAMDAMI et S. ASSILIAN, *An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller*
International Journal of Man-Machine Studies, N°7, p. 1-13 - (1975)
- [MAN-68] B.B. MANDELBROT et J. VAN NESS, *Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications*

- SIAM Rev. - Vol. 10, n° 4 - (1968)
- [MAN-69a] B.B. MANDELBROT and J.R. WALLIS, *Computer experiments with fractional Gaussian noises. Part 1, averages and variances.*
Water Resour. Res. 5, p. 228-241 - (1969)
- [MAN-69b] B.B. MANDELBROT and J.R. WALLIS, *Computer experiments with fractional Gaussian noises. Part 2, rescaled ranges and spectra.*
Water Resour. Res. 5, p. 242-259 - (1969)
- [MAN-69c] B.B. MANDELBROT and J.R. WALLIS, *Computer experiments with fractional Gaussian noises. Part 3, mathematical appendix.*
Water Resour. Res. 5, p. 260-267 - (1969)
- [MAN-77] B.B. MANDELBROT, *Fractals, Form, Chance and Dimension*
San Francisco, CA : W.H. Freeman - (1977)
- [MAN-83] B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature*
San Francisco, CA : W.H. Freeman - (1983)
- [MAN-89] B. MANDELBROT, *Les objets fractals : forme, hasard et dimension*
3^{ème} édition, Flammarion - (1989)
- [MIC-94] Z. MICHALEWICZ, *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*
Springer-Verlag, seconde édition étendue - (1994)
- [MUN-94] T. MUNAKATA et Y. JANI, *Fuzzy Systems : An Overview*
Fuzzy Systems, N° 3, Vol. 37, p. 69-75 - (1994)
- [MUR-95] Y. MURAOKA, K. INOUE, H. TAGAYA and K. NISHIZAWA, *Fiber Crimp Analysis by Fractal Dimension*
Textile Research Journal, p. 454-460 - (août 1995)
- [NAR-74] K.S. NARENDRA et M.A.L. THATHCHAR, *Learning Automata - A Survey*
IEEE Trans. On SMC, N° 14, p. 323-334 - (1974)
- [NAR-89] K.S. NARENDRA et M.A.L. THATHCHAR, *Learning Automata : An Introduction*
Prentice Hall, Englewood Cliffs - (1989)
- [OOM-90] B.J. OOMMEN et J.K. LANCTOT, *Discretized Pursuit Learning Automata*
IEEE Trans. On SMC, Vol. 20, p. 931-938 - (1990)

- [PAN-94] M. PANCORBO, E. ANGUIANO et M. AGUILAR, *Profiles Fractal Characterization by Frequency Analysis*
Fractals, Vol. 2, N° 1, p. 127-136 - (1994)
- [PAR-89] T.S. PARKER et L.O. CHUA, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*
Springer, New-York - (1989)
- [PAS-94] H. PASCAL, *Modification des surfaces par frottement. Apport des techniques de microscopie à force atomique et à balayage électronique*
Thèse à l'Ecole Centrale de Lyon - (1994)
- [PAW-86] Z. PAWLAK, K. SLOWINSKI et R. SLOWINSKI, *Rough Classification of Patients after Highly Selective Vagotomy for Duodenal Ulcer*
International Journal of Man Machine Studies, Vol. 24, p. 413-433 - (1986)
- [PEN-84] A.P. PENTLAND, *Fractal based description of natural scenes*
IEEE Trans. PAMI, N° 6, p. 661-674 - (1984)
- [PEY-94] L. PEYRODIE, A.M. DESODT et D. JOLLY, *Utilisation des sous-ensembles approximatifs pour résoudre les problèmes de décision en téléopération*
Revue d'Automatique et de productique appliquées, Vol. 7, N° 6, p. 729-748 - (1994)
- [POR-91] L. PORTE, *La Microscopie à Force Atomique*
Spectra 2000, 155, p. 30-38 - (1991)
- [SHI-95] K. SHIMOJIMA, T. FUKUDA et Y. HASEGAWA, *Self-tuning modeling with adaptative membership function, and hierarchical structure based on genetic algorithm*
Fuzzy Sets and Systems 71, p. 295-309 - (1995)
- [TAK-85] T. TAKAGI et M. SUGENO, *Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control*
IEEE Trans. On Syst., Man, and Cybernetics, Vol. SMC-15 No 1, p. 116-132 - (1985)
- [TAN-96] M. TANAKA, J. YE et T. TANINO, *Fuzzy modelling by genetic algorithm with tree-structured individuals*
Internat. J. of Systems Science, vol. 27 nb 2, p.261-268 - (1996)
- [TSE-61] M.L. TSETLIN, *On the behaviour of finite automata in random media*
Avtomatika i Telemekhanika 22, p. 1345-1354 - (1961)
- [TON-80] R.M. TONG, *The evaluation of fuzzy models derived from experimental data*

- Fuzzy sets and Systems 4, p. 1-12 - (1980)
- [TRI-86] C. TRICOT, *Dimensions de graphes*
C. R. Hebd. Scéan. Acad. Sci. Paris 303, p. 609-612 - (1986)
- [TRI-88] C. TRICOT, J.F. QUINIOU, D. WEHBI, C. ROQUES-CARMES et B. DUBUC,
Evaluation de la dimension fractale d'un graphe
Revue de Phys. Appl. 23, p. 111-124 - (1988)
- [VAS-94] B. VASSELLE et G. GIRAUDON, *A multiscale regularity measure as a geometric criterion for image segmentation*
Machine Vision and Applications, N° 7, p. 229-236 - (1994)
- [WAN-92a] L-X. WANG et J.M. MENDEL, *Generating Fuzzy Rules by Learning from Examples*
IEEE Trans. On Syst., Man, and Cybernetics, Vol. 22 No 6, p. 1414-1427 - (1992)
- [WAN-92b] L-X WANG et J.M. MENDEL, *Fuzzy Systems are Universal Approximators*
Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems, San Diego, California (U.S.A), p. 1163-1170 - (1992)
- [YOU-96] T.F. YOUNG, I.W. HUANG, Y.L. YANG, W.C. KUO, I.M. JIANG, T.C. CHANG et C.Y. CHANG, *Atomic force microscopy study on the surface structure of oxidized porous silicon*
Applied Surface Science 102, p. 404-407 - (1996)
- [ZAD-65] L.A. ZADEH, *Fuzzy Sets*
Inform.and Control 8, p. 338-353 - (1965)
- [ZAD-75] L.A ZADEH, K.S FU, K. TANAKA et M. SHIMURA, *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes*
Academic Press, New-York, p. 1-39 - (1975)
- [ZAD-94] L.A. ZADEH, *Fuzzy Logic, Neural Networks and Soft Computing*
Fuzzy Systems, N° 3, Vol. 37, p. 77-83 - (1994)
Mathematics and Computers in Simulation 41, p. 139-148 - (1996)

ANNEXE A

Construction des modèles décomposés pour la fonction définie en (éq.IV-1)

◆ Modèle décomposé à deux entrées

Le taux de séparation des classes est défini comme le pourcentage entre la perte d'information PI occasionnée par la partition en sous-méta-classes (Q_1 et Q_2) et la perte totale d'information totale PI si l'une des deux sous-méta-classes était incluse dans l'autre ($Q_1 \subset Q_2$ ou $Q_2 \subset Q_1$).

Entrées	CLASSES								Taux de séparation (%) des classes
	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	
									88,89
x ₁	0	0	1	1	1	1	0	1	
		C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₇			66,67
x ₂	1	0	0	1	1				
		C ₀	C ₁	C ₆					66,67
x ₃	0	1	1						
		C ₃	C ₄						44,44
x ₂	0	1							
		C ₁	C ₆						33,33
x ₃	0	1							
		C ₂	C ₅	C ₇					22,22
x ₂	1	0	0						
		C ₅	C ₇						2·10 ⁻³
x ₁	0	1							

choix des entrées du modèle flou décomposé à deux entrées

indice k	Méta-classes MC _k	Sous-Méta-classes Q ₁ et Q ₂
1	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₂ , C ₃ , C ₄ , C ₅ , C ₆ , C ₇ }	Q ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₆ } Q ₂ ={C ₂ , C ₃ , C ₄ , C ₅ , C ₇ }
2	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₆ } MC ₂ ={C ₂ , C ₃ , C ₄ , C ₅ , C ₇ }	Q ₁ ={C ₂ , C ₅ , C ₇ } Q ₂ ={C ₃ , C ₄ }
3	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₆ } MC ₂ ={C ₂ , C ₅ , C ₇ } MC ₃ ={C ₃ , C ₄ }	Q ₁ ={C ₀ } Q ₂ ={C ₁ , C ₆ }
4	MC ₁ ={C ₀ } MC ₂ ={C ₂ , C ₅ , C ₇ } MC ₃ ={C ₃ , C ₄ } MC ₄ ={C ₁ , C ₆ }	Q ₁ ={C ₃ } Q ₂ ={C ₄ }
5	MC ₁ ={C ₀ } MC ₂ ={C ₂ , C ₅ , C ₇ } MC ₃ ={C ₃ } MC ₄ ={C ₁ , C ₆ } MC ₅ ={C ₄ }	Q ₁ ={C ₁ } Q ₂ ={C ₆ }
6	MC ₁ ={C ₀ } MC ₂ ={C ₂ , C ₅ , C ₇ } MC ₃ ={C ₃ } MC ₄ ={C ₁ } MC ₅ ={C ₄ } MC ₆ ={C ₆ }	Q ₁ ={C ₂ } Q ₂ ={C ₅ , C ₇ }
7	MC ₁ ={C ₀ } MC ₂ ={C ₂ } MC ₃ ={C ₃ } MC ₄ ={C ₁ } MC ₅ ={C ₄ } MC ₆ ={C ₆ } MC ₇ ={C ₅ , C ₇ }	Q ₁ ={C ₅ } Q ₂ ={C ₇ }

◆ Modèle décomposé à trois entrées

Entrées	CLASSES								Taux de séparation (%) des classes
	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	
									79,01
x ₁ et x ₂	1	1	0	1	1	1	0	1	
	C ₀	C ₁	C ₃	C ₄	C ₅	C ₇			66,67
x ₂ et x ₃	0	0	1	0	0	0			
	C ₀	C ₁	C ₄	C ₅	C ₇				44,44
x ₁ et x ₃	0	0	1	1	0				
	C ₀	C ₁	C ₇						66,67
x ₁ et x ₃	0	1	0						
	C ₄	C ₅							22,22
x ₁ et x ₃	0	1							
	C ₂	C ₆							3,70
x ₁ et x ₃	1	0							
	C ₀	C ₇							2·10 ⁻³
x ₁ et x ₂	0	1							

choix des entrées du modèle flou décomposé à trois entrées

indice k	Méta-classes MC _k	Sous-Méta-classes Q ₁ et Q ₂
1	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₂ , C ₃ , C ₄ , C ₅ , C ₆ , C ₇ }	Q ₁ ={C ₂ , C ₆ } Q ₂ ={C ₀ , C ₁ , C ₃ , C ₄ , C ₅ , C ₇ }
2	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₃ , C ₄ , C ₅ , C ₇ } MC ₂ ={C ₂ , C ₆ }	Q ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₄ , C ₅ , C ₇ } Q ₂ ={C ₃ }
3	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₄ , C ₅ , C ₇ } MC ₂ ={C ₂ , C ₆ } MC ₃ ={C ₃ }	Q ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₇ } Q ₂ ={C ₄ , C ₅ }
4	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₇ } MC ₂ ={C ₂ , C ₆ } MC ₃ ={C ₃ } MC ₄ ={C ₄ , C ₅ }	Q ₁ ={C ₁ } Q ₂ ={C ₀ , C ₇ }
5	MC ₁ ={C ₁ } MC ₂ ={C ₂ , C ₆ } MC ₃ ={C ₃ } MC ₄ ={C ₄ , C ₅ } MC ₅ ={C ₀ , C ₇ }	Q ₁ ={C ₄ } Q ₂ ={C ₅ }
6	MC ₁ ={C ₁ } MC ₂ ={C ₂ , C ₆ } MC ₃ ={C ₃ } MC ₄ ={C ₄ } MC ₅ ={C ₀ , C ₇ } MC ₆ ={C ₅ }	Q ₁ ={C ₂ } Q ₂ ={C ₆ }
7	MC ₁ ={C ₁ } MC ₂ ={C ₂ } MC ₃ ={C ₃ } MC ₄ ={C ₄ } MC ₅ ={C ₀ , C ₇ } MC ₆ ={C ₅ } MC ₇ ={C ₆ }	Q ₁ ={C ₀ } Q ₂ ={C ₇ }

◆ Comparaison modèle simple/modèles décomposés

C.L.F	Modèle décomposé à deux entrées		Modèle décomposé à trois entrées	
	Nombre de niveaux d'intersections (l)	Nombre de règles	Nombre de niveaux d'intersections (l)	Nombre de règles
1	6	75	6	150
2	5	48	6	147
3	18	48	18	125
4	4	8	22	60
5	3	6	11	34
6	3	6	3	10
7	1	2	1	3
	TOTAL	193		529

Pour le modèle simple :

- nombre de niveaux d'intersections : $l = 6$,
- nombre total de règles : 657,
- temps d'exécution du programme d'extraction des règles : négligeable (en seconde) pour 1000 vecteurs dans la base d'apprentissage Ω .

n.b : le temps d'exécution des programmes est donné à titre indicatif. Les programmes sont écrits en C++ avec un ordinateur muni d'un processeur Pentium cadencé à 166 MHz avec 32 Moctets de mémoire vive (R.A.M).

ANNEXE B

Construction des modèles décomposés pour la fonction de WEIERSTRASS-MANDELBROT (WM)

◆ Modèle décomposé à deux entrées

Le taux de séparation des classes est défini comme le pourcentage entre la perte d'information PI occasionnée par la partition en sous-méta-classes (Q_1 et Q_2) et la perte totale d'information totale PI si l'une des deux sous-méta-classes était incluse dans l'autre ($Q_1 \subset Q_2$ ou $Q_2 \subset Q_1$).

Entrées	CLASSES								Taux de séparation (%) des classes
	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	
									95,23
R	0	0	1	0	0	0	0	1	
	C ₀	C ₁	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆			74,75
De ₁	0	0	1	1	1	0			
	C ₃	C ₄	C ₅						66,67
Q	0	0	1						
	C ₀	C ₁	C ₆						50,05
DENS	0	1	0						
	C ₃	C ₄							33,33
Q	1	0							
	C ₀	C ₆							2,06
RD	1	0							
	C ₂	C ₇							0,59
RD	0	1							

choix des entrées du modèle flou décomposé à deux entrées

indice k	Méta-classes MC _k	Sous-Méta-classes Q ₁ et Q ₂
1	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₂ , C ₃ , C ₄ , C ₅ , C ₆ , C ₇ }	Q ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₃ , C ₄ , C ₅ , C ₆ } Q ₂ ={C ₂ , C ₇ }
2	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₃ , C ₄ , C ₅ , C ₆ } MC ₂ ={C ₂ , C ₇ }	Q ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₆ } Q ₂ ={C ₃ , C ₄ , C ₅ }
3	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₆ } MC ₂ ={C ₂ , C ₇ } MC ₃ ={C ₃ , C ₄ , C ₅ }	Q ₂ ={C ₃ , C ₄ } Q ₁ ={C ₅ }
4	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₆ } MC ₂ ={C ₂ , C ₇ } MC ₃ ={C ₃ , C ₄ } MC ₄ ={C ₅ }	Q ₁ ={C ₀ , C ₆ } Q ₂ ={C ₁ }
5	MC ₁ ={C ₀ , C ₆ } MC ₂ ={C ₂ , C ₇ } MC ₃ ={C ₃ , C ₄ } MC ₄ ={C ₅ } MC ₅ ={C ₁ }	Q ₁ ={C ₃ } Q ₂ ={C ₄ }
6	MC ₁ ={C ₀ , C ₆ } MC ₂ ={C ₂ , C ₇ } MC ₃ ={C ₃ } MC ₄ ={C ₅ } MC ₅ ={C ₁ } MC ₆ ={C ₄ }	Q ₁ ={C ₀ } Q ₂ ={C ₆ }
7	MC ₁ ={C ₀ } MC ₂ ={C ₂ , C ₇ } MC ₃ ={C ₃ } MC ₄ ={C ₅ } MC ₅ ={C ₁ } MC ₆ ={C ₄ } MC ₇ ={C ₆ }	Q ₁ ={C ₂ } Q ₂ ={C ₇ }

◆ Modèle décomposé à trois entrées

Entrées	CLASSES								Taux de séparation (%) des classes
	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	
									95,43
De ₁ et R	1	1	0	0	0	1	0	1	
	C ₀	C ₁	C ₅	C ₇					84,32
DENS et Q	0	0	1	1					
	C ₂	C ₃	C ₄	C ₆					83,33
SW et Q	1	0	0	0					
	C ₃	C ₄	C ₆						33,33
SW et Q	0	1	0						
	C ₃	C ₆							13,82
De ₁ et SW	0	1							
	C ₅	C ₇							0,59
RD et SW	1	0							
	C ₀	C ₁							1·10 ⁻²
Q et R	0	1							

choix des entrées du modèle flou décomposé à trois entrées

indice k	Méta-classes MC _k	Sous-Méta-classes Q ₁ et Q ₂
1	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₂ , C ₃ , C ₄ , C ₅ , C ₆ , C ₇ }	Q ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₅ , C ₇ } Q ₂ ={C ₂ , C ₃ , C ₄ , C ₆ }
2	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ , C ₅ , C ₇ } MC ₂ ={C ₂ , C ₃ , C ₄ , C ₆ }	Q ₁ ={C ₀ , C ₁ } Q ₂ ={C ₅ , C ₇ }
3	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ } MC ₂ ={C ₂ , C ₃ , C ₄ , C ₆ } MC ₃ ={C ₅ , C ₇ }	Q ₁ ={C ₂ } Q ₂ ={C ₃ , C ₄ , C ₆ }
4	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ } MC ₂ ={C ₂ } MC ₃ ={C ₅ , C ₇ } MC ₄ ={C ₃ , C ₄ , C ₆ }	Q ₁ ={C ₄ } Q ₂ ={C ₃ , C ₆ }
5	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ } MC ₂ ={C ₂ } MC ₃ ={C ₅ , C ₇ } MC ₄ ={C ₃ , C ₆ } MC ₅ ={C ₄ }	Q ₁ ={C ₃ } Q ₂ ={C ₆ }
6	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ } MC ₂ ={C ₂ } MC ₃ ={C ₅ , C ₇ } MC ₄ ={C ₃ } MC ₅ ={C ₄ } MC ₆ ={C ₆ }	Q ₁ ={C ₅ } Q ₂ ={C ₇ }
7	MC ₁ ={C ₀ , C ₁ } MC ₂ ={C ₂ } MC ₃ ={C ₅ } MC ₄ ={C ₃ } MC ₅ ={C ₄ } MC ₆ ={C ₆ } MC ₇ ={C ₇ }	Q ₁ ={C ₀ } Q ₂ ={C ₁ }

◆ Comparaison modèle simple/modèles décomposés

C.L.F	Modèle décomposé à deux entrées		Modèle décomposé à trois entrées	
	Nombre de niveaux d'intersections (l)	Nombre de règles	Nombre de niveaux d'intersections (l)	Nombre de règles
1	9	57	9	73
2	8	55	9	17
3	4	11	6	52
4	6	24	6	27
5	3	4	6	10
6	1	1	1	1
7	1	1	1	3
	TOTAL	153		183

Pour le modèle simple :

- nombre de niveaux d'intersections : $l = 206$,
- nombre total de règles : 1843,
- le temps d'exécution du calcul des degrés d'appartenance est de 5 secondes pour le modèle simple (6 entrées) et respectivement de 23,7 et 69,4 milliseconde(s) pour les structures décomposées à deux et trois entrées avec 2736 vecteurs dans la base d'apprentissage Ω .

n.b : le temps d'exécution des programmes est donné à titre indicatif. Les programmes sont écrits en C++ avec un ordinateur muni d'un processeur Pentium cadencé à 166 MHz avec 32 Moctets de mémoire vive (R.A.M).

ANNEXE C

Publication

- L. KOEHL, X. ZENG, A. GHENAIM et C. VASSEUR, *Modelling interstices of a continuous yarn by image processing*
Journal of the Textile Institute - (1997) - sous presse

Communications

- L. KOEHL, X. ZENG et C. VASSEUR, *Estimating Fractal Dimension of a Profile with High Accuracy*
CESA'96 Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications, 9-12 juillet 1996, Lille, FRANCE
- L. KOEHL, X. ZENG et C. VASSEUR, *A Fuzzy Logic Based Fractal Dimension Estimator For Profiles*
IMAC'S97 on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics, 24-28 août 1997, Berlin, Allemagne
- L. KOEHL, X. ZENG et C. VASSEUR, *A Method of Decomposition of Fuzzy Models Using Genetic Algorithms*
CESA'98 Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications, 1-4 avril 1998, Hammamet, TUNISIE

